МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ХІМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

З ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА» ЗА РОЗДІЛОМ «ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА»

ДЛЯ СТУДЕНТІВ І КУРСУ

НАПРЯМІВ ПІДГОТОВКИ

051 «ЕКОНОМІКА ПІДПРИЄМСТВА»

075 «МАРКЕТИНГ»

051 «ЕКОНОМІЧНА КІБЕРНЕТИКА»

072 «ФІНАНСИ І КРЕДИТ»

ДЕННОЇ ТА ЗАОЧНОЇ ФОРМ НАВЧАННЯ

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики
Протокол № 10 від 27.06.2017

Дніпро ДВНЗ УДХТУ 2018

Методичні вказівки з організації самостійної роботи з дисципліни «Вища та прикладна математика» за розділом «Теорія ймовірностей та математична статистика» для студентів I курсу напрямів підготовки 051 «Економіка підприємства», 075 «Маркетинг», 051 «Економічна кібернетика», 072 «Фінанси та кредит» денної та заочної форм навчання / укл.: Т.С. Науменко, І.В. Шапка. – Дніпро: ДВНЗ УДХТУ, 2018. – 12 с.

Укладачі: Т.С. Науменко
І.В. Шапка

Відповідальний за випуск В.І. Олевський, д-р. техн. наук

Навчальне видання

Методичні вказівки з організації самостійної роботи з дисципліни «Вища та прикладна математика» за розділом «Теорія ймовірностей та математична статистика» для студентів I курсу напрямів підготовки 051 «Економіка підприємства», 075 «Маркетинг», 051 «Економічна кібернетика», 072 «Фінанси та кредит» денної та заочної форм навчання

Укладачі: НАУМЕНКО Тетяна Станіславівна
ШАПКА Ірина Віталіївна

Технічний редактор В.П. Синицька
Комп’ютерна верстка В.П. Синицька

Підписано до друку 19.10.18. Формат 60×841/16. Папір ксерокс. Друк різограф. Умов. друк. арк. 0,55. Обл.-вид. арк. 0,61. Тираж 100 прим. Зам. № 92. Свідоцтво ДК № 5026 від 16.12.2015

ДВНЗ УДХТУ, просп. Гагаріна, 8, м. Дніпро, 49005

Редакційно-видавничий відділ

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ КОРЕЛЯЦІЇ

Для багатьох задач практики часто доводиться досліджувати залежність досліджуваної величини X від іншої величини. Дві випадкові величини можуть бути пов'язані або функціональною залежністю, або статистичною, або бути незалежними.

Якщо на деякій множині X задана функціональна залежність $y = f(x)$ між змінними x та y, то кожному значенню $x \in X$ відповідає одне певне значення

$y \in Y$. Але не будь-яка залежність між двома змінними є функціональною. Нехай Y – врожай зерна. X – кількість добрива. З однакових за площею ділянок землі при рівних кількостях внесених добрив збирають різний врожай, тобто Y не є функцією X. Наприклад, ріст людини та її вага: знаючи ріст людини не можна знайти її вагу і навпаки. Але, зокрема, залежність між ростом людини та її вагою існує, але вона не є функціональною. Об'єм валової продукції та собівартість продукції, що випускається, не є функціональною залежністю, а статистичною. Строга функціональна залежність реалізується рідко, оскільки обидві величини або одна з них підлягає ще дії випадкових чинників, у цьому випадку виникає статистична залежність за якою зміна однієї із величин тягне зміну розподілу іншої. Тобто залежність між змінними x та y статистична, якщо значенню $x1$ відповідає один розподіл величини y, а значенню $x2$ відповідає інший розподіл, відмінний від першого.

Отже, розподіл змінюється разом зі змінною x. Зокрема, статистична залежність виявляється в тому, що при зміні однієї із величин змінюється середнє значення іншої, у цьому випадку статистичну залежність називають кореляційною.

Нехай результати вибірки із двовимірної сукупності подано в табличній формі:

X \ Y	y_1	y_2	…	y_k	n_{x_i}	$\overline{y}_{x_i}$
x_1	n_{11}	n_{12}	…	n_{1k}	n_{x_1}	$\overline{y}_{x_1}$
…	…	…	…	…	…	…
x_m	n_{m1}	n_{m2}	…	n_{mk}	n_{x_m}	$\overline{y}_{x_m}$
n_{y_j}	n_{y_1}	n_{y_2}	…	n_{y_k} n_{y_k}	n	—
$\overline{x}_{y_j}$	$\overline{x}_{y_1}$	$\overline{x}_{y_2}$	…	$\overline{x}_{y_k}$	—	—

Якщо розглядати таблицю за рядками, то кожному значенню x_i відповідає деякий розподіл випадкової величини Y. Обчислимо для цих розподілів умовні середні значення $\overline{y}_{x_i} = \dfrac{\sum_{j=1}^{k} y_j n_{ij}}{n_{x_i}}$, $i = 1,2,\dots,m$. Отже, $\overline{y}_x = f(x)$.

Аналогічно, розглядаючи таблицю за стовпцями, також визначаємо умовні середні величини

$$\bar{x}_{y_j} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i n_{ij}}{n_{y_j}}, \ j = 1,2,...,k.$$

Знову маємо залежність виду $\bar{x}_y = \varphi(y)$.

Рівняння, які виражають умовні середні, називаються кореляційними рівняннями або рівняннями регресії другого роду.

У кореляційному аналізі розглядаються такі задачі:

– визначити за кореляційною таблицею форму залежності між випадковими величинами, тобто вид функціональної залежності $\bar{y}_x = f(x)$ і $\bar{x}_y = \varphi(y)$;

– оцінити тісноту залежності, тобто визначити ступінь розсіяності можливих значень однієї випадкової величини відносно лінії регресії, якщо одна із величин набуває певних значень.

1 Лінійна кореляційна залежність

Для визначення форми залежності між *X* і *Y* за результатами розрахунків у кореляційній таблиці в системі координат *xOy* відкладаємо точки $(x_i, \bar{y}_{x_i})$, тобто будуємо кореляційне поле. Якщо ці точки розміщені на лінії, яка близька до прямої, то можна вважати, що залежність має лінійний характер, тобто рівняння регресії подається у вигляді $\bar{y}_x = ax + b$, або аналогічно $\bar{x}_y = cy + d$. За допомогою методу найменших квадратів можна визначити коефіцієнти рівнянь регресії:

$$b = \bar{y} - a\bar{x}, \ a = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{D_x};$$

$$d = \bar{y} - c\bar{y}; \ c = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{D_y}.$$

Коефіцієнти $a = \rho_{y/x}$ і $c = \rho_{x/y}$ – коефіцієнти регресії. Отже, лінійні рівняння регресії мають вигляд:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = \rho_{y/x}(x - \bar{x});$$

$$\bar{x}_y - \bar{x} = \rho_{x/y}(y - \bar{y}).$$

Лінії регресії перетинаються в точці $(\bar{x}, \bar{y})$, яка називається центром кореляції. Тіснота зв’язку в разі лінійної залежності оцінюється коефіцієнтом кореляції. Коефіцієнтом кореляції змінних *x* і *y* називається число рівне середньому геометричному їх коефіцієнтів регресії і має їх знак, тобто:

$$r = \pm\sqrt{\rho_{y/x}\rho_{x/y}} = \pm\frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{s_x s_y}.$$

Коефіцієнти регресії виражаються через коефіцієнт кореляції за такими формулами:

$$\rho_{y/x} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{s_x^2}\frac{s_y}{s_y} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{s_x s_y}\frac{s_y}{s_x} = r\frac{s_y}{s_x};$$

аналогічно

$$\rho_{x/y} = r\frac{s_x}{s_y}.$$

Тоді рівняння регресії можна записати так:

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r\frac{s_y}{s_x}\left(x - \overline{x}\right);$$

$$\overline{x}_y - \overline{x} = r\frac{s_x}{s_y}\left(y - \overline{y}\right).$$

Абсолютна величина коефіцієнта кореляції не перевищує одиницю:

$$|\, r \,| < 1 .$$

Якщо $r = 0$, то величини не пов’язані лінійною залежністю, але при цьому між ними можливий нелінійний кореляційний зв’язок. Якщо r зростає за абсолютною величиною від нуля до одиниці, то тіснота зв’язку зростає, і, якщо $r = \pm 1$, то кореляційна залежність перетворюється на функціональну, і прямі регресії зливаються в одну пряму.

Коефіцієнт кореляції r вимірює силу (тісноту) лінійного зв’язку між *X* і *Y*.

Обчислення параметрів, які входять у рівняння регресії, спрощується, якщо перейти до *умовних змінних* і *умовних моментів* розподілу.

Приклад. У результаті обстеження одержано статистичний розподіл 100 підприємств за виробничими фондами *X*, млн грн, і добовим виробітком *Y*, т:

Y / X	10	15	20	25	30	35	n_{x_i}
50	2	2					4
60	2	4	5	6	4		21
70		2	7	12	10	4	35
80				10	10	6	26
90				8		6	14
n_{y_j}	4	8	12	36	24	16	100

Визначити форму залежності між *X* і *Y*, знайти рівняння ліній регресії і тісноту зв'язку.

Розв'язання. Знаходимо умовні середні y_x і x_y.

$$\bar{y}_{x=50} = \frac{20+30}{4} = 12{,}5;$$

$$\bar{y}_{x=60} = \frac{20+60+100+150+120}{21} \approx 21{,}4; \qquad \bar{y}_{x=70} = \frac{30+140+300+300+140}{35} = 26;$$

$$\bar{y}_{x=80} = \frac{250+300+210}{26} \approx 29{,}2;$$

$$\bar{y}_{x=90} = \frac{200+210}{14} \approx 29{,}3; \qquad \bar{x}_{y=10} = \frac{100+120}{4} = 55;$$

$$\bar{x}_{y=15} = \frac{100+240+140}{8} = 60; \qquad \bar{x}_{y=20} = \frac{300+490}{12} \approx 65{,}8;$$

$$\bar{x}_{y=25} = \frac{360+840+800+720}{36} \approx 75{,}6; \qquad \bar{x}_{y=30} = \frac{240+700+800}{24} = 72{,}5;$$

$$\bar{x}_{y=35} = \frac{280+480+540}{16} \approx 81{,}3.$$

Результати обчислень перенесемо в таблицю. У ній перейдемо до умовних змінних, узявши

$C_1 = 70,\ h_1 = 10,\ C_2 = 25,\ h_2 = 5.$

v / u	–3	–2	–1	0	1	2	n_{x_i}	$\bar{y}_{x_i}$
–2	2	2					4	12,5
–1	2	4	5	6	4		21	21,4
0		2	7	12	10	4	35	26
1				10	10	6	26	29,2
2				8		6	14	29,3
n_{y_j}	4	8	12	36	24	16	100	
$\bar{x}_{y_j}$	55	60	65,8	75,6	72,5	81,3		

Для визначення форм залежності $\bar{y}_x = f(x)$ і $\bar{x}_y = \varphi(y)$ проаналізуємо, як змінюються умовні середні зі зміною випадкових величин. Зі зростанням x умовна середня $\bar{y}_x$ також зростає, а при зростанні y умовна середня $\bar{x}_y$ в основному зростає. У системі координат xOy відкладемо множину точок $(x_i, \bar{y}_{x_{i}})$ значком «×», а множину точок $(\bar{x}_{y_j}, y_j)$ – значком «∘» (рис. 1).

Графіки рівнянь регресії зображено на рис. 1.

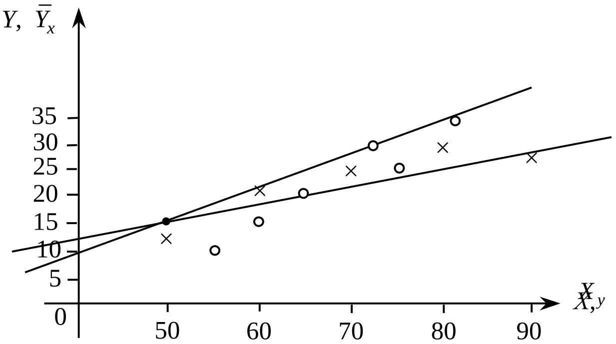

Рис. 1

З рис. 1 бачимо, що кожна із груп побудованих точок розміщена приблизно на деякій прямій, дещо відхиляючись від неї. Рівняння прямих шукаємо у вигляді:

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r\frac{s_y}{s_x}\left(x - \overline{x}\right); \qquad \overline{x}_y - \overline{x} = r\frac{s_x}{s_y}\left(y - \overline{y}\right).$$

За даними останньої таблиці знаходимо умовні моменти розподілу:

$$\overline{u} = \frac{-8 - 21 + 26 + 28}{100} = 0{,}25; \qquad \overline{u^2} = \frac{16 + 21 + 26 + 56}{100} = 1{,}19;$$

$$\overline{v} = \frac{-12 - 16 - 12 + 24 + 32}{100} = 0{,}16; \qquad \overline{v^2} = \frac{36 + 32 + 12 + 24 + 64}{100} = 1{,}68.$$

$$s_u = \sqrt{1{,}19 - \left(0{,}25^2\right)} \approx 1{,}06; \qquad s_v = \sqrt{1{,}68 - \left(0{,}16\right)^2} \approx 1{,}29.$$

Щоб знайти коефіцієнт кореляції, обчислимо середнє значення добутку умовних змінних:

$$\overline{uv} = \frac{1}{100}\left(12 + 8 + 6 + 8 + 5 - 4 + 10 + 12 + 24\right) = 0{,}81.$$

$$r = \frac{0{,}81 - 0{,}25 \cdot 0{,}16}{1{,}06 \cdot 1{,}09} \approx 0{,}568.$$

Знайдемо значення решти параметрів, які входять до рівняння регресії:

$$\overline{x} = 70 + 0{,}25 \cdot 10 = 72{,}5; \qquad \overline{y} = 25 + 0{,}16 \cdot 5 = 25{,}8; \qquad s_x = 1{,}06 \cdot 10 = 10{,}6;$$
$$s_y = 1{,}29 \cdot 5 = 6{,}45.$$

Запишемо рівняння ліній регресії:

$$\overline{y}_x - 25{,}8 = \frac{6{,}45}{10{,}6}0{,}563\left(x - 72{,}5\right);$$

$$\bar{y}_x = 0{,}343x - 0{,}933;$$

$$\bar{x}_y - 72{,}5 = \frac{10{,}6}{6{,}45} 0{,}563(y - 25{,}8);$$

$$\bar{x}_y = 0{,}925y + 48{,}635.$$

2 Нелінійна кореляційна залежність

Між змінними x і y можуть існувати і нелінійні кореляційні залежності. Якщо відображені на площині xOy групи точок $\left(x_i, \bar{y}_{x_i}\right)$ і $\left(\bar{x}_{y_j}, y_j\right)$ розміщуються, нагадуючи деякі криві, то доцільно вважати, що між досліджуваними величинами існує *нелінійна залежність*. Тепер знову виникло завдання підібрати таку криву, яка б на основі методу найменших квадратів мала найменші відхилення від точок, здобутих при спостереженні, знайти її рівняння і визначити тісноту зв'язку.

Розглянемо деякі найпростіші види нелінійної кореляційної залежності.

Нехай зі зростанням однієї випадкової величини умовні середні другої спадають, але не на ту саму величину, як це буває в разі лінійної залежності, а розмір зміни ніби згасає. У такому разі можна вважати, що залежність гіперболічна:

$$y_x = \frac{a}{x} + b, \text{ або } x_y = \frac{c}{y} + d.$$

Параметри a і b за методом найменших квадратів визначаються із системи рівнянь:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{x_i} n_{x_i} + b\sum_{i=1}^{m} n_{x_i} = \sum_{i=1}^{m} \bar{y}_{x_i} n_{x_i}, \\ a\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{x_i^2} n_{x_i} + b\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{x_i} n_{x_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{x_i} \bar{y}_{x_i} n_{x_i}. \end{cases}$$

Аналогічно складається система рівнянь у разі, коли x_y гіперболічно залежить від y.

Нехай зі зростанням однієї випадкової величини умовні середні другої зростають (спадають), досягають максимуму (мінімуму), а потім спадають (зростають). Тоді можна вважати, що між ними існує параболічна залежність виду:

$$y_x = a_2x^2 + a_1x + a_0, \text{ або } x_y = b_2y^2 + b_1y + b_0.$$

За методом найменших квадратів для визначення значень параметрів a_2, a_1, a_0 потрібно скласти і розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_2 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 n_{x_i} + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i n_{x_i} + a_0 \sum_{i=1}^{m} n_{x_i} = \sum_{i=1}^{m} \bar{y}_{x_i} n_{x_i}, \\ a_2 \sum_{i=1}^{m} x_i^3 n_{x_i} + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 n_{x_i} + a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i n_{x_i} = \sum_{i=1}^{m} x_i \bar{y}_{x_i} n_{x_i}, \\ a_2 \sum_{i=1}^{m} x_i^4 n_{x_i} + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^3 n_{x_i} + a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 n_{x_i} = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \bar{y}_{x_i} n_{x_i}. \end{cases}$$

У разі нелінійної кореляційної залежності тіснота зв'язку між величинами характеризується *кореляційним відношенням* η.

Кореляційним відношенням η називається відношення середніх квадратичних відношень умовних середніх до загального середнього квадратичного відхилення: $\eta_{y/x} = \dfrac{\delta_y}{s_y}$; $\eta_{x/y} = \dfrac{\delta_x}{s_x}$,

де

$$\delta_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} \left(\bar{y}_{x_i} - \bar{y}\right)^2 n_{x_i}}{n}}; \quad \delta_x = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{k} \left(\bar{x}_{y_j} - \bar{x}\right)^2 n_{y_j}}{n}}.$$

Кореляційне відношення набуває значення на відрізку $[0;1]$. Якщо кореляційне відношення дорівнює нулю, то кореляційний зв'язок відсутній, якщо $\eta = 1$, то випадкові величини зв'язані функціональною залежністю. Зі зростанням значення η тіснота кореляційного зв'язку збільшується.

Приклад. У результаті обстеження одержано статистичний розподіл 30 однотипних підприємств з добовому виробленню продукції *X* і собівартості одиниці цієї продукції *Y*. Встановити форму залежності між *X* і *Y*, знайти рівняння ліній регресії і оцінити тісноту зв'язку.

Y \ X	100	110	120	130	n_{x_i}
50			1	3	4
100		3	3		6
150		6	2	1	9
200	1	4		1	6
250	4	1			5
n_{y_j}	5	14	6	5	30

Розв'язання. Знаходимо умовні середні значення $\bar{y}_{x_i}$ і $\bar{x}_{y_j}$. Результати обчислень заносимо в таблицю. У цій самій таблиці зроблено перехід до умовних змінних.

Переходячи до умовних змінних, ураховуємо, що $C_1 = 150$, $\Delta x = 50$, $C_2 = 110$, $\Delta y = 10$.

v / u	–1	0	1	2	n_{x_i}	$\bar{y}_{x_i}$
–2			1	3	4	127,5
–1		3	3		6	155
0		6	2	1	9	114,4
1	1	4		1	6	111,7
2	4	1			5	102
n_{y_j}	5	14	6	5	30	
$\bar{x}_{y_j}$	240	160,7	108,3	100		

На рис. 2 зобразимо на координатній площині множини точок $(x_i, \bar{y}_{x_i})$ і $(\bar{x}_{y_j}, y_j)$ відповідно значками «×» і «∘». Згідно з рисунком кожна із груп точок розміщена приблизно на деякій гіперболі, дещо відхиляючись від неї.

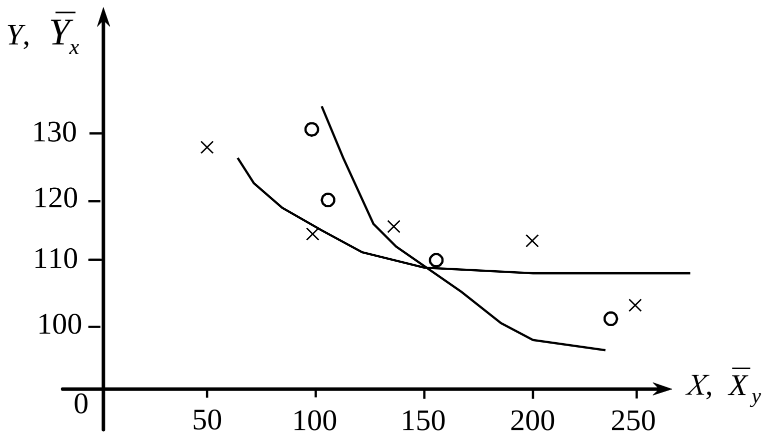

Рис. 2

Рівняння гіперболи $y_x = f(x)$ шукаємо у вигляді $\bar{y}_x = \frac{a}{x} + b.$ Для визначення коефіцієнтів відповідної системи рівнянь складаємо таблицю:

x_i	n_{x_i}	$\frac{n_{x_i}}{x_i}$	$\frac{n_{x_i}}{x_i^2}$	$\bar{y}_{x_i}$	$\bar{y}_{x_i} n_{x_i}$	$\frac{\bar{y}_{x_i} n_{x_i}}{x_i}$
50	4	0,08	0,0016	127,5	510	10,2
100	6	0,06	0,0006	115	690	6,9
150	9	0,06	0,0004	114,4	1030	6,86
200	6	0,03	0,00015	111,7	670	3,35
250	5	0,02	0,00008	102	510	2,04
Σ	30	0,25	0,00283	—	3410	29,35

Невідомі параметри a і b знайдемо із системи рівнянь:

$$\begin{cases} 0{,}25a + 30b = 3410, \\ 0{,}00283a + 0{,}25b = 29{,}35. \end{cases}$$

Розв'язок системи $a \approx 1250,\ b \approx 103{,}3.$ Рівняння регресії має вигляд: $\bar{y}_x = \dfrac{1250}{x} + 103{,}3.$

Аналогічно можна скласти систему рівнянь і знайти рівняння регресії $\bar{x}_y = \dfrac{c}{y} + d.$

Складаючи відповідну систему рівнянь і розв'язуючи її, дістаємо $\bar{x}_y = \dfrac{36998}{y} - 175.$

Тісноту зв'язку між випадковими величинами оцінимо з допомогою кореляційних відношень.

Необхідні для розрахунків параметри знайдемо з допомогою умовних моментів розподілу:

$$\bar{u} = \frac{1}{15}; \quad \overline{u^2} = \frac{8}{5}; \qquad \bar{v} = \frac{11}{30}; \quad \overline{v^2} = \frac{31}{30};$$

$$\bar{x} = \frac{1}{15} \cdot 50 + 150 \approx 153; \qquad \bar{y} = 10 \cdot \frac{11}{30} + 110 \approx 114;$$

$$s_x = 50\sqrt{\frac{8}{5} - \left(\frac{1}{15}\right)^2} \approx 63; \qquad s_y = 10\sqrt{\frac{31}{30} - \left(\frac{11}{30}\right)^2} \approx 9{,}5;$$

$$\delta_y = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{5} (\bar{y}_i - 114)^2 n_{x_i}}{30}} \approx 7{,}2; \qquad \delta_x = \sqrt{\frac{\sum\limits_{j=1}^{4} \left(\bar{x}_{y_j} - 153\right)^2 n_{y_j}}{30}} \approx 47.$$

Отже,

$$\eta_{y/x} = \frac{7{,}2}{9{,}5} \approx 0{,}76;$$

$$\eta_{x/y} = \frac{47}{63} \approx 0{,}75.$$

З огляду на значення кореляційних відношень можна стверджувати, що між добовим виробітком продукції і собівартістю одиниці продукції існує досить істотна кореляційна залежність.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І., Савіна С.С. Теорія ймовірностей та математична статистика. Ч. ІІ. – К.: КНЕУ, 2001. – 336 с.
2. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Математика для економістів. Теорія ймовірностей та математична статистика. – К.: Національна академія управління, 1999. – 357 с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
4. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі. Книга 1 / Кулініч Г.Л. – К.: Либідь, 1992. – 288 с.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. шк., 2000. – 400 с.
6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 2000. – 479 с.

7 Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. ІІ. – М.: Высш. шк., 1986. – 415 с.