

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ХІМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ
З ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА МАТЕМАТИКА»
ЗА РОЗДІЛОМ «ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ»
ЗА ОСВІТНІМ РІВНЕМ «БАКАЛАВР» ДЛЯ СТУДЕНТІВ
СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ «151 АВТОМАТИЗАЦІЯ ТА КОМП'ЮТЕРНО-
ІНТЕГРОВАНІ ТЕХНОЛОГІЇ» І «152 МЕТРОЛОГІЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНО-
ВИМІРЮВАЛЬНА ТЕХНІКА»

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики
Протокол № 6 від 08.06.2018

Дніпро ДВНЗ УДХТУ 2019

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Вища математика» за розділом «Теорія функцій комплексної змінної» за освітнім рівнем «Бакалавр» для студентів спеціальності «151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» і «152 Метрологія та інформаційно-вимірвальна техніка» / Укл.: А.В. Поліщук, Л.О. Купріна, Т.О. Гранкіна. – Дніпро: ДВНЗ УДХТУ, 2019. – 49 с.

Укладачі: А.В. Поліщук
Л.О. Купріна
Т.О. Гранкіна

Відповідальний за випуск В.І. Олевський, д-р техн. наук

Навчальне видання

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Вища математика» за розділом «Теорія функцій комплексної змінної» за освітнім рівнем «Бакалавр» для студентів спеціальності «151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» і «152 Метрологія та інформаційно-вимірвальна техніка»

Укладачі: ПОЛІЩУК Алла Вікторівна
КУПРІНА Лариса Олександрівна
ГРАНКІНА Тетяна Олександрівна

Авторська редакція
Комп'ютерна верстка Л.Я. Гоцуцова

Підписано до друку 24.04.19. Формат 60×84/16. Папір ксерокс. Друк різнограф. Умов. друк. арк. 2,12. Обл.-вид. арк. 2,16. Тираж 100 прим. Зам. № 206. Свідоцтво ДК № 5026 від 16.12.2015.

ДВНЗ УДХТУ, просп. Гагаріна, 8, м. Дніпро, 49005

Редакційно-видавничий відділ

ЗМІСТ

1 Комплексні числа та дії над ними.....	4
2 Функція комплексної змінної.....	7
2.1 Загальні поняття.....	7
2.2 Основні елементарні функції комплексної змінної.....	8
2.3 Границя, неперервність і диференційованість функції комплексної змінної	9
2.4 Інтегрування функції комплексної змінної.....	11
2.5 Степеневі ряди. Ряди Тейлора і Лорана.....	15
2.6 Ізольовані особливі точки та їх характер.....	19
2.7 Теорія лишків.....	21
2.8 Перетворення Лапласа.....	24
ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ.....	29
Завдання 1.....	29
Завдання 2.....	37
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	49

1 КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ТА ДІЇ НАД НИМИ

Комплексним числом називається впорядкована пара (x, y) дійсних чисел x і y , якщо для них визначені поняття рівності та операції додавання і множення наступним чином:

1. Два комплексних числа (x_1, y_1) та (x_2, y_2) є рівними тоді і тільки тоді, якщо $x_1 = x_2$ і $y_1 = y_2$.

2. Сумою (різницею) двох комплексних числа $(x_1, y_1) \pm (x_2, y_2)$ називається комплексне число $(x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$.

3. Добутком двох комплексних числа $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)$ називається комплексне число $(x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Комплексне число $(0; 1)$ називається *уявною одиницею* та позначається буквою i .

За допомогою формули добутку комплексних чисел знайдемо:

$$i^2 = i \cdot i = (0; 1) \cdot (0; 1) = (-1; 0) = -1.$$

Із формул суми та добутку комплексних чисел випливають рівності:

$$\begin{aligned}(0; y) &= (0; 1) \cdot (y; 0) = iy; \\(x; y) &= (x; 0) + (0; y) = x + iy.\end{aligned}$$

Таким чином, кожне комплексне число $(x; y)$ можна подати у вигляді $x + iy$. Такий запис називається *алгебраїчною формою* комплексного числа. Комплексне число виду iy називається *чисто уявним*.

Комплексне число прийнято позначати однією буквою z , тобто $z = x + iy$. Число x називається *дійсною частиною*, а число y *уявною частиною* комплексного числа z і позначаються відповідно: $x = \operatorname{Re} z$ та $y = \operatorname{Im} z$.

Комплексне число $x - iy$ називається *комплексно спряженим* до комплексного числа $z = x + iy$ і позначається $\bar{z}$:

$$\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy.$$

Очевидно, що $\bar{\bar{z}} = z$ тоді і тільки тоді коли z — дійсне число.

Число $\sqrt{x^2 + y^2}$ називається *модулем* комплексного числа $z = x + iy$ і позначається $|z|$:

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Очевидно, що $|z| \geq 0$, причому $|z| = 0$ тоді і тільки тоді коли $z = 0$. Відмітимо ще такі формули, які випливають із означень модуля та спряженого комплексного числа:

$$|z| = |\bar{z}|, \quad z\bar{z} = |z|^2.$$

Операції додавання і множення володіють властивостями:

1. *Комутативності*: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$; $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$;

2. *Асоціативності*: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$; $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$;

3. *Дистрибутивності*: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

Операція обернена до множення називається *діленням*, а часткою двох чисел z_1 та z_2 називається таке число z , яке задовольняє рівнянню $z \cdot z_2 = z_1$ і позначається $\frac{z_1}{z_2}$.

Якщо $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ то:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + iy_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

У прямокутній системі координат комплексне число $z = x + iy$ зображується точкою площини із координатами (x, y) і позначається тією ж буквою z . Існує взаємно однозначна відповідність між комплексними числами та точками площини. Вісь абсцис називають *дійсною віссю*, а вісь ординат – *уявною віссю*. Площина, на якій зображуються комплексні числа, називається *комплексною площиною*. Комплексне число z зображується також вектором з початком в точці O і кінцем в точці z . Довжина вектора z дорівнює модулю $|z|$. Положення точки $z = x + iy$ на комплексній площині однозначно визначається не тільки декартовими координатами (x, y) , але і полярними координатами (r, φ) , де $r = |z|$ – відстань від точки O до точки z , а φ – кут між дійсною віссю та вектором z , який відраховується від додатного напрямку дійсної осі. При цьому якщо відлік ведеться проти годинникової стрілки, то величина кута є додатною. Цей кут називається *аргументом* комплексного числа z і позначається $\varphi = \text{Arg } z$.

Аргумент комплексного числа є багатозначним і визначається з точністю до значення, кратного 2π . Те значення $\text{Arg } z$, яке задовольняє нерівність $0 < \text{Arg } z \leq 2\pi$, називається *головним значенням аргументу* і позначається $\arg z$:

$$\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Для обчислення головного значення аргументу комплексного числа можна використати формули

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & x > 0, \quad y \geq 0, \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, \quad y \in R, \\ \arctg \frac{y}{x} + 2\pi, & x > 0, \quad y < 0, \\ \pi - \arctg \frac{y}{x}, & x = 0, \quad y \neq 0. \end{cases}$$

Зауважимо, що для комплексного числа $z=0$ його модуль дорівнює нулю, а аргумент не визначений.

Будь-яке комплексне число можна подати у *тригонометричній* формі

$$z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi).$$

При $|z|=1$ матимемо $z = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$. Комплексне число $\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$ позначається символом $e^{i\varphi}$, тобто функція $e^{i\varphi}$ для будь-якого дійсного числа φ визначається *формулою Ейлера*: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$. На основі цієї формули будь-яке комплексне число можна подати у *показовій* формі:

$$z = r e^{i\varphi}.$$

Функція $e^{i\varphi}$ володіє звичайними властивостями показової функції. Подамо операції множення та ділення комплексних чисел у тригонометричній та показовій формах. Нехай задано два комплексних числа:

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1) = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2) = r_2 e^{i\varphi_2}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \end{aligned}$$

Комплексне число a називається *коренем n -го степеня із числа z* (позначається $\sqrt[n]{z}$), якщо $a^n = z$. Для добування кореня n -го степеня з комплексного числа використовують формулу:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \cdot \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = \overline{0, n-1}.$$

У результаті отримаємо n різних значень $\sqrt[n]{z}$, які будуть вершинами правильного n -кутника, вписаного в коло радіуса $r = |z|$ з центром у точці нуль.

Приклади:

1. Знайти модуль та головне значення аргументу комплексного числа $z = 4 - 3i$.

Розв'язання:

$$x = 4, \quad y = -3, \quad |z| = r = \sqrt{16 + 9} = 5, \quad \arg z = \arctg\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi = 2\pi - \arctg \frac{3}{4}.$$

2. Знайти дійсну та уявну частини комплексного числа $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$.

Розв'язання:

$$z = \left(\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} \right)^3 = \frac{1}{8}(1+2i-1)^3 = \frac{8i^3}{8} = -i. \quad \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z = -1.$$

3. Знайти всі корені рівняння $z^5 - 1 = 0$.

Розв'язання:

$$z = \sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{1} \left(\cos \frac{0+2\pi k}{5} + i \cdot \sin \frac{0+2\pi k}{5} \right) = \cos \frac{2\pi k}{5} + i \cdot \sin \frac{2\pi k}{5}; \quad k = \overline{0,4}.$$
$$k=0: z_0 = 1; \quad k=1: z_1 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{5}; \quad k=2: z_2 = \cos \frac{4\pi}{5} + i \cdot \sin \frac{4\pi}{5};$$
$$k=3: z_3 = \cos \frac{6\pi}{5} + i \cdot \sin \frac{6\pi}{5}; \quad k=4: z_4 = \cos \frac{8\pi}{5} + i \cdot \sin \frac{8\pi}{5}.$$

2 ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

2.1 Загальні поняття

Кожному комплексному числу $z = a + ib$ відповідає точка (a, b) комплексної площини C . Якщо z змінюється відповідно до тих чи інших умов, то в цьому випадку ми маємо справу з комплексними змінними $z = x + iy$. Всім значенням комплексної змінної $z = x + iy$, де $-\infty < x, y < +\infty$, взаємно однозначно відповідає сукупність всіх точок площини C , яку називають площиною комплексної змінної z . Комплексна площина, доповнена нескінченно віддаленою точкою ∞ , називається розширеною площиною комплексної змінної і позначається $\bar{C}$.

Нехай E — множина точок комплексної площини. Точка $z_0 \in E$ називається внутрішньою точкою множини E , якщо досить малий окіл цієї точки повністю належить множині E . Множина E називається відкритою, якщо кожна її точка є внутрішньою для неї.

Проколом δ — околom точки $z_0 \in \bar{C}$ називають множину точок z , які задовольняють нерівність $0 < |z - z_0| < \delta$ і позначають $U_\varepsilon(z_0)$.

Непорожня множина D комплексної площини чи розширеної комплексної площини називається областю, якщо виконуються такі умови:

— вона відкрита, тобто разом з кожною своєю точкою містить деякий окіл цієї точки;

— вона зв'язна, тобто будь-які дві її точки можна сполучити деякою ламаною L , всі точки якої належать цій множині D .

Точка z_0 називається межевою точкою області D , якщо в кожному її околі містяться точки, що належать і що не належать цій області.

Множина всіх межових точок Γ області D називається межею цієї області.

Якщо при русі вздовж межі Γ область D весь час залишається зліва, то такий напрям орієнтації межі Γ називається додатним обходом.

Об'єднання області D з її межею Γ , називається замкненою областю і позначається $\bar{D}$.

Область, для якої будь-який замкнений контур, що повністю належить області, можна неперервно деформувати в точку, не виходячи за межі області називається однозв'язною. У протилежному випадку область називається багатозв'язною.

Нехай на множині E комплексної площини z визначена комплекснозначна функція $w = f(z)$ комплексної змінної z , тобто кожній точці $z = x + iy \in E$ поставлено у відповідність комплексне число $w = u + iv$. Цю функцію можна подати у вигляді $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, де $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$. Таким чином, комплекснозначну функцію комплексної змінної z можна розглядати як пару дійсних функцій двох дійсних змінних. Наприклад, функція $w = z^2$ ставить у відповідність кожному комплексному числу z число $w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$; ця функція визначена у всій скінченій комплексній площині, а якщо покласти $f(\infty) = \infty$, то вона буде визначеною і у всій розширеній площині.

Функція $w = f(z)$ комплексної змінної називається однозначною, якщо вона кожній точці $z \in E$ ставить у відповідність лише одне значення $w = f(z)$.

Множину значень функції $f(z)$ в точці $z \in E$ називають образом точки при відображенні f .

2.2 Основні елементарні функції комплексної змінної

• Показникова функція: $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

• Тригонометричні функції: $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$,

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

• Гіперболічні функції: $\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$, $\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$.

• Логарифмічна функція: $\operatorname{Ln} z = \ln z + i2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $z \neq 0$,
де $\ln z = \ln|z| + i \cdot \arg z$ - головне значення функції $\operatorname{Ln}(z)$.

• Загальна степенева функція: $z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}$, $z \neq 0$, $a \in \mathbb{C}$,
де $z^a = e^{a \ln z}$ - головне значення функції.

• Загальна показникова функція: $a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$, $a \neq 0$,
де $a^z = e^{z \ln a}$ - головне значення функції.

Приклад: Знайти вирази для дійсної та уявної частин функції $w = \cos z$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} w = \cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{1}{2}(e^{-y}e^{ix} + e^ye^{-ix}) = \frac{1}{2}e^{-y}(\cos x + i \cdot \sin x) + \frac{1}{2}e^y(\cos x - i \cdot \sin x) = \\ &= \cos x \cdot \left[\frac{1}{2}(e^{-y} + e^y) \right] + i \cdot \sin x \cdot \left[\frac{1}{2}(e^{-y} - e^y) \right] = \cos x \operatorname{ch} y + i \cdot \sin x \operatorname{sh} y, \text{ тоді} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}(\cos z) = \cos x \cdot \operatorname{ch} y, \quad \operatorname{Im}(\cos z) = \sin x \cdot \operatorname{sh} y.$$

2.3 Границя, неперервність і диференціювання функцій комплексної змінної

Поняття границі, неперервності і диференційованості вводяться тільки для однозначних функцій.

Якщо функція $w = f(z)$ однозначна і визначена в проколеному δ -околі точки z_0 , то поняття границі функції в точці z_0 вводиться за аналогією з випадком функції дійсної змінної:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A = a + ib \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon.$$

Іншими словами, комплексне число A називають границею функції $w = f(z)$ в точці $z_0 = x_0 + iy_0$, якщо для всіх точок z , близьких за модулем до точки z_0 , відповідні значення w близькі за модулем до числа $A = a + ib$.

З геометричної точки зору існування границі функції $w = f(z)$ означає, що проколений δ -окіл точки z_0 відображається на проколений ε -окіл точки A .

Однозначна функція $w = f(z)$, яка визначена в околі точки $z_0 = x_0 + iy_0$, називається неперервною в точці z_0 , якщо $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Якщо функція неперервна в кожній точці області D , то кажуть, що вона неперервна в D .

Нехай однозначна функція $w = f(z)$ визначена в деякому δ -околі точки z_0 . Розглянемо всі можливі прирости незалежної змінної $\Delta z = z - z_0 = \Delta x + i\Delta y = (x - x_0) + i(y - y_0) \neq 0$, які належать цьому δ -околу. Кожному Δz відповідає приріст функції $\Delta w = \Delta f(z_0) = f(z) - f(z_0) = \Delta u + i\Delta v$ області D комплексної змінної z . Введемо позначення $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$. Точки z і $z + \Delta z$ належать області D .

Похідною $w' = f'(z)$ функції $w = f(z)$ у точці z називається границя відношення приросту функції Δw до приросту аргументу Δz , коли приріст аргументу прямує до нуля довільним способом:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Функція, що має скінченну похідну в точці z , називається диференційованою в цій точці.

Теорема (необхідні та достатні умови диференційованості функції).

Нехай функція $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ визначена в околі точки $z_0 = x_0 + iy_0$.

Для того, щоб вона була диференційованою в точці z_0 , необхідно і достатньо, щоб у цій точці виконувалися умови Коші-Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Якщо в деякій точці (x, y) виконуються умови Коші-Рімана і, крім того, функції $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ диференційовані як функції двох дійсних змінних, то функція $f(z) = u + iv$ є диференційованою в точці $z = x + iy$ як функція комплексної змінної z .

Функція $w = f(z)$ називається **аналітичною** в точці z , якщо вона диференційована як в самій точці z , так і в деякому її околі. Функція $w = f(z)$ називається аналітичною в області D , якщо вона аналітична в кожній $z \in D$.

Похідна аналітичної функції обчислюється за формулами:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Використовуючи умови Коші-Рімана, можна відновити аналітичну функцію $w = f(z)$, якщо відома її дійсна $u = u(x, y)$ або уявна $v = v(x, y)$ частини і, крім того, задано значення $f(z_0)$ функції в деякій точці z_0 .

Приклади:

1. Дослідити на диференційованість функцію, у випадку існування знайти її похідну.

а) $w = 1/z$; б) $w = \bar{z}$.

Розв'язання. $z = x + iy$; $w = u + iv$;

$$\text{а) } w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} \Rightarrow u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Знайдені частинні похідні задовольняють умови Коші-Рімана. Обчислимо комплексну похідну:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + i \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-(x - iy)^2}{(x + iy)^2 (x - iy)^2} = \frac{-1}{(x + iy)^2} = -\frac{1}{z^2}.$$

$$\text{б) } w = \bar{z} = x - iy \Rightarrow u = x, \quad v = -y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

Знайдені частинні похідні не задовольняють умови Коші-Рімана $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}\right)$

. Тому дана функція не диференційована в жодній точці комплексної площини.

1. Визначити аналітичну функцію $w = f(z)$, якщо відома її дійсна частина $u(x, y) = 2e^x \cos y$ і $f(0) = i$.

Розв'язання:

Із першої умови Коші-Рімана отримаємо: $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y$. Знаходимо, що $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$, звідси

$$v(x, y) = \int 2e^x \cos y dy = 2e^x \sin y + \varphi(x),$$

де $\varphi(x)$ – невідома функція. З другої умови Коші-Рімана отримуємо:

$$2e^x \sin y + \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2e^x \sin y.$$

Тоді $\varphi'(x) = 0$, $\varphi(x) = C$. Отже, $v(x, y) = 2e^x \sin y + C$ і

$$f(z) = 2e^x \cos y + i(2e^x \sin y + C) = 2e^x (\cos y + i \sin y) + i \cdot C = 2e^z + i \cdot C.$$

З додаткової умови знаходимо, що $C = 2 + i$. Отже, $f(z) = 2e^z + 2i - 1$.

2.4 Інтегрування функцій комплексної змінної

Нехай однозначна функція $w = f(z)$ визначена і неперервна в області D , а Γ - кусково-гладка крива, що лежить в області D . Розіб'ємо криву Γ на частинні дуги точками $z_k \in \Gamma$, $k = \overline{0, n}$ і на кожній дузі оберемо точки ξ_k , $k = \overline{1, n}$. Тоді інтегралом від $f(z)$ вздовж кривої Γ називається границя

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{\max |\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k,$$

при умові, що така границя існує і не залежить ні від способу розбиття кривої Γ на частинні дуги, ні від вибору точок ξ_k .

Якщо функція $f(z)$ неперервна на Γ , то інтеграл існує.

Якщо $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$, то обчислення інтеграла зводиться до обчислення двох криволінійних інтегралів другого роду:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} u dx - v dy + i \cdot \int_{\Gamma} v dx + u dy.$$

Тому для інтеграла від комплексної функції справедливі відповідні властивості криволінійних інтегралів. Зокрема, при зміні напрямку обходу кривої цей інтеграл тільки змінює знак:

$$\int_{\Gamma^+} f(z)dz = - \int_{\Gamma^-} f(z)dz.$$

Якщо крива Γ задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, а початкова і кінцева точки кривої відповідають значенням $t = \alpha$ і $t = \beta$, то

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)]z'(t)dt, \text{ де } z(t) = x(t) + i \cdot y(t).$$

Якщо $w = f(z)$ – аналітична функція в однозв’язній області D , то інтеграл не залежить від шляху інтегрування (залежить тільки від початкової та кінцевої точок). В цьому випадку для обчислення інтеграла застосовується формула Ньютона-Лейбніца:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \Phi(z_2) - \Phi(z_1),$$

де $\Phi(z)$ – первісна функції $f(z)$, тобто $\Phi'(z) = f(z)$ в області D , $z(\alpha) = z_1$, $z(\beta) = z_2$.

Теорема (інтегральна теорема Коші для однозв’язної області). Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв’язній області D , що обмежена кусково-гладким контуром Γ і неперервна в замкненій області $\bar{D}$, то інтеграл від функції $f(z)$ по замкнутому контуру Γ дорівнює нулю

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

Теорема Коші поширюється на багатозв’язну область: якщо функція $f(z)$ аналітична в багатозв’язній області D , що обмежена зовнішнім контуром Γ_0 і внутрішніми контурами Γ_k , $k = \overline{1, n}$, і неперервна в замкненій області $\bar{D}$, то інтеграл від функції $f(z)$ по повній межі області в додатному напрямі дорівнює нулю

$$\oint_{\Gamma_0} f(z)dz + \sum_{k=1}^n \oint_{\Gamma_k^+} f(z)dz = 0.$$

Іншими словами, для складеного контуру справедливо наступне: інтеграл від функції $f(z)$ по зовнішньому контуру дорівнює сумі інтегралів по всіх

внутрішніх контурах при умові, що обіг усіх контурів здійснюється проти годинникової стрілки

$$\oint_{\Gamma_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\Gamma_k^-} f(z)dz.$$

Якщо функція $w = f(z)$ є аналітичною в однозв'язній області D , обмеженій кусково-гладким замкнутим контуром Γ і неперервна на самому контурі, то за теоремою Коші

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

і для будь-якої внутрішньої точки $z_0 \in D$ за інтегральною формулою Коші

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Висновок 1.
$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} f(z), & z \in D \\ 0, & z \notin D \end{cases}$$

Висновок 2. Нехай функція $f(z)$ – аналітична в області D з межею Γ і z_0 – довільна внутрішня точка цієї області. Тоді функція $f(z)$ нескінченно разів диференційовна, причому

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz; \quad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad k \in N.$$

Інтегральна формула Коші справедлива не тільки для однозв'язної області, але узагальнюється і на випадок багатозв'язних областей. Якщо функція $f(z)$ є аналітичною у багатозв'язній області D , обмеженій контуром Γ і внутрішніми по відношенню до нього контурами $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, і неперервна у замкнутій області $\bar{D} = D \cup \Gamma^+ \cup \gamma_1^- \cup \dots \cup \gamma_k^-$ (знаки у верхніх індексах означають напрямок обходу) то за теоремою Коші для багатозв'язної області

$$\oint_{\Gamma^+ \cup \gamma_1^- \cup \dots \cup \gamma_k^-} f(z)dz = 0.$$

Приклади:

1. Обчислити інтеграл $I = \int_L \frac{dz}{z - z_0}$ по дузі $L : z = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0; 2\pi]$ – коло.

Розв'язання:

$$I = \int_L \frac{dz}{z - z_0} = \left| \begin{matrix} z = z_0 + Re^{it}; & dz = iRe^{it}dt \\ z_1 = 0; & z_2 = 2\pi \end{matrix} \right| = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}dt}{Re^{it}} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

2. Обчислити інтеграл $\int_{\Gamma} (1+i-2z)dz$, де Γ - дуга параболи $y = x^2$ від точки $(0,0)$ до точки $(1,1)$.

Розв'язання:

Перший спосіб. Запишемо підінтегральну функцію у вигляді $1+i-2z = 1+i-2(x+iy) = (1-2x) + i(1-2y)$. Тоді за формулою обчислення інтеграла отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (1+i-2z)dz &= \int_{\Gamma} (1-2x)dx - (1-2y)dy + i \int_{\Gamma} (1-2y)dx + (1-2x)dy = \\ &= \int_0^1 (1-2x - (1-2x^2)2x)dx + i \int_0^1 (1-2x^2 + (1-2x)2x)dx = 0. \end{aligned}$$

Другий спосіб. Запишемо рівняння кривої Γ у параметричній формі $x = x, y = x^2$. Тоді $z = x + i \cdot x^2$ і

$$\int_{\Gamma} (1+i-2z)dz = \int_0^1 (1+i-2(x+ix^2))(1+i2x)dx = 0.$$

Третій спосіб. Оскільки підінтегральна функція є аналітичною в області, що містить криву Γ , то за формулою Ньютона-Лейбніца маємо

$$\int_{\Gamma} (1+i-2z)dz = \int_0^{1+i} (1+i-2z)dz = \left((1+i)z - z^2 \right) \Big|_0^{1+i} = 0.$$

3. Обчислити інтеграл $\oint_{\Gamma} \frac{e^{z^2}}{z^2(z-6)} dz$, якщо

а) $\Gamma: |z-2|=1$; б) $\Gamma: |z-2|=3$; в) $\Gamma: |z-2|=5$.

Розв'язання:

а) У замкненій області, обмеженій колом $|z-2|=1$, підінтегральна функція аналітична, тому за теоремою Коші, отримаємо

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^{z^2}}{z^2(z-6)} dz = 0;$$

б) В області, обмеженій колом $|z-2|=3$, знаменник підінтегральної функції дорівнює нулю в точці $z=0$. Тому

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^{z^2}}{z^2(z-6)} dz = \oint_{\Gamma} \frac{e^{z^2}}{z^2} dz = 2\pi i \cdot \left(\frac{e^{z^2}}{z-6} \right)' \Big|_{z=0} = 2\pi i \frac{2ze^{z^2}(z-6) - e^{z^2}}{(z-6)^2} \Big|_{z=0} = -\frac{\pi i}{18};$$

в) В області, обмеженій колом $|z-2|=5$, знаменник підінтегральної функції дорівнює нулю у двох точках $z=0$ і $z=6$, тому безпосередньо застосовувати інтегральну формулу Коші не можна. В цьому випадку необхідно або розкласти дріб $\frac{1}{z^2(z-6)}$ на прості дроби або розглянути багатозв'язну область $|z-2|<5$, обмежену колом $\Gamma = \{z: |z-2|=5\}$ і внутрішніми контурами $\gamma_1 = \{z: |z|=\rho\}$ і $\gamma_2 = \{z: |z-6|=\rho\}$, де $0<\rho<1/2$. Тоді в цій області підінтегральна функція є аналітичною і

$$\oint_{\Gamma^+} \frac{e^{z^2}}{z^2(z-6)} dz + \oint_{\gamma_1^-} \frac{e^{z^2}}{z^2(z-6)} dz + \oint_{\gamma_2^-} \frac{e^{z^2}}{z^2(z-6)} dz = 0$$

звідки випливає, що

$$\oint_{\Gamma^+} \frac{e^{z^2}}{z^2(z-6)} dz = \oint_{\gamma_1^+} \frac{e^{z^2}}{z^2(z-6)} dz + \oint_{\gamma_2^+} \frac{e^{z^2}}{z^2(z-6)} dz.$$

Тоді

$$\oint_{\gamma_1^+} \frac{e^{z^2}}{z^2(z-6)} dz = 2\pi i \left(\frac{e^{z^2}}{z-6} \right)' \bigg|_{z=0} = -\frac{\pi i}{18},$$

$$\oint_{\gamma_2^+} \frac{e^{z^2}}{z^2(z-6)} dz = \oint_{\gamma_2^+} \frac{e^{z^2}}{z-6} \frac{1}{z^2} dz = 2\pi i \frac{e^{z^2}}{z^2} \bigg|_{z=6} = \frac{\pi i e^{36}}{18}.$$

Остаточно маємо:
$$\oint_{\Gamma} \frac{e^{z^2}}{z^2(z-6)} dz = \frac{\pi i}{18} (e^{36} - 1).$$

2.5 Степеневі ряди. Ряди Тейлора та Лорана

Степеневим рядом з центром у точці z_0 називається функціональний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0) + \dots + c_n (z - z_0)^n + \dots,$$

де c_n ($n=0,1,2,\dots$) — коефіцієнти ряду (комплексні числа).

Теорема 1 (теорема Абеля). Якщо степеневий ряд збігається в деякій точці z_1 ($z_1 \neq z_0$), то він абсолютно збігається в крузі радіуса $|z_1 - z_0|$ з центром z_0 . Якщо степеневий ряд розбігається в деякій точці z_2 ($z_2 \neq z_0$), то він розбігається поза кругом радіуса $|z_2 - z_0|$ з центром z_0 .

За теоремою Абеля для степеневого ряду завжди існує круг збіжності $|z - z_0| < R$, всередині якого ряд збігається, зовні – розбігається, а на самому колі $|z - z_0| = R$ можуть бути як точки збіжності, так і розбіжності. Радіус R цього круга називається радіусом збіжності, який знаходиться за ознакою Даламбера чи радикальною ознакою Коші за формулами:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \quad \text{або} \quad R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Теорема 2 (теорема Тейлора). Нехай функція $f(z)$ – аналітична всередині круга радіуса R з центром у точці z_0 . Тоді вона може бути подана у цьому крузі збіжним степеневим рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n; \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n=0,1,2,\dots).$$

Причому цей ряд визначається однозначно.

Зауваження. Використовуючи наслідок з формули Коші, коефіцієнти ряду Тейлора можна подати у вигляді

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad (n=0,1,2,\dots).$$

На практиці для обчислення коефіцієнтів c_n використовують, якщо це можливо, розклад функції на прості дроби і розклади елементарних функцій у ряд Тейлора.

Розклад основних елементарних функцій в ряд Тейлора

- $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in C;$
- $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in C;$
- $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in C;$
- $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1;$
- $\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1!}, \quad |z| < 1;$
- $(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \dots =$
 $= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n, \quad |z| < 1, \quad \alpha \in R \setminus N;$

(якщо $\alpha = m \in N$, то функція $(1+z)^m$ розкладається за біномом Ньютона і $z \in C$).

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots + (-1)^n z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1.$$

Рядом Лорана називається ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

при цьому ряд $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n$ називається **головною частиною** ряду Лорана, а

ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ – **правильною частиною**.

Якщо

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|} = r < R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}},$$

то областю збіжності ряду Лорана є кільце $r < |z - z_0| < R$, в якому сума ряду Лорана є аналітичною функцією, а коефіцієнти ряду c_n обчислюються за формулою

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad n \in Z,$$

де Γ – довільне коло з центром в точці z_0 , що лежить всередині даного кільця.

Теорема Лорана. Якщо функція $f(z)$ аналітична в кільці $0 \leq r < |z - z_0| < R$, то в цьому кільці вона єдиним чином розкладається в ряд Лорана

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, коефіцієнти якого обчислюються за формулою

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad n \in Z.$$

Приклади:

1. Розкласти функцію $f(z) = \frac{z}{z+4}$ в ряд Тейлора в околі точки $z_0 = 1$ і знайти радіус збіжності отриманого ряду.

Розв'язання. Подамо функцію у вигляді

$$f(z) = \frac{z}{z+4} = \frac{z+4-4}{z+4} = 1 - \frac{4}{z+4} = 1 - \frac{4}{(z-1)+5} = 1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{1+(z-1)/5} = 1 - \frac{4/5}{1-(z-1)/5}.$$

Якщо $|-(z-1)/5| < 1$, то другий доданок в останньому виразі можна розглядати як суму $S = \frac{a_1}{1-q}$ нескінченно спадної геометричної прогресії $a_1 \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ з першим членом $a_1 = 4/5$ і знаменником $q = -(z-1)/5$. Тоді

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 - (4/5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-(z-1)/5 \right)^{n-1} = 1 - \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \left(-\frac{z-1}{5} \right) - \frac{4}{5} \left(-\frac{z-1}{5} \right)^2 - \dots - \frac{4}{5} \left(-\frac{z-1}{5} \right)^n - \dots = \\ &= \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5^n} (z-1)^n. \end{aligned}$$

Отриманий ряд в силу однозначності розвинення і є шуканим рядом Тейлора. Радіус збіжності цього ряду визначається з умови $|-(z-1)/5| < 1$. Тоді $|z-1| < 5$. Отже, $R = 5$.

2. Розкласти функцію $f(z) = z^3 e^{1/z}$ в ряд Лорана в околі точки $z_0 = 0$.

Розв'язання:

Функція $f(z) = z^3 e^{1/z}$ є аналітичною у кільці $0 < |z| < \infty$, отже, розкладається в ряд Лорана. Скористаємося розкладом показникової функції в ряд Тейлора в околі точки $z_0 = 0$:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in C;$$

і замінімо z на $1/z$. Тоді

$$f(z) = z^3 e^{1/z} = z^3 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \dots + \frac{1}{z^k k!} + \dots \right) = z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{z 4!} + \dots + \frac{1}{z^{k-3} k!} + \dots$$

3. Знайти всі розклади функції $\frac{1}{z(z-1)}$ в ряд Лорана за степенями $z - z_0$, де $z_0 = -1 + i$.

Розв'язання:

Функція є аналітичною у всій комплексній площині за винятком точок $z_1 = 0$ і $z_2 = 1$, тому у кільцях $|z+1-i| < \sqrt{2}$, $\sqrt{2} < |z+1-i| < \sqrt{5}$, $\sqrt{5} < |z+1-i| < \infty$ її можна розкласти в ряд Лорана, де $\sqrt{2}$ – це відстань від точки $z_0 = -1 + i$ до $z_1 = 0$; $\sqrt{5}$ – це відстань від точки $z_0 = -1 + i$ до $z_2 = 1$.

Спочатку розкладемо задану функцію на прості дроби:

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}.$$

а) Розглянемо кільце $|z+1-i| < \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} = \frac{1}{z+1-i-(1-i+1)} - \frac{1}{z+1-i-(1-i)} = -\frac{1}{2-i} \cdot \frac{1}{1-\frac{z+1-i}{2-i}} + \\
&+ \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1}{1-\frac{z+1-i}{1-i}} = -\frac{1}{2-i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1-i)^n}{(2-i)^n} + \frac{1}{1-i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1-i)^n}{(1-i)^n} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(1-i)^{n+1}} - \frac{1}{(2-i)^{n+1}} \right) (z+1-i)^n.
\end{aligned}$$

б) Розглянемо кільце $\sqrt{2} < |z+1-i| < \sqrt{5}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} = \frac{1}{z+1-i-(1-i+1)} - \frac{1}{z+1-i-(1-i)} = -\frac{1}{2-i} \cdot \frac{1}{1-\frac{z+1-i}{2-i}} + \\
&+ \frac{1}{z+1-i} \cdot \frac{1}{1-\frac{1-i}{z+1-i}} = -\frac{1}{2-i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1-i)^n}{(2-i)^n} + \frac{1}{z+1-i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^n}{(z+1-i)^n} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^n}{(z+1-i)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1-i)^n}{(2-i)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

в) Розглянемо кільце $\sqrt{5} < |z+1-i| < \infty$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} = \frac{1}{z+1-i-(1-i+1)} - \frac{1}{z+1-i-(1-i)} = -\frac{1}{z+1-i} \cdot \frac{1}{1-\frac{2-i}{z+1-i}} + \\
&+ \frac{1}{z+1-i} \cdot \frac{1}{1-\frac{1-i}{z+1-i}} = -\frac{1}{z+1-i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2-i)^n}{(z+1-i)^n} + \frac{1}{z+1-i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^n}{(z+1-i)^n} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^n}{(z+1-i)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2-i)^n}{(z+1-i)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^n - (2-i)^n}{(z+1-i)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

2.6 Ізольовані особливі точки та їх характер

Точка z_0 називається **ізольованою особливою точкою** однозначного характеру функції $w = f(z)$, якщо $f(z)$ – однозначна та аналітична функція в круговому кільці $0 < |z - z_0| < \delta$ крім точки z_0 .

Функцію $w = f(z)$ в околі точки z_0 можна розкласти в ряд Лорана, збіжний в кільці $0 < |z - z_0| < \delta$. При цьому можливі три випадки, коли ряд Лорана:

1) не містить членів з від'ємними степенями $z - z_0$, тобто головна частина ряду Лорана відсутня. В цьому випадку z_0 називається **усувною особливою точкою функції** $w = f(z)$;

2) містить скінчене число членів з від'ємними степенями $z - z_0$, тобто $f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$, $c_{-n} \neq 0$. В цьому випадку z_0 називається **полюсом порядку n функції** $w = f(z)$;

3) містить нескінчене число членів з від'ємними степенями $z - z_0$, тобто $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$. У цьому випадку z_0 називається **суттєво особливою точкою** функції $w = f(z)$.

Точка $z_0 \in G$ називається **нулем функції** $f(z)$, якщо $f(z_0) = 0$.

Точка $z_0 \in G$ називається **нулем n -го порядку**, якщо $f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$, а $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Якщо $n=1$, то z_0 називають **простим нулем функції** $f(z)$.

Точка $z_0 = \infty$ називається **ізольованою особливою точкою** функції $w = f(z)$, якщо $w = f(z)$ — однозначна аналітична в кільці $R < |z| < \infty$ і $z = \infty$ — особлива точка.

Для того, щоб точка z_0 була **усувною особливою** точкою аналітичної функції $w = f(z)$, необхідно і достатньо, щоб існувала скінчена границя $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = C_0$, $|C_0| < \infty$.

Для того, щоб точка z_0 була **полюсом** аналітичної функції $w = f(z)$, необхідно і достатньо, щоб $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.

Для того, щоб точка z_0 була **полюсом порядку n** аналітичної функції $w = f(z)$, необхідно і достатньо, щоб функцію $w = f(z)$ можна було подати у вигляді $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^n}$, де $\varphi(z)$ — функція аналітична в точці z_0 , причому $\varphi(z_0) \neq 0$.

Для того, щоб точка z_0 була **суттєво особливою точкою** аналітичної функції $w = f(z)$, необхідно і достатньо, щоб в точці z_0 не існувала границя функції.

Дослідження характеру нескінченно віддаленої особливої точки зручно проводити шляхом заміни $z = \frac{1}{\eta}$, за допомогою якої нескінченно віддалена точка $z = \infty$ переходить в точку $\eta = 0$.

Приклади:

Знайти всі особливі точки заданих функцій $f(z)$ і визначити їх характер.

$$1. f(z) = \frac{1}{e^{1/z} + 1}.$$

Розв'язання:

Особливими точками є точка $z=0$ і точки, в яких знаменник перетворюється в нуль $z_k = \frac{1}{(2k+1)\pi i}$, $k \in \mathbb{Z}$, причому ці точки є нулями 1-го

порядку. Отже, в точках $z_k = \frac{1}{(2k+1)\pi i}$, $k \in Z$ функція $f(z)$ має полюси першого порядку. Точка $z=0$ не є ізольованою особливою точкою, бо вона є граничною точкою полюсів, оскільки $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 0$.

$$2. \quad f(z) = \frac{z}{(z-3)^2 \sin 2z}.$$

Розв'язання:

Особливими точками є точки, в яких знаменник перетворюється в нуль: $z=3$ і $z = \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. Точка $z=3$ є полюсом 3-го порядку, бо ця точка є нулем 3-го порядку знаменника функції. Аналогічно точки $z = \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z \setminus \{0\}$ є полюсами 1-го порядку. Оскільки $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{(z-3)^2 \sin 2z} = \frac{1}{18}$, то $z=0$ є усувною ізольованою особливою точкою.

$$3. \quad f(z) = e^{\frac{1}{z-i+2}}.$$

Розв'язання:

Особливою точкою є точка $z=i-2$. Розкладемо функцію в ряд Лорана в околі цієї точки:

$$e^{\frac{1}{z-i+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-i+2)^n n!}.$$

Цей ряд має нескінченно багато членів з від'ємними степенями, тому точка $z=i-2$ є суттєво особливою точкою.

2.7 Теорія лишків

Нехай z_0 – ізольована особлива точка функції $w=f(z)$.

Лишком функції $f(z)$ в точці z_0 називається число, яке визначається рівністю і позначається символом $\text{Res}[f(z), z_0]$:

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz,$$

де замкнутий контур γ лежить в області аналітичності функції $w=f(z)$ і не містить всередині жодних інших особливих точок, крім точки z_0 .

З означення випливає, що лишок функції дорівнює коефіцієнту c_{-1} розкладу функції $w=f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_0 :

$$\text{Res}[f(z), z_0] = c_{-1}.$$

1. Лишок в усуній особливій точці дорівнює нулю.

2. Лишок функції $w = f(z)$ в полюсі n -го порядку обчислюється за формулою

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [f(z)(z-z_0)^n],$$

а при $n=1$

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)(z-z_0)].$$

Якщо в околі точки z_0 функція $w = f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, де $\varphi(z), \psi(z)$ – аналітичні функції, причому $\varphi(z_0) \neq 0, \psi(z_0) = 0, \psi'(z_0) \neq 0$ (в цьому випадку z_0 – полюс 1-го порядку функції $f(z)$), то

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

3. Якщо точка z_0 є суттєво особливою точкою функції $w = f(z)$, то

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = c_{-1}.$$

4. Якщо $z_0 = \infty$ – ізольована особлива точка функції $w = f(z)$, то

$$\operatorname{Res}[f(z), \infty] = -c_{-1}.$$

Якщо функція $w = f(z)$ аналітична в точці $z_0 = \infty$, то

$$\operatorname{Res}[f(z), \infty] = \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(\infty) - f(z)),$$

де $f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$.

Перша теорема про лишки. Якщо функція $w = f(z)$ аналітична в області D , за виключенням скінченного числа ізольованих особливих точок $z_k \in D, k = \overline{1, N}$, то для будь-якого простого замкнутого контуру $\Gamma \subset D$, що охоплює точки $z_k, k = \overline{1, N}$

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}[f(z), z_k].$$

Друга теорема про лишки. Якщо функція $w = f(z)$ аналітична у всій комплексній площині, за виключенням ізольованих особливих точок $z_k, k = \overline{1, N-1}, z_N = \infty$, то

$$\sum_{k=1}^N \operatorname{Res}[f(z), z_k] = 0.$$

Зауваження. Часто на практиці при обчисленні інтеграла по замкнутому контуру зручно використовувати формулу

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = -2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res} [f(z), z_k] - 2\pi i \operatorname{Res} [f(z), \infty],$$

де точки $z_k, k = \overline{1, m}$ не належать області, обмеженій контуром інтегрування.

Приклади:

1. Знайти лишок $\operatorname{Res} \left[\frac{e^{iz}}{z^2 + 9}, 3i \right]$.

Розв'язання:

Точка $z_0 = 3i$ є полюсом 1-го порядку. Тому

$$\operatorname{Res} \left[\frac{e^{iz}}{z^2 + 9}, 3i \right] = \lim_{z \rightarrow 3i} (z - 3i) \frac{e^{iz}}{(z + 3i)(z - 3i)} = \frac{e^{i \cdot 3i}}{6i} = -\frac{i}{6e^3}.$$

2. Знайти лишок $\operatorname{Res} \left[\frac{\cos 2z}{(z-1)^3}, 1 \right]$.

Розв'язання:

Точка $z_0 = 1$ є полюсом 3-го порядку. Тому

$$\operatorname{Res} \left[\frac{\cos 2z}{(z-1)^3}, 1 \right] = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^2}{dz^2} \frac{(z-1)^3 \cos 2z}{(z-1)^3} = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 1} (-2^2 \cos 2z) = -2 \cos 2.$$

3. Знайти лишок $\operatorname{Res} \left[e^{\frac{3}{z-2}}, 2 \right]$.

Розв'язання:

Точка $z_0 = 2$ є суттєво особливою. Тому розкладемо задану функцію в ряд Лорана за степенями $(z-2)$

$$e^{\frac{3}{z-2}} = 1 + \frac{3}{z-2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{3}{z-2} \right)^2 + \dots, \quad 0 < |z-2| < +\infty.$$

Оскільки $c_{-1} = 3$, то

$$\operatorname{Res} \left[e^{\frac{3}{z-2}}, 2 \right] = 3$$

4. Обчислити інтеграл $\oint_{\Gamma^+} \frac{e^z}{z^2 + 4} dz$, де $\Gamma = \{z : |z| = 3\}$.

Розв'язання:

Всередині контуру Γ є дві особливі точки підінтегральної функції – полюси 1-го порядку $z_{1,2} = \pm 2i$. За першою теоремою про лишки маємо

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma^+} \frac{e^z}{z^2 + 4} dz &= 2\pi i \left(\operatorname{Res} \left[\frac{e^z}{z^2 + 4}, 2i \right] + \operatorname{Res} \left[\frac{e^z}{z^2 + 4}, -2i \right] \right) = 2\pi i \left(\frac{e^z}{2z} \Big|_{z=2i} + \frac{e^z}{2z} \Big|_{z=-2i} \right) = \\ &= 2\pi i \left(\frac{e^{2i}}{4i} - \frac{e^{-2i}}{4i} \right) = \frac{\pi}{2} (e^{2i} - e^{-2i}) = \pi i \cdot \sin 2. \end{aligned}$$

5. Обчислити інтеграл $\oint_{\Gamma^+} \frac{dz}{z^{10} + 1}$, де $\Gamma = \{z : |z| = 2\}$.

Розв'язання:

Всередині контуру Γ підінтегральна функція має десять особливих точок $z_k = e^{\frac{(2k+1)\pi i}{10}}$, $k = \overline{0;9}$, які є простими полюсами, що лежать на колі одиничного радіуса. Враховуючи, що поза контуром інтегрування підінтегральна функція особливих точок не має і $\operatorname{Res} \left[\frac{1}{z^{10} + 1}, \infty \right] = 0$, відповідно до Зауваження маємо

$$\oint_{\Gamma^+} \frac{dz}{z^{10} + 1} = -2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{1}{z^{10} + 1}, \infty \right] = 0.$$

2.8 Перетворення Лапласа

Перетворенням Лапласа функції $f(t)$, $t \in R$ називається функція $F(p)$ комплексної змінної p , що визначається рівністю

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Оригіналом називається будь-яка функція $f(t)$, яка задовольняє умови:

- 1) $f(t) = 0$ при $t < 0$, причому приймається, що $f(0) = f(+0)$;
- 2) існують такі константи σ і M , що

$$|f(t)| < Me^{\sigma t} \quad \text{при } t > 0;$$

величина $\sigma_0 = \inf \sigma$ називається показником росту функції $f(t)$;

3) на будь-якому скінченному відрізку $[0, T]$ функції $f(t)$ може мати лише скінченне число точок розриву 1-го роду.

Якщо $f(t)$ – оригінал, то інтеграл $\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$ є абсолютно і рівномірно збіжним у півплощині $\operatorname{Re} p \geq \sigma > \sigma_0$. При цьому функція $F(p)$ є аналітичною у півплощині $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ і називається **зображенням функції** $f(t)$.

Відповідність між оригіналом $f(t)$ і його зображенням $F(p)$ символічно записують у вигляді $F(p) \bullet = f(t)$.

Властивості перетворення Лапласа:

1. Якщо $F(p)$ є зображенням функції $f(t)$, то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0.$$

2. Лінійність: для будь-яких комплексних констант C_1 і C_2 :

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \bullet = C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p).$$

3. Формула подібності: для будь-якої константи $\omega > 0$:

$$f(\omega t) \bullet = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right).$$

4. Формула зміщення: для будь-якого комплексного λ

$$f(t)e^{-\lambda t} \bullet = F(p + \lambda).$$

5. Формула запізнення:

$$f(t - \tau) \bullet = e^{-p\tau} F(p), \quad \tau > 0.$$

6. Диференціювання оригінала: якщо функції $f(t), f'(t), \dots, f^{(n)}(t)$ є функціями-оригіналами, то

$$f'(t) \bullet = pF(p) - f(0);$$

$$f''(t) \bullet = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0);$$

$$\dots \bullet = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),$$

$$\text{де } f^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t).$$

7. Диференціювання зображення:

$$F'(p) \bullet = -tf(t); \quad (-1)^n F^{(n)}(p) \bullet = t^n f(t), \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. Інтегрування оригінала:

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \bullet = \frac{F(p)}{p}.$$

9. Інтегрування зображення: якщо $\frac{f(t)}{t}$ є функцією-оригіналом, то

$$\int_p^\infty F(p) dp \bullet = \frac{f(t)}{t}.$$

10. Формула множення зображень:

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \bullet = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

11. Інтеграл $\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$ називається згорткою функцій $f_1(t)$ і $f_2(t)$ і

позначається символом $f_1(t)*f_2(t)$

Пошук оригінала за відомим зображенням

Щоб знайти оригінал $f(t)$ за відомим зображенням $F(p)$ використовують наступні прийоми:

1) якщо $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ є правильний раціональний дріб, то його

розкладають на суму простих дробів і знаходять оригінали для кожного простого дробу за таблицею зображень оригіналів, використовуючи властивості перетворення Лапласа;

2) використовують формулу розкладу, згідно з якою оригіналом для $F(p)$ є функція

$$f(t) = \sum_k \operatorname{Res} [F(p)e^{pt}, p_k] ,$$

де сума лишків береться по всіх особливих точках p_k функції $F(p)$.

Якщо p_k – прості полюси і $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$, де $A(p), B(p)$ – многочлени без спільних коренів, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^m \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} .$$

При знаходженні оригінала чи зображення зручно користуватися **таблицею перетворення Лапласа**.

Таблиця перетворення Лапласа

$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$	$f(t)$
$\frac{1}{p}$	1
$\frac{a}{p^2 + a^2}$	$\sin at$
$\frac{p}{p^2 + a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{p - \alpha}$	$e^{\alpha t}$
$\frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$	$\sinh \alpha t$

$\frac{p}{p^2 - \alpha^2}$	$\cosh \alpha t$
$\frac{a}{(p - \alpha)^2 + a^2}$	$e^{\alpha t} \sin at$
$\frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + a^2}$	$e^{\alpha t} \cos at$
$\frac{n!}{p^{n+1}}$	t^n
$\frac{2pa}{(p^2 + a^2)^2}$	$t \sin at$
$\frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$	$t \cos at$
$\frac{1}{(p - \alpha)^2}$	$te^{\alpha t}$
$\frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}$	$t^n e^{\alpha t}$
$\frac{1}{(p^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3} (\sin at - at \cos at)$
$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p)$	$t^n f(t)$

Приклади:

1. Знайти зображення Лапласа для функцій:

а) $f(t) = 2 + 5 \sin 4t - 5 \cos 3t$.

Розв'язання: Використовуючи властивості інтегрального перетворення Лапласа і таблицю перетворення, заходимо

$$F(p) = \frac{2}{p} + \frac{20}{p^2 + 16} - \frac{5}{p^2 + 9}.$$

б) $f(t) = \sin^3 t$.

Розв'язання: За формулою Ейлера

$$\sin^3 t = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^3 = \frac{1}{4} \left(3 \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} - \frac{e^{3it} - e^{-3it}}{2i} \right) = \frac{3}{4} \sin t - \frac{1}{4} \sin 3t.$$

Тоді

$$F(p) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{p^2 + 9}.$$

в) $f(t) = t^2 \cos 2t$.

Розв'язання: Оскільки $t^2 \cos 2t = \frac{1}{2} t^2 (e^{2it} + e^{-2it})$, то

$$F(p) = \frac{1}{(p-2i)^3} + \frac{1}{(p+2i)^3} = 2 \frac{p^3 - 12p}{(p^2 + 4)^3}.$$

Зображення заданої функції можна знайти за формулою диференціювання зображення $(-1)^n F^{(n)}(p) \bullet = t^n f(t)$, $n \in \mathbb{N}$:

$$F(p) = (-1)^2 \left(\frac{p}{p^2 + 4} \right)'' = 2 \frac{p^3 - 12p}{(p^2 + 4)^3}.$$

г) $f(t) = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$ (інтегральний синус).

Розв'язання: Використовуючи формулу інтегрування зображення, знаходимо

$$\frac{\sin t}{t} \bullet = \int_p^\infty \frac{dp}{p^2 + 1} = \frac{\pi}{2} - \arctg p.$$

За формулою інтегрування оригінала

$$F(p) = \frac{1}{p} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg p \right).$$

д) $f(t) = \int_0^t \cos(t-\tau) e^{-2\tau} d\tau.$

Розв'язання: Використовуючи поняття згортки функцій, маємо

$$f(t) = \cos t * e^{-2t} \bullet = \frac{p}{(p^2 + 1)(p + 2)}.$$

2. Знайти оригінали для заданих функцій:

а) $F(p) = \frac{1}{p^2 + 2p + 5}.$

Розв'язання: Виділяючи у знаменнику повний квадрат і використовуючи таблицю зображень, знаходимо

$$\frac{1}{p^2 + 2p + 5} = \frac{1}{(p+1)^2 + 4} = \frac{1}{2} \frac{2}{(p+1)^2 + 4} \bullet = \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t.$$

б) $F(p) = \frac{p^3 - 5p + 4}{p^2(p-1)^2}.$

Розв'язання: Розклавши функцію на прості дробі, отримаємо

$$\frac{p^3 - 5p + 4}{p^2(p-1)^2} = \frac{3}{p} + \frac{4}{p^2} - \frac{2}{p-1} = 3 + 4t - 2e^t.$$

$$в) F(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2+1)}.$$

Розв'язання: Покладемо $A(p) \equiv 1$, $B(p) = (p-1)(p^2+1)$. Точки $p=1$, $p=\pm i$ – прості полюси функції $F(p)$, тоді

$$f(t) = \sum_{k=1}^3 \frac{A(p_k)}{B(p_k)} e^{p_k t} = \frac{1}{2} (e^t - \cos t - \sin t).$$

3. Знайти розв'язок диференціального рівняння $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 0$, який задовольняє умовам $x(0)=0$, $x'(0)=1$.

Розв'язання: Операторне рівняння матиме вигляд

$$p^2 X(p) - 1 - 4pX(p) + 5X(p) = 0.$$

Звідси знаходимо

$$X(p) = \frac{1}{p^2 - 4p + 5} = \frac{1}{(p-2)^2 + 1}.$$

Тоді оригінал, тобто шуканий розв'язок, має вигляд

$$x(t) = e^{2t} \sin t.$$

Варіанти індивідуальних завдань

Завдання 1

Варіант № 1	Варіант № 2
1. Обчислити: а) в алгебраїчній формі; б) в тригонометричній формі: а) $(2-3i)^2 - i^{371} \frac{5+i}{-3+4i}$, б) $\frac{(1+i)^{20}}{(1-\sqrt{3}i)^4}$.	1. Обчислити: а) в алгебраїчній формі; б) в тригонометричній формі: а) $(3+5i)i - i^{431} \frac{(-1+i)^2}{-1+2i}$, б) $\frac{(-1+i)^6}{(1+\sqrt{3}i)^{10}}$.
2. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині $\sqrt[3]{-i}$.	2. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині $\sqrt[3]{-i}$.
3. Обчислити $\ln(1-i)$.	3. Обчислити $(-2)^i$.
4. Показати на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $ z+i \leq 2$.	4. Показати на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $ z+2i < z-4 $.
5. З'ясувати чи є функція аналітичною $w = z^2 \bar{z}$.	

6. Відновити аналітичну функцію за відомою уявною частиною та її значенням в точці $v(x, y) = 3x + 2xy, \quad f(i) = 2.$	5. З'ясувати чи є функція аналітичною $w = (z - i) \operatorname{Re} z$. 6. Відновити аналітичну функцію за відомою уявною частиною та її значенням в точці $v(x, y) = x^2 - y^2 - 1, \quad f(-1) = 0.$
Варіант № 3 1. Обчислити: а) в алгебраїчній формі; б) в тригонометричній формі: а) $\frac{(2 + 3i)^2}{i^{17}} - \frac{1 - 7i}{8 + 2i},$ б) $\frac{(1 + \sqrt{3}i)^{10}}{(1 - i)^5}.$ 2. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині $\sqrt[4]{-16}.$ 3. Обчислити $\operatorname{Ln}(\sqrt{3} - i).$ 4. Показати на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $z + i + \operatorname{Re} z \leq 1.$ 5. З'ясувати чи є функція аналітичною $w = \bar{z} \operatorname{Im}(z + i).$ 6. Відновити аналітичну функцію за відомою дійсною частиною та її значенням в точці $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x, \quad f(i) = 2 - i.$	Варіант № 4 1. Обчислити: а) в алгебраїчній формі; б) в тригонометричній формі: а) $i^{179}(4 + 3i) - \frac{1 + 5i}{1 - 5i},$ б) $(1 + \sqrt{3}i)^4(1 - i)^8.$ 2. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині $\sqrt[3]{125i}.$ 3. Обчислити $(-i)^{2+i}.$ 4. Показати на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $z + 1 - 2i > 1.$ 5. З'ясувати чи є функція аналітичною $w = z ^2 \bar{z}.$ 6. Відновити аналітичну функцію за відомою уявною частиною та її значенням в точці $v(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 1, \quad f(i) = i.$
Варіант № 5 1. Обчислити: а) в алгебраїчній формі; б) в тригонометричній формі: а) $(2 + 2i)^2 - i^{182} \frac{5 + i}{7 - i},$ б) $\frac{(1 - i)^{10}}{(-1 + \sqrt{3}i)^4}.$ 2. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині $\sqrt[4]{16}.$ 3. Обчислити $\operatorname{Ln}(1 - \sqrt{3}i).$ 4. Показати на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $z + 2 - i \leq 3.$ 5. З'ясувати чи є функція аналітичною $w = \bar{z}^2.$	Варіант № 6 1. Обчислити: а) в алгебраїчній формі; б) в тригонометричній формі: а) $(4 + i)i^{23} - \frac{(-2 + i)^2}{1 + 2i},$ б) $\frac{(1 + i)^4}{(1 - \sqrt{3}i)^{15}}.$ 2. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині $\sqrt[3]{27i}.$ 3. Обчислити $(-1)^{1+2i}.$ 4. Показати на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $z + 3 - 2i < z .$ 5. З'ясувати чи є функція аналітичною $w = (z - i) \operatorname{Im} z.$

6. Відновити аналітичну функцію за відомою уявною частиною та її значенням в точці $v(x, y) = x + 2xy, \quad f(1) = 2i$.	6. Відновити аналітичну функцію за відомою уявною частиною та її значенням в точці $v(x, y) = 2x^2 - 2y^2 - 1, \quad f(-i) = 0$.
Варіант № 7 1. Обчислити: а) в алгебраїчній формі; б) в тригонометричній формі: $\text{а) } \frac{(1+3i)^2}{i^{29}} - \frac{1-i}{3+2i}, \text{ б) } \frac{(1+\sqrt{3}i)^{12}}{(1-i)^8}.$ 2. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині $\sqrt[3]{64}$. 3. Обчислити $\operatorname{Ln}(\sqrt{3} + i)$. 4. Показати на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $z + \operatorname{Re}(z + 1) \leq 1$. 5. З'ясувати чи є функція аналітичною $w = (z + 1) \operatorname{Im} z$. 6. Відновити аналітичну функцію за відомою дійсною частиною та її значенням в точці $u(x, y) = x^2 - y^2 + x, \quad f(1) = 2 - i$.	Варіант № 8 1. Обчислити: а) в алгебраїчній формі; б) в тригонометричній формі: $\text{а) } i^{79}(2+5i) - \frac{1+3i}{1-3i}, \text{ б) } (1-\sqrt{3}i)^6(1+i)^{10}.$ 2. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині $\sqrt[2]{25i}$. 3. Обчислити $(i)^{3-i}$. 4. Показати на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $z - 1 + 3i > 2$. 5. З'ясувати чи є функція аналітичною $w = z ^2 + \bar{z}$. 6. Відновити аналітичну функцію за відомою уявною частиною та її значенням в точці. $v(x, y) = x^2 - y^2 - y, \quad f(2i) = i$.
Варіант № 9 1. Обчислити: а) в алгебраїчній формі; б) в тригонометричній формі: $\text{а) } (2-i)^2 - i^{37} \frac{-5+2i}{1+3i}, \text{ б) } \frac{(\sqrt{3}+i)^{20}}{(1-i)^4}.$ 2. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині $\sqrt[3]{-8i}$. 3. Обчислити $\operatorname{Ln}(1+i)$. 4. Показати на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $z + 3 - i \leq 2$. 5. З'ясувати чи є функція аналітичною $w = z^2 + \bar{z}$.	Варіант № 10 1. Обчислити: а) в алгебраїчній формі; б) в тригонометричній формі: $\text{а) } (3-2i)i - i^{53} \frac{(-1+3i)^2}{-4+2i}, \text{ б) } \frac{(-1-i)^9}{(1+\sqrt{3}i)^{10}}.$ 2. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині $\sqrt[3]{27}$. 3. Обчислити $(-1)^{i+3}$. 4. Показати на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $z + 4 + 2i < z$. 5. З'ясувати чи є функція аналітичною $w = (z - i) \operatorname{Im} z$.

6. Відновити аналітичну функцію за відомою уявною частиною та її значенням в точці $v(x, y) = 2x - 3xy, \quad f(2i) = 1$.	6. Відновити аналітичну функцію за відомою дійсною частиною та її значенням в точці $u(x, y) = x^2 - y^2 - 3y, \quad f(-i) = 0$.
Варіант № 11 1. Обчислити: а) в алгебраїчній формі; б) в тригонометричній формі: а) $\frac{(2-5i)^2}{i^7} - \frac{8-7i}{1+2i}, \quad \text{б) } \frac{(1+\sqrt{3}i)^{12}}{(1-i)^4}$. 2. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині $\sqrt[4]{81}$. 3. Обчислити $\operatorname{Ln}(\sqrt{3}+i)$. 4. Показати на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $z-2i + \operatorname{Re} z \leq 1$. 5. З'ясувати чи є функція аналітичною $w = \bar{z} + \operatorname{Im}(z+i)$. 6. Відновити аналітичну функцію за відомою дійсною частиною та її значенням в точці $u(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + 2x, \quad f(i) = 2-i$.	Варіант № 12 1. Обчислити: а) в алгебраїчній формі; б) в тригонометричній формі: а) $i^{19}(1+3i)^2 - \frac{3+5i}{1-2i}, \quad \text{б) } (1+\sqrt{3}i)^4(\sqrt{3}-i)^8$. 2. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині $\sqrt[3]{-125i}$. 3. Обчислити $(1-i)^i$. 4. Показати на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $z+3-2i > 2$. 5. З'ясувати чи є функція аналітичною $w = z z ^2$. 6. Відновити аналітичну функцію за відомою дійсною частиною та її значенням в точці $u(x, y) = x^2 - 3y - 1, \quad f(i) = i$.
Варіант № 13 1. Обчислити: а) в алгебраїчній формі; б) в тригонометричній формі: а) $(1-3i)^2 - i^{37} \frac{5+2i}{-3+4i}, \quad \text{б) } \frac{(1+i)^{18}}{(1-\sqrt{3}i)^4}$. 2. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині $\sqrt[3]{8i}$. 3. Обчислити $\operatorname{Ln}(1+i)$. 4. Показати на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $z+i ^2 \leq 2 \operatorname{Re} z$. 5. З'ясувати чи є функція аналітичною $w = z^2 - \bar{z}$.	Варіант № 14 1. Обчислити: а) в алгебраїчній формі; б) в тригонометричній формі: а) $(3-5i)i - i^{41} \frac{(-1+i)^2}{-1+2i}, \quad \text{б) } \frac{(-1+i)^6}{(1+\sqrt{3}i)^{12}}$. 2. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині $\sqrt[3]{-8}$. 3. Обчислити $(-2)^i$. 4. Показати на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $z+i < 2z-4$. 5. З'ясувати чи є функція аналітичною $w = (z-2i) \operatorname{Re} z$.

6. Відновити аналітичну функцію за відомою уявною частиною та її значенням в точці $v(x, y) = 3x - xy, \quad f(i) = 1$.	6. Відновити аналітичну функцію за відомою уявною частиною та її значенням в точці $v(x, y) = x^2 - y^2 + 5, \quad f(-i) = 0$.
Варіант № 15 1. Обчислити: а) в алгебраїчній формі; б) в тригонометричній формі: а) $\frac{(2+3i)^2}{i^{17}} - \frac{4-7i}{8+i}, \text{ б) } \frac{(1+\sqrt{3}i)^{10}}{(1-i)^8}$. 2. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині $\sqrt[4]{-16}$. 3. Обчислити $\operatorname{Ln}(\sqrt{3}+i)$. 4. Показати на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $z-2i + \operatorname{Re} z \leq 1$. 5. З'ясувати чи є функція аналітичною $w = \bar{z} / \operatorname{Im}(z+i)$. 6. Відновити аналітичну функцію за відомою дійсною частиною та її значенням в точці $u(x, y) = x^2 - y^2 + 5x, \quad f(i) = 2-i$.	Варіант № 16 1. Обчислити: а) в алгебраїчній формі; б) в тригонометричній формі: а) $i^{19}(4+3i)^2 - \frac{1+5i}{1-2i}, \text{ б) } (1+\sqrt{3}i)^4(1-i)^8$. 2. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині $\sqrt[3]{125i}$. 3. Обчислити $(-i)^{2+i}$. 4. Показати на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $z+1-2i > \operatorname{Im} z$. 5. З'ясувати чи є функція аналітичною $w = z ^2 + 2\bar{z}$. 6. Відновити аналітичну функцію за відомою уявною частиною та її значенням в точці $v(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 1, \quad f(i) = i$.
Варіант № 17 1. Обчислити: а) в алгебраїчній формі; б) в тригонометричній формі: а) $(2-3i)^2 - i^{371} \frac{5+i}{-3+4i}, \text{ б) } \frac{(1+i)^{20}}{(1-\sqrt{3}i)^4}$. 2. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині $\sqrt[3]{-i}$. 3. Обчислити $\operatorname{Ln}(1-i)$. 4. Показати на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $z+i \leq 2$. 5. З'ясувати чи є функція аналітичною $w = z^2 \bar{z}$.	Варіант № 18 1. Обчислити: а) в алгебраїчній формі; б) в тригонометричній формі: а) $(3+5i)i - i^{431} \frac{(-1+i)^2}{-1+2i}, \text{ б) } \frac{(-1+i)^6}{(1+\sqrt{3}i)^{10}}$. 2. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині $\sqrt[3]{-i}$. $\sqrt[3]{-8}$. 3. Обчислити $(-2)^i$. 4. Показати на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $z+2i < z-4$.

6. Відновити аналітичну функцію за відомою уявною частиною та її значенням в точці $v(x, y) = 3x + 2xy, \quad f(i) = 2.$	5. З'ясувати чи є функція аналітичною $w = (z - i) \operatorname{Re} z$. 6. Відновити аналітичну функцію за відомою уявною частиною та її значенням в точці $v(x, y) = x^2 - y^2 - 1, \quad f(-1) = 0.$
Варіант № 19 1. Обчислити: а) в алгебраїчній формі; б) в тригонометричній формі: а) $\frac{(2 + 3i)^2}{i^{17}} - \frac{1 - 7i}{8 + 2i}$, б) $\frac{(1 + \sqrt{3}i)^{10}}{(1 - i)^5}$. 2. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині $\sqrt[4]{-16}$. 3. Обчислити $\operatorname{Ln}(\sqrt{3} - i)$. 4. Показати на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $z + i + \operatorname{Re} z \leq 1$. 5. З'ясувати чи є функція аналітичною $w = \bar{z} \operatorname{Im}(z + i)$. 6. Відновити аналітичну функцію за відомою дійсною частиною та її значенням в точці $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x, \quad f(i) = 2 - i.$	Варіант № 20 1. Обчислити: а) в алгебраїчній формі; б) в тригонометричній формі: а) $i^{179}(4 + 3i) - \frac{1 + 5i}{1 - 5i}$, б) $(1 + \sqrt{3}i)^4(1 - i)^8$. 2. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині $\sqrt[3]{125i}$. 3. Обчислити $(-i)^{2+i}$. 4. Показати на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $z + 1 - 2i > 1$. 5. З'ясувати чи є функція аналітичною $w = z ^2 \bar{z}$. 6. Відновити аналітичну функцію за відомою уявною частиною та її значенням в точці $v(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 1, \quad f(i) = i.$
Варіант № 21 1. Обчислити: а) в алгебраїчній формі; б) в тригонометричній формі: а) $(2 + 2i)^2 - i^{182} \frac{5 + i}{7 - i}$, б) $\frac{(1 - i)^{10}}{(-1 + \sqrt{3}i)^4}$. 2. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині $\sqrt[4]{16}$. 3. Обчислити $\operatorname{Ln}(1 - \sqrt{3}i)$. 4. Показати на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $z + 2 - i \leq 3$. 5. З'ясувати чи є функція аналітичною $w = \bar{z}^2$.	Варіант № 22 1. Обчислити: а) в алгебраїчній формі; б) в тригонометричній формі: а) $(4 + i)i^{23} - \frac{(-2 + i)^2}{1 + 2i}$, б) $\frac{(1 + i)^4}{(1 - \sqrt{3}i)^{15}}$. 2. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині $\sqrt[3]{27i}$. 3. Обчислити $(-1)^{1+2i}$. 4. Показати на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $z + 3 - 2i < z$.

6. Відновити аналітичну функцію за відомою уявною частиною та її значенням в точці $v(x, y) = x + 2xy, \quad f(1) = 2i$.	5. З'ясувати чи є функція аналітичною $w = (z - i) \operatorname{Im} z$. 6. Відновити аналітичну функцію за відомою уявною частиною та її значенням в точці $v(x, y) = 2x^2 - 2y^2 - 1, \quad f(-i) = 0$.
Варіант № 23 1. Обчислити: а) в алгебраїчній формі; б) в тригонометричній формі: а) $\frac{(1+3i)^2}{i^{29}} - \frac{1-i}{3+2i},$ б) $\frac{(1+\sqrt{3}i)^{12}}{(1-i)^8}$. 2. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині $\sqrt[3]{64}$. 3. Обчислити $\operatorname{Ln}(\sqrt{3} + i)$. 4. Показати на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $z + \operatorname{Re}(z+1) \leq 1$. 5. З'ясувати чи є функція аналітичною $w = (z+1) \operatorname{Im} z$. 6. Відновити аналітичну функцію за відомою дійсною частиною та її значенням в точці $u(x, y) = x^2 - y^2 + x, \quad f(1) = 2 - i$.	Варіант № 24 1. Обчислити: а) в алгебраїчній формі; б) в тригонометричній формі: а) $i^{79}(2+5i) - \frac{1+3i}{1-3i},$ б) $(1-\sqrt{3}i)^6(1+i)^{10}$. 2. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині $\sqrt[3]{25i}$. 3. Обчислити $(i)^{3-i}$. 4. Показати на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $z-1+3i > 2$. 5. З'ясувати чи є функція аналітичною $w = z ^2 + \bar{z}$. 6. Відновити аналітичну функцію за відомою уявною частиною та її значенням в точці. $v(x, y) = x^2 - y^2 - y, \quad f(2i) = i$.
Варіант № 25 1. Обчислити: а) в алгебраїчній формі; б) в тригонометричній формі: а) $(2-i)^2 - i^{37} \frac{-5+2i}{1+3i},$ б) $\frac{(\sqrt{3}+i)^{20}}{(1-i)^4}$. 2. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині $\sqrt[3]{-8i}$. 3. Обчислити $\operatorname{Ln}(1+i)$. 4. Показати на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $z+3-i \leq 2$.	Варіант № 26 1. Обчислити: а) в алгебраїчній формі; б) в тригонометричній формі: а) $(3-2i)i - i^{53} \frac{(-1+3i)^2}{-4+2i},$ б) $\frac{(-1-i)^9}{(1+\sqrt{3}i)^{10}}$. 2. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині $\sqrt[3]{27}$. 3. Обчислити $(-1)^{i+3}$. 4. Показати на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $z+4+2i < z$.

5. З'ясувати чи є функція аналітичною $w = z^2 + \bar{z}$. 6. Відновити аналітичну функцію за відомою уявною частиною та її значенням в точці $v(x, y) = 2x - 3xy, \quad f(2i) = 1$.	5. З'ясувати чи є функція аналітичною $w = (z - i) \operatorname{Im} z$. 6. Відновити аналітичну функцію за відомою дійсною частиною та її значенням в точці $u(x, y) = x^2 - y^2 - 3y, \quad f(-i) = 0$.
Варіант № 27 1. Обчислити: а) в алгебраїчній формі; б) в тригонометричній формі: а) $\frac{(2 - 5i)^2}{i^7} - \frac{8 - 7i}{1 + 2i},$ б) $\frac{(1 + \sqrt{3}i)^{12}}{(1 - i)^4}$. 2. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині $\sqrt[4]{81}$. 3. Обчислити $\operatorname{Ln}(\sqrt{3} + i)$. 4. Показати на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $z - 2i + \operatorname{Re} z \leq 1$. 5. З'ясувати чи є функція аналітичною $w = \bar{z} + \operatorname{Im}(z + i)$. 6. Відновити аналітичну функцію за відомою дійсною частиною та її значенням в точці $u(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + 2x, \quad f(i) = 2 - i$.	Варіант № 28 1. Обчислити: а) в алгебраїчній формі; б) в тригонометричній формі: а) $i^{19}(1 + 3i)^2 - \frac{3 + 5i}{1 - 2i},$ б) $(1 + \sqrt{3}i)^4(\sqrt{3} - i)^8$. 2. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині $\sqrt[3]{-125i}$. 3. Обчислити $(1 - i)^i$. 4. Показати на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $z + 3 - 2i > 2$. 5. З'ясувати чи є функція аналітичною $w = z z ^2$. 6. Відновити аналітичну функцію за відомою дійсною частиною та її значенням в точці $u(x, y) = x^2 - 3y - 1, \quad f(i) = i$.
Варіант № 29 1. Обчислити: а) в алгебраїчній формі; б) в тригонометричній формі: а) $(1 - 3i)^2 - i^{37} \frac{5 + 2i}{-3 + 4i},$ б) $\frac{(1 + i)^{18}}{(1 - \sqrt{3}i)^4}$. 2. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині $\sqrt[3]{8i}$. 3. Обчислити $\operatorname{Ln}(1 + i)$. 4. Показати на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $z + i ^2 \leq 2 \operatorname{Re} z$.	Варіант № 30 1. Обчислити: а) в алгебраїчній формі; б) в тригонометричній формі: а) $(3 - 5i)i - i^{41} \frac{(-1 + i)^2}{-1 + 2i},$ б) $\frac{(-1 + i)^6}{(1 + \sqrt{3}i)^{12}}$. 2. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині $\sqrt[3]{-8}$. 3. Обчислити $(-2)^i$. 4. Показати на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $z + i < 2z - 4$.

5. З'ясувати чи є функція аналітичною $w = z^2 - \bar{z}$. 6. Відновити аналітичну функцію за відомою уявною частиною та її значенням в точці $v(x, y) = 3x - xy, \quad f(i) = 1$.	5. З'ясувати чи є функція аналітичною $w = (z - 2i) \operatorname{Re} z$. 6. Відновити аналітичну функцію за відомою уявною частиною та її значенням в точці $v(x, y) = x^2 - y^2 + 5, \quad f(-i) = 0$.
--	--

Завдання 2

Варіант 1	Варіант 2
1. Обчислити інтеграли вздовж лінії C 1) $\int_{\tilde{N}} z \operatorname{Re} z dz, \quad 2) \int_C (iz + 2) dz$, де C – а) відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = 0, \quad z_2 = 2 + i$; б) ломана, що з'єднує ці точки з відрізками паралельними спочатку осі оу, а потім осі ох. 2. Обчислити інтеграли по замкнутому контуру C $z - 2i = 3$: а) $\oint_C \frac{e^z}{z - i} dz$; б) $\oint_C \frac{\cos z}{z + 4} dz$. 3. Знайти особливі точки функції і з'ясувати їх характер $f(z) = \frac{z^2 + 3}{(z - 1)(z - 2)^2}$ 4. Знайти лишки у всіх особливих точках $f(z) = \frac{\sin(z) - z}{z^4}$ 5. Знайти $F(p)$, якщо $f(t) = \frac{3}{7} e^{-2t} \cos 3t + 5 \operatorname{sh} 4(t - 2) \cdot \eta(t - 2) - 2t + \frac{2}{9} e^{-2(t-4)} \cdot \sin(t - 4) \cdot \eta(t - 4).$ 6. Знайти $f(t)$, якщо $F(p) = \frac{2p - 3}{(p^2 - 1)(p + 4)} + \frac{3p}{p^2 - 4p + 20} - \frac{4p^2}{p^2 - 4} + 5.$	1. Обчислити інтеграли вздовж лінії C 1) $\int_{\tilde{N}} \bar{z} dz, \quad 2) \int_C (3z + 2i) dz$, де C – а) відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = 0, \quad z_2 = 3 + i$; б) ломана, що з'єднує ці точки з відрізками паралельними спочатку осі оу, а потім осі ох. 2. Обчислити інтеграли по замкнутому контуру C. $z - 2 = 2,5$: а) $\oint_C \frac{e^z}{z - i} dz$; б) $\oint_C \frac{\cos z}{z} dz$. 3. Знайти особливі точки функції і з'ясувати їх характер $f(z) = \frac{z + 1}{\sin^2(z)}$ 4. Знайти лишки у всіх особливих точках $f(z) = \frac{z^2 + 2iz + 3}{(z^2 + 1)(z + 3i)^2}$ Знайти $F(p)$, якщо $f(t) = 3te^{2t} + 2e^{-5(t-1)} \sin 3(t - 1) \cdot \eta(t - 1) - 2ch(t - 2) \cdot \eta(t - 2).$ Знайти $f(t)$, якщо $F(p) = \frac{3p - 1}{p(p^2 - 4)} + \frac{p + 4}{p^2 - 6p + 8} + \frac{p + 3}{p - 6} + \frac{2}{(p + 3)^2}.$

Варіант 3 1. Обчислити інтеграли вздовж лінії C 1) $\int_{\bar{N}} (z + \operatorname{Re} z) dz$, 2) $\int_C (1 - iz) dz$, де C – а) відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = -i$, $z_2 = 2 + 3i$; б) ломана, що з'єднує ці точки з відрізками паралельними спочатку осі оу, а потім осі ох. 2. Обчислити інтеграли по замкнутому контуру C $z + 2i = 3/2$: а) $\oint_C \frac{e^z}{z-i} dz$; б) $\oint_C \frac{z}{z^2 + 9} dz$. 3. Знайти особливі точки функції і з'ясувати їх характер $f(z) = \frac{z^2 - 4iz - 3}{(z^2 + 1)(z - 3i)}$ 4. Знайти лишки у всіх особливих точках $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)^3(z-2)}$ 5. Знайти $F(p)$, якщо $f(t) = 5t^2 e^{3t} + \cos 4(t-2) \cdot \eta(t-2) - 8e^{-2(t-3)} \cdot \operatorname{sh} 5(t-3) \cdot \eta(t-3).$ 6. Знайти $f(t)$, якщо $F(p) = \frac{p+3}{(p-1)(p-2)(p+4)} + \frac{p+2}{p^2 - 2p + 5} + \frac{p^2 - 3}{p^2 + 4} - \frac{3}{(p+2)^2}.$	Варіант 4 1. Обчислити інтеграли вздовж лінії C 1) $\int_{\bar{N}} z \operatorname{Im} z dz$, 2) $\int_C (iz - 4) dz$, де C – а) відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = 0$, $z_2 = 2 - 4i$; б) ломана, що з'єднує ці точки з відрізками паралельними спочатку осі оу, а потім осі ох. 2. Обчислити інтеграли по замкнутому контуру C. $z - i = 1$: а) $\oint_C \frac{2}{z^2 + 1} dz$; б) $\oint_C \frac{\sin z}{z + 2} dz$. 3. Знайти особливі точки функції і з'ясувати їх характер $f(z) = \frac{z^2 - 3iz - 2}{(z^2 + 4)(z - i)^2}$ 4. Знайти лишки у всіх особливих точках $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^3(z + 1)}$ 5. Знайти $F(p)$, якщо $f(t) = te^{2t} + 5\operatorname{sh} 3(t-4) \cdot \eta(t-4) + 2e^{-2\left(t-\frac{\pi}{6}\right)} \cos 3\left(t - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \eta\left(t - \frac{\pi}{6}\right).$ 6. Знайти $f(t)$, якщо $F(p) = \frac{2p^2 + 1}{p(p-1)(p+2)} - \frac{3}{(p-2)^2} + \frac{p^2 + 1}{p^2 - 4} - \frac{p+5}{p^2 + 4p + 29}.$
Варіант 5 1. Обчислити інтеграли вздовж лінії C 1) $\int_{\bar{N}} (2z - \operatorname{Re} z) dz$, 2) $\int_C (iz + 1) dz$, де C – а) відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = 0$, $z_2 = 2 + 6i$; б) ломана, що з'єднує ці точки з відрізками паралельними спочатку осі оу, а потім осі ох.	Варіант 7 1. Обчислити інтеграли вздовж лінії C 1) $\int_{\bar{N}} (\bar{z} - 2z) dz$, 2) $\int_C (z - 3i) dz$, де C – а) відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = 0$, $z_2 = 3 - 6i$; б) ломана, що з'єднує ці точки з відрізками паралельними спочатку осі оу, а потім осі ох.

2. Обчислити інтеграли по замкнутому контуру C $z =3$: а) $\oint_C \frac{z^2}{z-2i} dz$; б) $\oint_C \frac{\cos z}{z+4} dz$. 3. Знайти особливі точки функції і з'ясувати їх характер $f(z) = \frac{e^{z-i} - 1}{z-i}$ 4. Знайти лишки у всіх особливих точках $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)^3(z-2)}$ 5. Знайти $F(p)$, якщо $f(t) = t^2 e^{-3t} + \sin 2(t-3) \cdot \eta(t-3) - e^{4(t-1)} \cos 2(t-1) \cdot \eta(t-1).$ 6. Знайти $f(t)$, якщо $F(p) = \frac{p^2+2}{(p^2-1)(p+2)} - \frac{p+4}{p^2-6p+10} + \frac{p^2-3}{p^2-1} + \frac{5}{p-4}.$	2. Обчислити інтеграли по замкнутому контуру C $z =2$: а) $\oint_C \frac{e^z}{z-3i} dz$; б) $\oint_C \frac{\cos z}{z} dz$. 3. Знайти особливі точки функції і з'ясувати їх характер $f(z) = \frac{\sin(z)(1-\cos(z))}{z^3}$ 4. Знайти лишки у всіх особливих точках $f(z) = \frac{z^2 - 3iz - 2}{(z^2+4)(z-i)^2}$ 5. Знайти $F(p)$, якщо $f(t) = 3\delta(t) - 2\sin 2(t-1) \cdot \eta(t-1) + e^{2(t-3)} \operatorname{sh} 4(t-3) \cdot \eta(t-3).$ 6. Знайти $f(t)$, якщо $F(p) = \frac{p+4}{p(p-2)(p+3)} + \frac{p^2-1}{p^2-9} + \frac{2p-1}{p^2-4p+3}.$
Варіант 6 2. Обчислити інтеграли вздовж лінії C 1) $\int_{\tilde{N}} (z + \operatorname{Im} z) dz$, 2) $\int_C (iz - 1) dz$, де C – а) відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = -2$, $z_2 = 2 - 4i$; б) ломана, що з'єднує ці точки з відрізками паралельними спочатку осі ou, а потім осі ox. 2. Обчислити інтеграли по замкнутому контуру C $z-2i =1$: а) $\oint_C \frac{2z}{z^2+1} dz$; б) $\oint_C \frac{\sin z}{(z+2)(z-3)} dz$. 3. Знайти особливі точки функції і з'ясувати їх характер $f(z) = z \cdot \sin \frac{1}{z-2}$	Варіант 8 1. Обчислити інтеграли вздовж лінії C 1) $\int_{\tilde{N}} (z - \operatorname{Re} z) dz$, 2) $\int_C (1+2iz) dz$, де C – а) відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = -i$, $z_2 = 2 - 3i$; б) ломана, що з'єднує ці точки з відрізками паралельними спочатку осі ou, а потім осі ox. 2. Обчислити інтеграли по замкнутому контуру C $z =3/2$: а) $\oint_C \frac{e^z}{z-i} dz$; б) $\oint_C \frac{z}{z^2+9} dz$. 3. Знайти особливі точки функції і з'ясувати їх характер $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z+2}}$. 4. Знайти лишки у всіх особливих точках $f(z) = \frac{z^2+3}{(z-1)(z-2)^2}$

4. Знайти лишки у всіх особливих точках $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z-2}}}{z-2}$ 5. Знайти $F(p)$, якщо $f(t) = 3\sin^2 2t + te^{3t} - 5\operatorname{ch} 3(t-2) \cdot \eta(t-2) + 3e^{-\left(t-\frac{\pi}{6}\right)} \cos 5\left(t-\frac{\pi}{6}\right) \cdot \eta\left(t-\frac{\pi}{6}\right)$. 6. Знайти $f(t)$, якщо $F(p) = \frac{2p^2 - 1}{(p+3)(p-1)(p+2)} - \frac{p+2}{p-5} + \frac{2p+5}{p^2 - 4p - 21}$.	5. Знайти $F(p)$, якщо $f(t) = e^{2t} \cos 3t + 5t - 4 - 2\operatorname{sh} 4(t-1) \cdot \eta(t-1) - e^{2\left(t-\frac{\pi}{4}\right)} \sin 3\left(t-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \eta\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$. 6. Знайти $f(t)$, якщо $F(p) = \frac{p^2 + 1}{(p-1)(p+2)(p+3)} - \frac{p^2 + 5}{p^2 + 16} - \frac{2p-1}{p^2 - 4p - 13} - \frac{7}{p-3}$.
Варіант 9 1. Обчислити інтеграли вздовж лінії C 1) $\int_{\tilde{N}} \operatorname{Re} z dz$, 2) $\int_C (iz - 2) dz$, де C – а) відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = -3i$, $z_2 = 2 + i$; б) ломана, що з'єднує ці точки з відрізками паралельними спочатку осі ou, а потім осі ox. 2. Обчислити інтеграли по замкнутому контуру C $z - i = 5$: а) $\oint_C \frac{e^z}{z-2} dz$; б) $\oint_C \frac{\cos z}{z-6} dz$. 3. Знайти особливі точки функції і з'ясувати їх характер $f(z) = \frac{\sin(z) - z}{z^4}$ 4. Знайти лишки у всіх особливих точках $f(z) = \frac{z+1}{(z-3)^3(z-2)}$ 5. Знайти $F(p)$, якщо $f(t) = e^{-4t} \operatorname{sh} 3t + 5 \cos 2t + e^{-(t-2)} \sin 4(t-2) \cdot \eta(t-2)$.	Варіант 11 1. Обчислити інтеграли вздовж лінії C 1) $\int_{\tilde{N}} (z - \operatorname{Im} z) dz$, 2) $\int_C (iz + 3) dz$, де C – а) відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = 2i$, $z_2 = 2 - 4i$; б) ломана, що з'єднує ці точки з відрізками паралельними спочатку осі ou, а потім осі ox. 2. Обчислити інтеграли по замкнутому контуру C $z = 1$: а) $\oint_C \frac{2}{z^2 + 4} dz$; б) $\oint_C \frac{z^3 + 5}{z} dz$. 3. Знайти особливі точки функції і з'ясувати їх характер $f(z) = \frac{z^2 + 2iz + 3}{(z^2 + 1)(z + 3i)^2}$ 4. Знайти лишки у всіх особливих точках $f(z) = \frac{z(z^2 - 1)}{1 - \cos(2\pi z)}$ 5. Знайти $F(p)$, якщо $f(t) = 2te^{-3t} + 5 \cos 3(t-4) \cdot \eta(t-4) + 2e^{3\left(t-\frac{\pi}{3}\right)} \cos 2\left(t-\frac{\pi}{3}\right) \cdot \eta\left(t-\frac{\pi}{3}\right)$.

6. Знайти $f(t)$, якщо $F(p) = \frac{p^2 + 3}{(p-2)(p+2)(p-1)} + \frac{p+1}{p+3} + \frac{3p-1}{p^2 + 4p + 3} + \frac{3}{p+5}.$	6. Знайти $f(t)$, якщо $F(p) = \frac{7p^2 - 2}{p^2 + 4} - \frac{2p+3}{(p^2 - 1)(p-3)} + \frac{3p-6}{p^2 - 10p + 29} + 2.$
Варіант 10 1. Обчислити інтеграли вздовж лінії C 1) $\int_{\tilde{N}} (\bar{z} - \operatorname{Im} z) dz$, 2) $\int_C (3z - 2i) dz$, де C – а) відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = -2i$, $z_2 = 3 + i$; б) ломана, що з'єднує ці точки з відрізками паралельними спочатку осі ou, а потім осі ox. 2. Обчислити інтеграли по замкнутому контуру C $z - 2 = 2$: а) $\oint_C \frac{e^z}{z} dz$; б) $\oint_C \frac{\cos z}{z + 2} dz$. 3. Знайти особливі точки функції і з'ясувати їх характер $f(z) = \frac{1 - \cos(\pi z)}{(z-1)^3(z-2)^2}$ 4. Знайти лишки у всіх особливих точках $f(z) = \frac{z^2 + 3}{(z-1)(z+2)^2}$ 5. Знайти $F(p)$, якщо $f(t) = 2t^2 e^{-t} + 5 \operatorname{ch} 4(t-2) \cdot \eta(t-2) - \frac{1}{2} e^{5(t-1)} \sin 2(t-1) \cdot \eta(t-1).$ 6. Знайти $f(t)$, якщо $F(p) = \frac{2p+6}{p^2 - 8p + 17} - \frac{3p-5}{(p^2 - 4)(p-3)} - \frac{4p^2 - 1}{p^2 - 9} - 7.$	Варіант 12 1. Обчислити інтеграли вздовж лінії C 1) $\int_{\tilde{N}} (\bar{z} + \operatorname{Re} z) dz$, 2) $\int_C (2 - iz) dz$, де C – а) відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = -i$, $z_2 = 2 + 3i$; б) ломана, що з'єднує ці точки з відрізками паралельними спочатку осі ou, а потім осі ox. 2. Обчислити інтеграли по замкнутому контуру C $z + 2i = 3$: а) $\oint_C \frac{e^z}{z - 2i} dz$; б) $\oint_C \frac{z}{z^2 + 9} dz$. 3. Знайти особливі точки функції і з'ясувати їх характер $f(z) = \frac{e^{z^2} - 1}{z^5}$ 4. Знайти лишки у всіх особливих точках $f(z) = \frac{z^2 - 4iz - 3}{(z^2 + 1)(z - 3i)}$ 5. Знайти $F(p)$, якщо $f(t) = 5 \cos^2 2t - 4te^{2t} - \frac{2}{9} \operatorname{ch} 2(t-3) \cdot \eta(t-3) + 5\delta(t).$ 6. Знайти $f(t)$, якщо $F(p) = \frac{p+6}{p^2 - 2p + 10} + \frac{4p-1}{(p^2 - 4)(p-3)} - \frac{2p^2}{p^2 - 1} + \frac{4}{(p+3)^2}.$

Варіант 13 1. Обчислити інтеграли вздовж лінії C 1) $\int_{\tilde{N}} z \operatorname{Re} z dz$, 2) $\int_C (iz + 2) dz$, де C – а) відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = 0$, $z_2 = 2 + i$; б) ломана, що з'єднує ці точки з відрізками паралельними спочатку осі ou, а потім осі ox. 2. Обчислити інтеграли по замкнутому контуру C $z - 2i = 3$: а) $\oint_C \frac{e^z}{z - i} dz$; б) $\oint_C \frac{\cos z}{z + 4} dz$. 3. Знайти особливі точки функції і з'ясувати їх характер . $f(z) = \frac{z^2 + 3}{(z^2 + 1)(z - 2)^2}$ 4. Знайти лишки у всіх особливих точках $f(z) = z \cdot \sin \frac{1}{z - 2}$ 5. Знайти $F(p)$, якщо $f(t) = \frac{1}{2} \sin 4(t - 3) \cdot \eta(t - 3) + 5e^{3t} \cos 2t - 3t^3 + 4e^{2(t-1)} \operatorname{sh} 3(t - 1) \cdot \eta(t - 1).$ 6. Знайти $f(t)$, якщо $F(p) = \frac{2p + 2}{p^2 - 6p + 10} - \frac{5p - 1}{(p^2 - 9)(p + 2)} - \frac{5p^2}{p^2 - 1} + \frac{7}{(p - 2)^2}.$	Варіант 15 1. Обчислити інтеграли вздовж лінії C 1) $\int_{\tilde{N}} \bar{z} dz$, 2) $\int_C (3z + 2i) dz$, де C – а) відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = 0$, $z_2 = 3 + i$; б) ломана, що з'єднує ці точки з відрізками паралельними спочатку осі ou, а потім осі ox. 2. Обчислити інтеграли по замкнутому контуру C $z - 2 = 2,5$: а) $\oint_C \frac{e^z}{z - i} dz$; б) $\oint_C \frac{\cos z}{z} dz$. 3. Знайти особливі точки функції і з'ясувати їх характер $f(z) = \cos \frac{1}{z + i}$ 4. Знайти лишки у всіх особливих точках $f(z) = \frac{z^2 + 3}{(z - 1)(z + 2i)^2}$ 5. Знайти $F(p)$, якщо $f(t) = 5 \sin^2 3t - 6te^{-3t} - 3 + \frac{5}{6} \operatorname{ch} 2(t - 3) \cdot \eta(t - 3).$ 6. Знайти $f(t)$, якщо $F(p) = \frac{p - 2}{(p + 1)(p - 1)(p + 3)} + \frac{p^2 - 3}{p^2 + 4} + \frac{p - 1}{p^2 + 4p + 8} + \frac{7}{p - 3}.$
Варіант 14 1. Обчислити інтеграли вздовж лінії C 1) $\int_{\tilde{N}} (z + \operatorname{Re} z) dz$, 2) $\int_C (1 - iz) dz$, де C – а) відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = -i$, $z_2 = 2 + 3i$; б) ломана, що з'єднує ці точки з відрізками паралельними спочатку осі ou, а потім осі ox.	Варіант 16 1. Обчислити інтеграли вздовж лінії C 1) $\int_{\tilde{N}} z \operatorname{Im} z dz$, 2) $\int_C (iz - 4) dz$, де C – а) відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = 0$, $z_2 = 2 - 4i$; б) ломана, що з'єднує ці точки з відрізками паралельними спочатку осі ou, а потім осі ox.

2. Обчислити інтеграли по замкнутому контуру C. $z + 2i = 3/2$: а) $\oint_C \frac{e^z}{z-i} dz$; б) $\oint_C \frac{z}{z^2+9} dz$. 3. Знайти особливі точки функції і з'ясувати їх характер $f(z) = \frac{e^{z-2i} - 1}{z - 2i}$ 4. Знайти лишки у всіх особливих точках $f(z) = \frac{z^2 - 3iz - 2}{(z^2 + 4)(z - i)^2}$ 5. Знайти $F(p)$, якщо $f(t) = 3t^2 e^{-2t} + 4\delta(t) - \frac{3}{7} \operatorname{sh} 3(t-2) \cdot \eta(t-2) + \sin^2 t$ 6. Знайти $f(t)$, якщо $F(p) = \frac{p-1}{p^2+4p+20} + \frac{3p^2-6}{p^2+9} + \frac{3p-1}{(p-2)(p^2-9)}$	2. Обчислити інтеграли по замкнутому контуру C $z - i = 1$: а) $\oint_C \frac{2}{z^2+1} dz$; б) $\oint_C \frac{\sin z}{z+2} dz$. 3. Знайти особливі точки функції і з'ясувати їх характер $f(z) = \frac{z(z^2-1)}{1-\cos(2\pi z)}$ 4. Знайти лишки у всіх особливих точках $f(z) = \frac{z^2+3}{(z+i)(z-2)^2}$ 5. Знайти $F(p)$, якщо. $f(t) = 4\sin^2 2t - 3te^{-3t} - \cos 2(t-3) \cdot \eta(t-3) + 1.$ 6. Знайти $f(t)$, якщо $F(p) = \frac{p^2+2}{p^2+9} + \frac{p}{p^2-6p+13} - \frac{p-1}{p^3-4p} - \frac{e^{3p}}{p+2}$
Варіант 17 1. Обчислити інтеграли вздовж лінії C 1) $\int_{\tilde{N}} z \operatorname{Re} z dz$, 2) $\int_C (iz+2) dz$, де C – а) відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = 0$, $z_2 = 2+i$; б) ломана, що з'єднує ці точки з відрізками паралельними спочатку осі ou, а потім осі ox. 2. Обчислити інтеграли по замкнутому контуру C $z - 2i = 3$: а) $\oint_C \frac{e^z}{z-i} dz$; б) $\oint_C \frac{\cos z}{z+4} dz$. 3. Знайти особливі точки функції і з'ясувати їх характер $f(z) = \frac{z^2+3}{(z-1)(z-2)^2}$	Варіант 18 1. Обчислити інтеграли вздовж лінії C 1) $\int_{\tilde{N}} \bar{z} dz$, 2) $\int_C (3z+2i) dz$, де C – а) відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = 0$, $z_2 = 3+i$; б) ломана, що з'єднує ці точки з відрізками паралельними спочатку осі ou, а потім осі ox. 2. Обчислити інтеграли по замкнутому контуру C. $z - 2 = 2,5$: а) $\oint_C \frac{e^z}{z-i} dz$; б) $\oint_C \frac{\cos z}{z} dz$. 3. Знайти особливі точки функції і з'ясувати їх характер $f(z) = \frac{z+1}{\sin^2(z)}$

4. Знайти лишки у всіх особливих точках $f(z) = \frac{\sin(z) - z}{z^4}$ 5. Знайти $F(p)$, якщо $f(t) = \frac{3}{7} e^{-2t} \cos 3t + 5 \operatorname{sh} 4(t-2) \cdot \eta(t-2) - 2t + \frac{2}{9} e^{-2(t-4)} \cdot \sin(t-4) \cdot \eta(t-4),$ 6. Знайти $f(t)$, якщо $F(p) = \frac{2p-3}{(p^2-1)(p+4)} + \frac{3p}{p^2-4p+20} - \frac{4p^2}{p^2-4} + 5.$	4. Знайти лишки у всіх особливих точках $f(z) = \frac{z^2 + 2iz + 3}{(z^2 + 1)(z + 3i)^2}$ 5. Знайти $F(p)$, якщо $f(t) = 3te^{2t} + 2e^{-5(t-1)} \sin 3(t-1) \cdot \eta(t-1) - 2ch(t-2) \cdot \eta(t-2).$ 6. Знайти $f(t)$, якщо $F(p) = \frac{3p-1}{p(p^2-4)} + \frac{p+4}{p^2-6p+8} + \frac{p+3}{p-6} + \frac{2}{(p+3)^2}.$
Варіант 19 1. Обчислити інтеграли вздовж лінії C 1) $\int_{\bar{N}} (z + \operatorname{Re} z) dz$, 2) $\int_C (1 - iz) dz$, де C – а) відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = -i$, $z_2 = 2 + 3i$; б) ломана, що з'єднує ці точки з відрізками паралельними спочатку осі оу, а потім осі ох. 2. Обчислити інтеграли по замкнутому контуру C $z + 2i = 3/2$: а) $\oint_C \frac{e^z}{z-i} dz$; б) $\oint_C \frac{z}{z^2+9} dz$. 3. Знайти особливі точки функції і з'ясувати їх характер $f(z) = \frac{z^2 - 4iz - 3}{(z^2 + 1)(z - 3i)}$ 4. Знайти лишки у всіх особливих точках $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)^3(z-2)}$ 5. Знайти $F(p)$, якщо $f(t) = 5t^2 e^{3t} + \cos 4(t-2) \cdot \eta(t-2) - 8e^{-2(t-3)} \cdot \operatorname{sh} 5(t-3) \cdot \eta(t-3).$	Варіант 20 1. Обчислити інтеграли вздовж лінії C 1) $\int_{\bar{N}} z \operatorname{Im} z dz$, 2) $\int_C (iz - 4) dz$, де C – а) відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = 0$, $z_2 = 2 - 4i$; б) ломана, що з'єднує ці точки з відрізками паралельними спочатку осі оу, а потім осі ох. 2. Обчислити інтеграли по замкнутому контуру C. $z - i = 1$: а) $\oint_C \frac{2}{z^2+1} dz$; б) $\oint_C \frac{\sin z}{z+2} dz$. 3. Знайти особливі точки функції і з'ясувати їх характер $f(z) = \frac{z^2 - 3iz - 2}{(z^2 + 4)(z - i)^2}$ 4. Знайти лишки у всіх особливих точках $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^3(z+1)}$ 5. Знайти $F(p)$, якщо $f(t) = te^{2t} + 5 \operatorname{sh} 3(t-4) \cdot \eta(t-4) + 2e^{-2\left(t-\frac{\pi}{6}\right)} \cos 3\left(t - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \eta\left(t - \frac{\pi}{6}\right).$

6. Знайти $f(t)$, якщо $F(p) = \frac{p+3}{(p-1)(p-2)(p+4)} + \frac{p+2}{p^2-2p+5} + \frac{p^2-3}{p^2+4} - \frac{3}{(p+2)^2}.$	6. Знайти $f(t)$, якщо $F(p) = \frac{2p^2+1}{p(p-1)(p+2)} - \frac{3}{(p-2)^2} + \frac{p^2+1}{p^2-4} - \frac{p+5}{p^2+4p+29}.$
Варіант 21 1. Обчислити інтеграли вздовж лінії C 1) $\int_{\tilde{N}} (2z - \operatorname{Re} z) dz$, 2) $\int_C (iz + 1) dz$, де C – а) відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = 0$, $z_2 = 2 + 6i$; б) ломана, що з'єднує ці точки з відрізками паралельними спочатку осі ou, а потім осі ox. 2. Обчислити інтеграли по замкнутому контуру C $z = 3$: а) $\oint_C \frac{z^2}{z-2i} dz$; б) $\oint_C \frac{\cos z}{z+4} dz$. 3. Знайти особливі точки функції і з'ясувати їх характер $f(z) = \frac{e^{z-i} - 1}{z-i}$ 4. Знайти лишки у всіх особливих точках $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)^3(z-2)}$ 5. Знайти $F(p)$, якщо $f(t) = t^2 e^{-3t} + \sin 2(t-3) \cdot \eta(t-3) - e^{4(t-1)} \cos 2(t-1) \cdot \eta(t-1).$ 6. Знайти $f(t)$, якщо $F(p) = \frac{p^2+2}{(p^2-1)(p+2)} - \frac{p+4}{p^2-6p+10} + \frac{p^2-3}{p^2-1} + \frac{5}{p-4}.$	Варіант 22 1. Обчислити інтеграли вздовж лінії C 1) $\int_{\tilde{N}} (\bar{z} - 2z) dz$, 2) $\int_C (z - 3i) dz$, де C – а) відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = 0$, $z_2 = 3 - 6i$; б) ломана, що з'єднує ці точки з відрізками паралельними спочатку осі ou, а потім осі ox. 2. Обчислити інтеграли по замкнутому контуру C $z = 2$: а) $\oint_C \frac{e^z}{z-3i} dz$; б) $\oint_C \frac{\cos z}{z} dz$. 3. Знайти особливі точки функції і з'ясувати їх характер $f(z) = \frac{\sin(z)(1 - \cos(z))}{z^3}$ 4. Знайти лишки у всіх особливих точках $f(z) = \frac{z^2 - 3iz - 2}{(z^2 + 4)(z-i)^2}$ 5. Знайти $F(p)$, якщо $f(t) = 3\delta(t) - 2\sin 2(t-1) \cdot \eta(t-1) + e^{2(t-3)} \operatorname{sh} 4(t-3) \cdot \eta(t-3).$ 6. Знайти $f(t)$, якщо $F(p) = \frac{p+4}{p(p-2)(p+3)} + \frac{p^2-1}{p^2-9} + \frac{2p-1}{p^2-4p+3}.$
Варіант 23 2. Обчислити інтеграли вздовж лінії C 1) $\int_{\tilde{N}} (z + \operatorname{Im} z) dz$, 2) $\int_C (iz - 1) dz$, де C –	Варіант 24 1. Обчислити інтеграли вздовж лінії C

а) відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = -2$, $z_2 = 2 - 4i$; б) ломана, що з'єднує ці точки з відрізками паралельними спочатку осі ou, а потім осі $ох$. 2. Обчислити інтеграли по замкнутому контуру C $z - 2i = 1$: а) $\oint_C \frac{2z}{z^2 + 1} dz$; б) $\oint_C \frac{\sin z}{(z + 2)(z - 3)} dz$. 3. Знайти особливі точки функції і з'ясувати їх характер $f(z) = z \cdot \sin \frac{1}{z - 2}$ 4. Знайти лишки у всіх особливих точках $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z-2}}}{z - 2}$ 5. Знайти $F(p)$, якщо $f(t) = 3 \sin^2 2t + te^{3t} - 5ch3(t - 2) \cdot \eta(t - 2) + 3e^{-\left(t - \frac{\pi}{6}\right)} \cos 5\left(t - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \eta\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$. 6. Знайти $f(t)$, якщо $F(p) = \frac{2p^2 - 1}{(p + 3)(p - 1)(p + 2)} - \frac{p + 2}{p - 5} + \frac{2p + 5}{p^2 - 4p - 21}$.	1) $\int_{\tilde{N}} (z - \operatorname{Re} z) dz$, 2) $\int_C (1 + 2iz) dz$, де C – а) відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = -i$, $z_2 = 2 - 3i$; б) ломана, що з'єднує ці точки з відрізками паралельними спочатку осі ou, а потім осі $ох$. 2. Обчислити інтеграли по замкнутому контуру C $z = 3/2$: а) $\oint_C \frac{e^z}{z - i} dz$; б) $\oint_C \frac{z}{z^2 + 9} dz$. 3. Знайти особливі точки функції і з'ясувати їх характер $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z+2}}$ 4. Знайти лишки у всіх особливих точках $f(z) = \frac{z^2 + 3}{(z - 1)(z - 2)^2}$ 5. Знайти $F(p)$, якщо $f(t) = e^{2t} \cos 3t + 5t - 4 - 2sh4(t - 1) \cdot \eta(t - 1) - e^{2\left(t - \frac{\pi}{4}\right)} \sin 3\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \eta\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$. 6. Знайти $f(t)$, якщо $F(p) = \frac{p^2 + 1}{(p - 1)(p + 2)(p + 3)} - \frac{p^2 + 5}{p^2 + 16} - \frac{2p - 1}{p^2 - 4p - 13} - \frac{7}{p - 3}$.
Варіант 25 1. Обчислити інтеграли вздовж лінії C 1) $\int_{\tilde{N}} \operatorname{Re} z dz$, 2) $\int_C (iz - 2) dz$, де C – а) відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = -3i$, $z_2 = 2 + i$; б) ломана, що з'єднує ці точки з відрізками паралельними спочатку осі ou, а потім осі $ох$. 2. Обчислити інтеграли по замкнутому контуру C $z - i = 5$: а) $\oint_C \frac{e^z}{z - 2} dz$; б) $\oint_C \frac{\cos z}{z - 6} dz$.	Варіант 26 1. Обчислити інтеграли вздовж лінії C 1) $\int_{\tilde{N}} (z - \operatorname{Im} z) dz$, 2) $\int_C (iz + 3) dz$, де C – а) відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = 2i$, $z_2 = 2 - 4i$; б) ломана, що з'єднує ці точки з відрізками паралельними спочатку осі ou, а потім осі $ох$. 2. Обчислити інтеграли по замкнутому контуру C $z = 1$: а) $\oint_C \frac{2}{z^2 + 4} dz$; б) $\oint_C \frac{z^3 + 5}{z} dz$.

3. Знайти особливі точки функції і з'ясувати їх характер $f(z) = \frac{\sin(z) - z}{z^4}$ 4. Знайти лишки у всіх особливих точках $f(z) = \frac{z+1}{(z-3)^3(z-2)}$ 5. Знайти $F(p)$, якщо $f(t) = e^{-4t} \operatorname{sh} 3t + 5 \cos 2t + e^{-(t-2)} \sin 4(t-2) \cdot \eta(t-2).$ 6. Знайти $f(t)$, якщо $F(p) = \frac{p^2 + 3}{(p-2)(p+2)(p-1)} + \frac{p+1}{p+3} + \frac{3p-1}{p^2 + 4p + 3} + \frac{3}{p+5}.$	3. Знайти особливі точки функції і з'ясувати їх характер $f(z) = \frac{z^2 + 2iz + 3}{(z^2 + 1)(z + 3i)^2}$ 4. Знайти лишки у всіх особливих точках $f(z) = \frac{z(z^2 - 1)}{1 - \cos(2\pi z)}$ 5. Знайти $F(p)$, якщо $f(t) = 2te^{-3t} + 5 \cos 3(t-4) \cdot \eta(t-4) + 2e^{3\left(t-\frac{\pi}{3}\right)} \cos 2\left(t - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \eta\left(t - \frac{\pi}{3}\right).$ 6. Знайти $f(t)$, якщо $F(p) = \frac{7p^2 - 2}{p^2 + 4} - \frac{2p + 3}{(p^2 - 1)(p - 3)} + \frac{3p - 6}{p^2 - 10p + 29} + 2.$
Варіант 27 1. Обчислити інтеграли вздовж лінії C 1) $\int_{\bar{N}} (\bar{z} - \operatorname{Im} z) dz$, 2) $\int_C (3z - 2i) dz$, де C – а) відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = -2i$, $z_2 = 3 + i$; б) ломана, що з'єднує ці точки з відрізками паралельними спочатку осі ou, а потім осі ox. 2. Обчислити інтеграли по замкнутому контуру C $z - 2 = 2$: а) $\oint_C \frac{e^z}{z} dz$; б) $\oint_C \frac{\cos z}{z + 2} dz$. 3. Знайти особливі точки функції і з'ясувати їх характер $f(z) = \frac{1 - \cos(\pi z)}{(z - 1)^3(z - 2)^2}$ 4. Знайти лишки у всіх особливих точках $f(z) = \frac{z^2 + 3}{(z - 1)(z + 2)^2}$	Варіант 28 1. Обчислити інтеграли вздовж лінії C 1) $\int_{\bar{N}} (\bar{z} + \operatorname{Re} z) dz$, 2) $\int_C (2 - iz) dz$, де C – а) відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = -i$, $z_2 = 2 + 3i$; б) ломана, що з'єднує ці точки з відрізками паралельними спочатку осі ou, а потім осі ox. 2. Обчислити інтеграли по замкнутому контуру C $z + 2i = 3$: а) $\oint_C \frac{e^z}{z - 2i} dz$; б) $\oint_C \frac{z}{z^2 + 9} dz$. 3. Знайти особливі точки функції і з'ясувати їх характер $f(z) = \frac{e^{z^2} - 1}{z^5}$ 4. Знайти лишки у всіх особливих точках $f(z) = \frac{z^2 - 4iz - 3}{(z^2 + 1)(z - 3i)}$ 5. Знайти $F(p)$, якщо

5. Знайти $F(p)$, якщо $f(t) = 2t^2 e^{-t} + 5ch4(t-2) \cdot \eta(t-2) - \frac{1}{2} e^{5(t-1)} \sin 2(t-1) \cdot \eta(t-1).$ 6. Знайти $f(t)$, якщо $F(p) = \frac{2p+6}{p^2-8p+17} - \frac{3p-5}{(p^2-4)(p-3)} - \frac{4p^2-1}{p^2-9} - 7.$	$f(t) = 5\cos^2 2t - 4te^{2t} - \frac{2}{9} ch2(t-3) \cdot \eta(t-3) + 5\delta(t).$ 6. Знайти $f(t)$, якщо $F(p) = \frac{p+6}{p^2-2p+10} + \frac{4p-1}{(p^2-4)(p-3)} - \frac{2p^2}{p^2-1} + \frac{4}{(p+3)^2}.$
Варіант 29 1. Обчислити інтеграли вздовж лінії С 1) $\int_{\bar{N}} z \operatorname{Re} z dz$, 2) $\int_C (iz+2) dz$, де С – а) відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1=0$, $z_2=2+i$; б) ломана, що з'єднує ці точки з відрізками паралельними спочатку осі оу, а потім осі ох. 2. Обчислити інтеграли по замкнутому контуру С $z-2i =3$: а) $\oint_C \frac{e^z}{z-i} dz$; б) $\oint_C \frac{\cos z}{z+4} dz$. 3. Знайти особливі точки функції і з'ясувати їх характер. $f(z) = \frac{z^2+3}{(z^2+1)(z-2)^2}$ 4. Знайти лишки у всіх особливих точках $f(z) = z \cdot \sin \frac{1}{z-2}$ 5. Знайти $F(p)$, якщо $f(t) = \frac{1}{2} \sin 4(t-3) \cdot \eta(t-3) + 5e^{3t} \cos 2t - 3t^3 + 4e^{2(t-1)} sh3(t-1) \cdot \eta(t-1).$ 6. Знайти $f(t)$, якщо $F(p) = \frac{2p+2}{p^2-6p+10} - \frac{5p-1}{(p^2-9)(p+2)} - \frac{5p^2}{p^2-1} + \frac{7}{(p-2)^2}.$	Варіант 30 1. Обчислити інтеграли вздовж лінії С 1) $\int_{\bar{N}} z dz$, 2) $\int_C (3z+2i) dz$, де С – а) відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1=0$, $z_2=3+i$; б) ломана, що з'єднує ці точки з відрізками паралельними спочатку осі оу, а потім осі ох. 2. Обчислити інтеграли по замкнутому контуру С $z-2 =2,5$: а) $\oint_C \frac{e^z}{z-i} dz$; б) $\oint_C \frac{\cos z}{z} dz$. 3. Знайти особливі точки функції і з'ясувати їх характер $f(z) = \cos \frac{1}{z+i}$ 4. Знайти лишки у всіх особливих точках $f(z) = \frac{z^2+3}{(z-1)(z+2i)^2}$ 5. Знайти $F(p)$, якщо $f(t) = 5\sin^2 3t - 6te^{-3t} - 3 + \frac{5}{6} ch2(t-3) \cdot \eta(t-3).$ 6. Знайти $f(t)$, якщо $F(p) = \frac{p-2}{(p+1)(p-1)(p+3)} + \frac{p^2-3}{p^2+4} + \frac{p-1}{p^2+4p+8} + \frac{7}{p-3}.$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Физматгиз, 2007. – 432 с.
2. Краснов, М.Л. Функции комплексного переменного: Задачи и примеры с подробными решениями: учебное пособие / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 208 с.
3. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник. – Львів: «Новий світ – 2000», 2004. – 434 с.
4. Дубовик В. П., Юрик І. І. Юрик Вища математика. У трьох частинах. Частина 1, 2, 3 : Навчальний посібник. – Харків : Веста, 2008.
5. Герасимчук В.С, Васильченко Г.С., Кравцов В.І. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Книги 1, 2, 3. – К.: Книги України ЛТД, 2009.
6. Призва Г.Й., Плахотник В.В., Гординський Л.Д. та ін. Вища математика: Підручник. У 2-х книгах. Кн.1, 2. – К.: Либідь, 2003.