

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ХІМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ  
З ДИСЦИПЛІНИ «ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА  
МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА»  
ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЕКОНОМІЧНОГО ФАКУЛЬТЕТУ  
ДЕННОЇ ТА ЗАОЧНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ

Затверджено на засіданні кафедри  
вищої математики.

Протокол № 3 від 17.10.16

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика» для студентів економічного факультету денної та заочної форми навчання / Укл.: Т.С. Науменко, І.В. Шапка – Дніпро: ДВНЗ УДХТУ, 2017. – 49с.

Укладачі: Т.С. Науменко  
І.В. Шапка

Відповідальний за випуск В.І. Олевський, д-р техн. наук

Навчальне видання  
Методичні вказівки  
до практичних занять  
з дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика»  
для студентів економічного факультету  
денної та заочної форми навчання

Укладачі: НАУМЕНКО Тетяна Станіславівна  
ШАПКА Ірина Віталіївна

Технічний редактор Т.М. Кіжло  
Комп'ютерна верстка Т.М. Кіжло

Підписано до друку 07.11.17. Формат 60x84/16. Папір ксерокс. Друк різнограф.  
Умов. друк. арк. 2,23. Обл.-вид. арк. 2,31. Тираж 100 прим. Зам. № 171.  
Свідоцтво ДК № 5026 від 16.12.2015.

---

ДВНЗ УДХТУ, просп. Гагаріна, 8, м. Дніпро, 49005

---

Редакційно-видавничий відділ

## ЗМІСТ

|                                                                                                    |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| ВСТУП.....                                                                                         | 4  |
| ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ                                                                                |    |
| 1. Випадкові події. Алгебра подій.....                                                             | 4  |
| 2. Елементи комбінаторики.....                                                                     | 5  |
| 3. Означення ймовірності.....                                                                      | 8  |
| 3.1. Класичне означення ймовірності.....                                                           | 8  |
| 3.2. Геометричне означення ймовірності.....                                                        | 10 |
| 3.3. Статистичне означення ймовірності.....                                                        | 10 |
| 4. Основні теореми теорії ймовірностей.....                                                        | 11 |
| 5. Формула повної ймовірності. Формула Байєса.....                                                 | 14 |
| 6. Незалежні повторні випробування. Формула Бернуллі.....                                          | 15 |
| 6.1 Формула Бернуллі.....                                                                          | 15 |
| 6.2 Наближені формули у схемі Бернуллі.....                                                        | 16 |
| ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ                                                                                 |    |
| 7. Випадкові величини. Закон розподілу їх ймовірностей.....                                        | 19 |
| 8. Числові характеристики випадкових величин та їх властивості.....                                | 25 |
| 9. Найбільш поширені закони розподілу.....                                                         | 29 |
| МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА                                                                             |    |
| 10. Варіаційні ряди. Дискретний статистичний розподіл вибірки.....                                 | 30 |
| 11.Інтервальний статистичний розподіл вибірки.....                                                 | 35 |
| 12.Точкові статистичні оцінки числових характеристики<br>та параметрів генеральної сукупності..... | 40 |
| 13. Інтервальні статистичні оцінки числових характеристик.....                                     | 41 |
| 14. Статистична перевірка гіпотез.....                                                             | 43 |
| СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....                                                                             | 46 |
| Додатки.....                                                                                       | 47 |

## ВСТУП

Теорія ймовірностей – наука, яка вивчає закономірності масових випадкових явищ (подій). Одним із основних понять теорії ймовірностей є випадок. Випадок, наприклад, грає важливе значення в азартних іграх. Під грою можна розуміти зовсім далеку від азартних ігор подію: політичні переговори, ділові виробничі відносини, воєнна стратегія і т.д.

Для економістів теорія ймовірності є однією з базових фундаментальних дисциплін тому, що фінансова діяльність у суспільстві з вільною економікою повністю підлягає законам випадку, невизначеності. Уже у XVII сторіччі теорія ймовірностей застосовувалась у діяльності страхових компаній, а в наші дні вона вживається і для розрахунку ризикових фінансових операцій, плануванню банківської діяльності, макроекономічному плануванні. До задач економічного напрямку можна віднести також демографічні, сільськогосподарські, виробничі.

## ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

### 1. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ. АЛГЕБРА ПОДІЙ

В різних галузях людської діяльності або в природі, постійно доводиться мати справу з подіями, які неможливо точно передбачити.

Для того, щоб якось оцінити подію, необхідно врахувати або спеціально організувати умови, в яких вона відбувається.

**Випробування** – реальний або мислений експеримент (виконуваний за певної незмінної сукупності умов), результати якого піддаються спостереженню.

**Подія** – результат випробування.

**Достовірна подія** – подія, яка в результаті випробування неодмінно відбудеться. Позначатимемо її літерою  $U$ .

**Неможлива подія** – подія, яка в даному випробуванні не може відбутися. Позначатимемо її літерою  $V$ .

Наприклад, кубик підкидається 1 раз, то:

- а) випадання числа очок не більшого 6 – достовірна подія;
- б) випадання числа очок більшого 6 – неможлива подія.

**Випадкова подія** – подія, яка в результаті випробування може відбутися, а може й не відбутися. Такі події позначатимемо літерами  $A, B, C, \dots$ .

**Елементарні події** – події, які не можна розкласти на простіші. Їх, як правило, позначають літерами  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ . З елементарних подій можна скласти складнішу подію. Множину всіх можливих елементарних подій  $\omega$  називають *простором елементарних подій (або універсальною подією)*, позначають  $\Omega$ .

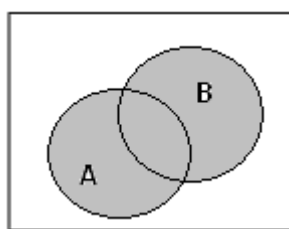
Наприклад, гральний кубик підкидають один раз. Елементарні події:  $\omega_1$  - випаде 1,  $\omega_2$  - 2,  $\omega_3$  - 3,  $\omega_4$  - 4,  $\omega_5$  - 5,  $\omega_6$  - 6. Простір елементарних подій  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ .

**Простір елементарних подій** – це множина можливих елементарних подій, кожною з яких може закінчитися випробування. Цей простір може містити скінченну, зліченну або незліченну множину значень.

*Сумою* двох випадкових подій  $A$  і  $B$  називають таку подію, яка полягає в появі хоча б однієї з подій  $A$  або  $B$ , і позначають  $A+B$  або  $A \cup B$  (рис. 1.1).

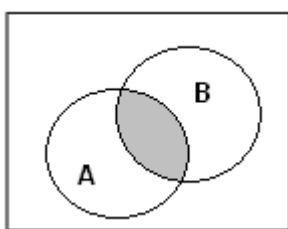
*Добутком* двох випадкових подій  $A$  і  $B$  називають таку подію, яка полягає в сумісній появі подій  $A$  і  $B$ , і позначають  $A \cdot B$  або  $A \cap B$  (рис. 1.2).

*Різницею* двох випадкових подій  $A$  і  $B$  називають подію, яка полягає в тому, що відбувається подія  $A$  і не відбувається подія  $B$ , і позначають  $A-B$  або  $A \setminus B$  (рис. 1.3).



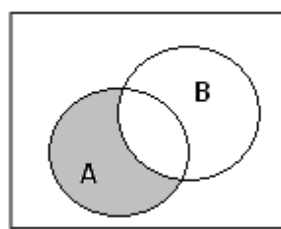
$$C = A \cup B$$

рис. 1.1



$$C = A \cap B$$

рис. 1.2



$$C = A \setminus B$$

рис. 1.3

Дві події називають *сумісними*, якщо поява однієї з них не виключає появи іншої в одному й тому самому випробуванні. Дві події називають *несумісними*, якщо вони не можуть відбутися одночасно в одному й тому самому випробуванні. Наприклад, при одному підкиданні монети не можуть одночасно з'явитись герб і решка.

Подію  $\bar{A}$  називають *протилежною* до події  $A$  в даному випробуванні, якщо вона відбувається тоді, коли не відбувається подія  $A$ , тобто  $\bar{A} = \Omega - A$ . Очевидно, що протилежні події несумісні та утворюють повну групу подій.

Для додавання та множення подій виконуються закони:

1.  $A+B=B+A$ ,  $AB=BA$  – комутативний;
2.  $(A+B)+C=A+(B+C)$ ,  $(AB)C=A(BC)$  – асоціативний;
3.  $(A+B)C=AC+BC$  – дистрибутивний.

Множина  $S$  є *алгеброю подій*, коли

1.  $U \in S$  (алгебра подій містить вірогідну подію);
2. якщо  $A \in S, B \in S$ , то  $A+B \in S, AB \in S, A \setminus B \in S$

## 2. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

При обчисленні ймовірностей подій досить часто потрібно підраховувати кількість елементарних подій (сприятливих деякій події або всіх можливих подій). Здебільшого це зумовлює великі труднощі, подолати які допомагає комбінаторика. Вона вивчає способи підрахунку кількості розміщень, перестановок, сполучень.

Нагадаємо, що  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ , причому  $0! = 1$ .

*Правило добутку.* Нехай із деякої скінченної множини

1-й об'єкт можна вибрати  $k_1$  способами,

2-й об'єкт –  $k_2$  способами, (2.1)

.....

$n$ -й об'єкт –  $k_n$  способами.

Тоді довільний набір, перерахованих об'єктів, із даної множини можна вибрати  $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$  способами.

**Приклад.** Скільки існує тризначних чисел з різними цифрами?

*Розв'язання.* В десятковій системі числення десять цифр: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. На першому місці може стояти будь-яка з 9 цифр, крім нуля. На другому – будь-яка цифра з тих, що залишилися 9 цифр, крім вибраної. На останньому місці будь-яка цифра із 8 цифр, що залишилися.

За правилом добутку,  $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$  тризначних чисел мають різні цифри.

*Правило суми.* При виконанні умов (1), будь-який із об'єктів можна вибрати  $k_1 + k_2 + \dots + k_n$  способами.

**Приклад.** Скільки існує способів вибору одного олівця з коробки, яка містить 4 червоних, 6 синіх, 5 зелених олівців.

*Розв'язання.* Один олівець за правилом суми, можна вибрати  $4+6+5=15$  способами.

Зазвичай в комбінаториці розглядають експеримент з вибору навмання  $k$  елементів з  $n$ . При цьому елементи:

а) не повертаються назад (схема вбору без повернення);

б) повертаються назад (схема вибору з поверненням).

### **I. Схема вибору без повернення.**

*Розміщеннями із  $n$  елементів по  $k$*  називають множини із  $m$  елементів, вибраних із  $n$  елементів, які можуть розрізнятися між собою як складом елементів, так і їх порядком. Визначають формулою

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (2.2)$$

**Приклад.** З 6 осіб треба вибрати керівника та його заступника. Скількома способами це можна зробити?

*Розв'язання.* Завдання полягає у знаходженні кількості розміщень (без повторень) із шести елементів по два. Отже, шукане число

$$A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{4!} = 5 \cdot 6 = 30$$

*Перестановками із  $n$  елементів* називають множини із  $n$  елементів, що відрізняються лише їх порядком. Визначають за формулою

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!$$

**Приклад.** Скількома способами можна розставити 5 книг на полиці?

*Розв'язання.* Кількість способів дорівнює числу перестановок з  $p$  'яти елементів, тобто

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Сполученнями із  $n$  елементів по  $k$  називають множини із  $m$  елементів, вибраних із  $n$  елементів, які розрізняються між собою тільки складом елементів. Визначають формулою

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (2.3)$$

Справедлива тотожність:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}, \quad C_n^0 = 1, \quad C_n^1 = n,$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n, \quad \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$$

**Приклад.** У турнірі брали участь 10 шахістів, і кожен 2 шахісти зустрічались один раз. Скільки партій було зіграно в турнірі?

*Розв'язання.* Партій було зіграно стільки, скільки можна взяти неупорядкованих 2-елементарних підмножини з 10-елементної множини, тобто

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 8!} = \frac{50}{2} = 45$$

## II. Схема вибору з поверненням.

Якщо при виборі  $k$  елементів з  $n$  – елементи повертаються назад і упорядковуються, то говорять, що це *розміщення з поверненням*.

$$\overline{A}_n^k = n^k \quad (2.4)$$

**Приклад.** Скільки тризначних чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7? *Розв'язання.* Кожне тризначне число, складене зі вказаних цифр, можна вважати як розміщення з повтореннями, складені із трьох цифр, взятих із даних семи. Тому, скориставшись формулою кількості розміщень із  $n$  різних елементів по  $k$  із повторенням  $\overline{A}_n^k = n^k$ , маємо шукане число:

$$\overline{A}_7^3 = 7^3 = 343.$$

Якщо при виборі  $k$  елементів з  $n$  елементи повертаються назад без упорядкування, то говорять, що це *сполучення з повторенням*. Число сполучень з повторенням із  $n$  елементів по  $k$  визначається за формулою

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k \quad (2.5)$$

**Приклад.** В магазині продають 10 видів тортів. Покупець вибав чек на три торти. Вважаючи, що будь-який набір рівноможливий, визначити число можливих заказів.

*Розв'язання.* Число рівноможливих заказів за формулою (2.5) дорівнює

$$C_{10+3-1}^3 = C_{12}^3 = \frac{12!}{(12-3)!3!} = \frac{9! \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{9! \cdot 3!} = 220$$

Нехай маємо  $n$  елементів, причому елемент  $a_1$  повторюється  $n_1$  раз, елемент  $a_2$  –  $n_2$  раз, ...,  $a_k$  –  $n_k$  раз;  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ . Тоді елементи  $a_1$  можна переставити  $P_{n_1} = (n_1)!$  способами, елементи  $a_2$  –  $P_{n_2} = (n_2)!$ , ..., елементи  $a_k$  –  $P_{n_k} = (n_k)!$

Тобто число перестановок з повтореннями менше числа перестановок без повторень в  $n_1!n_2!\dots n_k!$  раз. Число перестановок з повтореннями з  $n$  елементів

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}. \quad (2.6)$$

**Приклад.** Скількома способами можна набрати на нитку 4 зелених, 5 синіх і 6 червоних намистин?

*Розв'язання.* Необхідно визначити кількість перестановок із повторенням, які можна зробити із  $n_1 = 4$  (зелені намистини),  $n_2 = 5$  (сині намистини) і  $n_3 = 6$  (червоні намистини). За формулою

$$P_n(n_1, n_2, n_3) = \frac{(4+5+6)!}{4!5!6!} = \frac{15!}{4!5!6!} = 630630$$

### 3. ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

#### 3.1. Класичне означення ймовірності

**Класичне визначення** ймовірності пов'язане з поняттям сприятливої події.

Нехай події

$$A_1, A_2, \dots, A_n \in S \quad (3.1)$$

утворюють множину елементарних подій. Тоді події із (3.1), які призводять до настання події  $A$ , називаються сприятливими наслідками для події  $A$ ,  $m(A)$  – кількість сприятливих наслідків.

*Ймовірність події  $A$*  дорівнює відношенню кількості елементарних наслідків, сприятливих цій події, до кількості всіх рівно можливих елементарних наслідків у даному випробуванні.

Ймовірність події  $A$  позначають  $P(A)$ , тому за означенням

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad (3.2)$$

де  $m$  – кількість елементарних наслідків, сприятливих події  $A$ ;  $n$  – кількість усіх елементарних наслідків у даному випробуванні.

З класичного означення ймовірності випливають властивості ймовірності

$$1. 0 \leq P(A) \leq 1.$$

$$2. P(\Omega) = 1.$$

$$3. P(\bar{\Omega}) = 0$$

$A + \bar{A} = \Omega$  – достовірна подія, тому

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \text{ або } P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$



**Приклад.** В ящику 15 деталей, серед яких 10 пофарбовані. Робітник навмання бере 3 деталі. Знайти ймовірність того, що деталі пофарбовані.

*Розв'язання.* Подія А – 3 деталі пофарбовані.

$$m(A) = C_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)! 3!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 120 \text{ – число сприятливих подій.}$$

$$n = C_{15}^3 = \frac{15!}{(15-3)! 3!} = \frac{12! \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{12! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 455 \text{ – загальне число всіх можливих}$$

наслідків.

Маємо

$$P(A) = \frac{m(A)}{n} = \frac{120}{455} = \frac{24}{91}$$

**Приклад.** В групі 12 студентів, 8 з яких відмінники. По списку відбирають 9 студентів. Знайти ймовірність того, що відберуть 5 відмінників.

*Розв'язання.* Подія А – відібрали 5 відмінників.

$$m(A) = C_8^5 \cdot C_4^4 = \frac{8!}{(8-5)! 5!} \cdot 1 = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5!} = 56,$$

де  $C_8^5$  – число можливих наборів із 8 відмінників по 5,

$C_4^4$  – число можливих наборів по 4 із інших студентів.

$n$  – загальне число способів вибору 12 студентів із 9 дорівнює

$$n = C_{12}^9 = \frac{12!}{(12-9)! 9!} = \frac{9! \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 9!} = 220.$$

$$P(A) = \frac{m(A)}{n} = \frac{56}{220} = \frac{14}{55}.$$

**Приклад.** Серед співробітників компанії 7 менеджерів, 4 бухгалтери, і 3 начальника відділів. Збирають комісію з 5 співробітників. Яка ймовірність того, що серед них 2 начальники, 2 менеджери, 1 бухгалтер?

*Розв'язання.* Подія А – група з 2-х начальників, 2-х менеджерів, 1 бухгалтера.

$$m(A) = C_7^2 \cdot C_4^2 \cdot C_3^1 = \frac{7!}{(7-2)! 2!} \cdot \frac{4!}{2!} \cdot \frac{3!}{1!} = 252,$$

де  $C_7^2$  – число можливих наборів із 7 менеджерів по 2,

$C_4^2$  – число можливих наборів із 4 бухгалтерів по 2,

$C_3^1$  – число можливих наборів із 3 начальників відділів по 1.

$n$  – загальне число способів вибору 5 співробітників з 14.

$$n = C_{14}^5 = \frac{14!}{(14-5)! 5!} = \frac{14!}{9! 5!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2002.$$

$$P(A) = \frac{m(A)}{n} = \frac{252}{2002} = 0,126.$$

### 3.2. Геометричне означення ймовірності

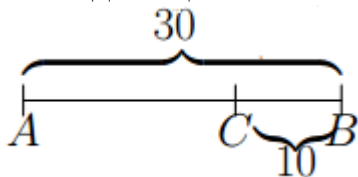
Нехай множина всіх елементарних наслідків випробування нескінченна і утворює деяку множину  $\Omega$ , усі елементарні наслідки рівноможливі. Причому події  $A$  сприяють ті елементарні події, які утворюють множину  $A \subseteq \Omega$ . Тоді ймовірність події  $A$  дорівнює відношенню міри множини  $A$  до міри множини  $\Omega$ , тобто

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} \quad (3.3)$$

Мірою множини на прямій, площині, у просторі є відповідно довжина, площа, об'єм геометричної фігури, яку утворює ця множина.

**Приклад.** Відомо, що телефонний дзвінок повинен продзвонити з 11 год до 11 год 30 хв. Яка ймовірність того, що дзвоник продзвонить в останні 10 хвилин указанного проміжку, якщо момент дзвінка випадковий?

*Розв'язання.* Скористаємося геометричною схемою. Для цього проміжок часу з 11 год до 11 год 30 хв зобразимо у вигляді відрізка  $AB$  довжиною 30 одиниць, а проміжок з 11 год 20 хв до 11 год 30 хв – у вигляді відрізка  $CB$  довжиною 10 одиниць.



Випадковий дзвінок у деякий момент заданої півгодини зображається навмання взятою точкою на відрізку  $AB$ . Тоді ймовірність того, що дзвінок прозвучить протягом останніх 10 хв, дорівнює

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

### 3.3. Статистичне означення ймовірності

Оскільки класичне означення ймовірності передбачає, що всі елементарні наслідки випробування рівноможливі, що важко обґрунтувати, то розглядають ще й *статистичне означення ймовірності*.

*Відносною частотою події  $A$*  називають відношення кількості випробувань, у яких подія  $A$  відбулася, до кількості всіх проведених випробувань. Відносну частоту події  $A$  позначають  $W(A)$ . Тоді

$$W(A) = \frac{m}{n}, \quad (3.4)$$

де  $m$  – кількість випробувань, у яких відбулася подія  $A$ ;  $n$  – кількість усіх проведених випробувань.

Число, навколо якого групуються значення частоти події  $A$  при великій кількості випробувань, називають ймовірністю події  $A$ :

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} W(A).$$

**Приклад.** При перевірці готової продукції було виявлено 5 бракованих одиниць товару з 200 перевірених. Знайти відносну частоту бракованих одиниць товару.

*Розв'язання.* Нехай подія  $A$  полягає у тому, що виявлено браковану одиницю товару. Тоді відносна частота події  $A$

$$W(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{200} = 0,025.$$

#### 4. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

**Теорема 1.** Ймовірність суми двох несумісних подій  $A$  і  $B$  дорівнює сумі їх ймовірностей

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

**Наслідок 1.** Якщо  $A_1, A_2, \dots, A_n$  - попарно несумісні, то ймовірність їх суми дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

**Наслідок 2.** Ймовірність суми попарно несумісних подій  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , які утворюють повну групу, дорівнює 1, тобто

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

**Наслідок 3.** Події  $A$  і  $\bar{A}$  несумісні і утворюють повну групу подій, тому

$$P\left(A + \bar{A}\right) = P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Звідси

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

**Теорема 2.** Ймовірність суми двох сумісних подій  $A$  і  $B$  дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їхнього добутку:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Введемо поняття залежних і незалежних подій.

Випадкові події  $A$  і  $B$  називають *залежними*, якщо ймовірність появи однієї з них залежить від появи або не появи іншої. В іншому випадку події  $A$  та  $B$  називаються *незалежними*.

**Теорема 3.** Ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку їх ймовірностей

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

**Наслідок.** Ймовірність добутку  $n$  незалежних подій  $A_1, A_2, \dots, A_n$  дорівнює добутку їх ймовірностей:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

Умовною ймовірністю події  $B$  за умови, що подія  $A$  вже відбулась, називається число  $\frac{P(A \cdot B)}{P(A)}$ , яке позначається

$$\frac{P(A \cdot B)}{P(A)} = P(B / A) = P_A(B).$$

**Теорема 4.** Ймовірність добутку двох залежних подій  $A$  і  $B$  дорівнює добутку ймовірності однієї з цих подій на умовну ймовірність іншої події за умови, що перша подія відбулася, тобто

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B / A) = P(B) \cdot P(A / B).$$

**Наслідок.**

Якщо події  $A$  і  $B$  незалежні, то з теореми 4 слідує теорема 3.

**Теорема 5.** Ймовірність добутку  $n$  залежних подій  $A_1, A_2, \dots, A_n$  дорівнює добутку послідовних умовних ймовірностей

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1} \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n / A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1}).$$

**Теорема 6.** Ймовірність появи хоча б однієї з подій  $A_1, A_2, \dots, A_n$  дорівнює різниці між одиницею і ймовірністю добутку заперечень подій  $A_1, A_2, \dots, A_n$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_n) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2 / \bar{A}_1) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n / \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_{n-1})$$

**Наслідок.** Ймовірність появи хоча б однієї з подій  $A_1, A_2, \dots, A_n$

незалежних в сукупності, дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних подій:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n).$$

**Приклад.** У партії з 50 деталей є п'ять бракованих. Яка ймовірність того, що з вибраних навмання 30 деталей не більше однієї бракованої?

**Розв'язання.** Нехай  $A$  – подія, яка відповідає вибору якісних 30 деталей,  $B$  – подія, яка відповідає вибору однієї бракованої деталі із 30 вибраних,  $C$  – не більше однієї бракованої. Отже,  $C = A + B$ . Оскільки події  $A$  і  $B$  несумісні, то

$$P(C) = P(A) + P(B),$$

$$P(A) = \frac{C_{45}^{30}}{C_{50}^{30}} \approx 0,007, \quad P(B) = \frac{C_{45}^{29} \cdot C_5^1}{C_{50}^{30}} \approx 0,065$$

$$\text{Отже, } P(C) \approx 0,072$$

**Приклад.** З 200 студентів 1-г курсу 120 вивчають англійську мову, 100 – німецьку, 60 – обидві мови. Знайти ймовірність, що довільно взятий студент вивчає або англійську, або німецьку мову.

*Розв'язання.*  $A$  – студент вивчає англійську;

$B$  – студент вивчає німецьку.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{120}{200}+\frac{100}{200}-\frac{60}{200}=0,8.$$

**Приклад.** У першій урні міститься 7 білих і 3 чорних кульки; у другій – 5 білих і 5 чорних кульок; у третій – 4 білих і 6 чорних. З кожної урни навмання виймають по одній кульці. Знайти ймовірність того, що серед вибраних кульок виявиться:

а) лише одна біла кулька (подія  $C$ );

б) дві білі кульки (подія  $D$ );

в) три білі кульки (подія  $E$ );

г) хоча б одна біла кулька (подія  $F$ ).

*Розв'язання.* Нехай подія  $A_1 = \{\text{вийняли білу кульку з першої урни}\}$ ,  $A_2 = \{\text{вийняли білу кульку з другої урни}\}$ ,  $A_3 = \{\text{вийняли білу кульку з третьої урни}\}$ . Тоді  $P(A_1)=\frac{7}{10}=0,7$ ,  $P(A_2)=\frac{5}{10}=0,5$ ,  $P(A_3)=\frac{4}{10}=0,4$ .

Події  $A_1, A_2, A_3$  – незалежні.

а) Складні події  $A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$ ,  $\bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3$ ,  $\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3$  – попарно несумісні. Скористуємось формулами (4.7), (4.8).

$$P(C)=P(A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3)=P(A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3)+P(\bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3)+P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3)=0,7 \cdot (1-0,5) \cdot (1-0,4) + (1-0,7) \cdot 0,5 \cdot (1-0,4) + (1-0,7) \cdot (1-0,5) \cdot 0,4 = 0,36;$$

$$\text{б) } P(D)=P(A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3)=0,7 \cdot 0,5 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,5 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,5 \cdot 0,4 = 0,41;$$

$$\text{в) } P(E)=P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)=0,7 \cdot 0,5 \cdot 0,4 = 0,14;$$

$$\text{г) } P(F)=1-P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3)=1-0,9 = 0,91.$$

**Приклад.** В урні 10 куль, з яких 2 білого кольору, а решта чорного. Навмання взято 2 кулі. Знайти ймовірність, що обидві кулі чорного кольору.

*Розв'язання.* Нехай елементарні події:  $A_1$  – перша куля чорна.  $A_2$  – друга куля чорна. Тоді подія  $A = A_1 \cdot A_2$  – обидві кулі чорні. Ймовірність того, що друга куля чорна, буде залежати від того якого кольору перша куля. Якщо перша куля чорна, то ймовірність того, що друга куля також чорна, дорівнює умовній ймовірності події  $A_2$  при умові, що подія  $A_1$  вже відбулася:

$$P(A_2 / A_1) = \frac{7}{9},$$

так як після появи події  $A_1$  - всього куль залишається 9, з них 7 чорних. Звідси

$$P(A)=P(A_1 \cdot A_2)=P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1)=\frac{2}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{45}.$$

## 5. ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ. ФОРМУЛА БАЙЄСА

Якщо випадкова подія може відбутися лише сумісно з однією із несумісних між собою подій  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , що утворюють повну групу, то ймовірність появи події  $A$  обчислюється за *формулою повної ймовірності*

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A/H_n)$$

або

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i), \quad (5.1)$$

де події  $H_1, H_2, \dots, H_n$  – гіпотези, а  $P(A/H_i)$  – умовна ймовірність появи події  $A$  при появі  $i$ -тої гіпотези ( $i=1, 2, \dots, n$ ).

**Приклад.** Із колоди 36 карт навмання дістають карту і не дивлячись відкладають у сторону. Після чого знову дістають карту. Яка ймовірність того, що ця карта туз (подія  $A$ )?

*Розв'язання.* 1-й експеримент – вибір першої карти, 2-й експеримент – вибір другої карти. Нехай подія  $H_1$  – перша карта туз,  $H_2$  – перша карта не туз. Ця задача на формулу повної ймовірності (так як не сказано, що відбулася подія  $A$ ).

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) = \frac{4}{36} \cdot \frac{3}{35} + \frac{32}{36} \cdot \frac{4}{35} = \frac{1}{9}.$$

Умовна ймовірність гіпотези  $H_i$  при умові того, що подія  $A$  відбулася, визначається за формулою ймовірності гіпотез або *формулою Байєса* (вона дозволяє передивитись ймовірності гіпотез після появи події  $A$ ):

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i)} \quad (5.2)$$

**Приклад.** Відповідно до статистичних даних, 40% одержувачів кредиту в банку складають державні організації, 45% – інші банки, 15% – фізичні особи. Також статистика показує, що ймовірність неповернення кредиту в термін 0,01; 0,2; 0,1 відповідно. Начальнику кредитного відділу прийшло повідомлення про неповернення чергового кредиту. Яка ймовірність того, що не сплатила фізична особа?

*Розв'язання.*

Подія  $A$  може відбутись, якщо відбудеться одне з попарно несумісних подій:  $H_1$  – кредит державної організації,  $H_2$  – кредит інших банків,  $H_3$  – кредит фізичної особи.

За формулою Байєса

$$P(H_3/A) = \frac{0,15 \cdot 0,1}{0,40 \cdot 0,01 + 0,45 \cdot 0,02 + 0,15 \cdot 0,1} = 0,536 \approx 54\%$$

*Висновок.* Частина не повернення серед фізичних осіб – 54%.

**Приклад.** По теорії ймовірностей і математичній статистиці маємо 30 екзаменаційних білетів. Студент Шматко вивчив лише 20 білетів. Яким йому краще зайти на іспит, першим чи другим?

*Розв'язання.* Подія  $A$  – студент Шматко заходить першим,

$$P(A) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

Подія  $B$  – студент Шматко заходить другим може відбутись лише з одним із попарно несумісних подій  $A_1, A_2$ , де:

подія  $A_1$  – 1-й студент взяв 1 із 20 білетів, які Шматко знає; подія  $A_2$  – 1-й студент взяв 1 із 10 інших білетів.

$$B = A_1 B + A_2 B,$$

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) = \frac{20}{30} \cdot \frac{19}{29} + \frac{10}{30} \cdot \frac{20}{29} = \frac{2}{3}.$$

Отже, не має різниці зайде студент першим чи другим.

## 6. НЕЗАЛЕЖНІ ПОВТОРНІ ВИПРОБУВАННЯ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛІ

### 6.1 Формула Бернуллі

Нехай проводиться  $n$  незалежних випробувань, причому ймовірність появи події  $A$  в кожному випробуванні одна й та сама, тобто не залежить від її появи в інших випробуваннях. Таку серію повторних незалежних випробувань називають *схемою Бернуллі*. Прикладом повторних незалежних випробувань є підкидання монети певної кількості разів, стрільба по мішені тощо.

Нехай випадкова подія  $A$  може відбутися в кожному випробуванні з однаковою ймовірністю  $P(A)=p$  або не відбутися з ймовірністю  $q=1-p$ . Ймовірність того, що при  $n$  випробуваннях подія  $A$  відбудеться  $k$  разів, визначається за *формулою Бернуллі*:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}. \quad (6.1)$$

Найімовірніша кількість  $k_0$  появи події  $A$  в  $n$  випробуваннях визначається з нерівностей

$$n \cdot p - q \leq k_0 \leq n \cdot p + p.$$

*Формули які часто застосовують в схемі Бернуллі.*

Ймовірність появи події  $A$ :

а) менше  $k$  раз

$$P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k-1);$$

б) більше  $k$  раз

$$P_n(k+1) + P_n(k+2) + \dots + P_n(n);$$

в) не менше  $k$  раз

$$P_n(k) + P_n(k+1) + \dots + P_n(n);$$

г) не більше  $k$  раз

$$P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k);$$

д) хоча б один раз

$$1 - P_n(0).$$

**Приклад.** Прилад складено з 10 блоків, надійність кожного з яких 0,8. Блоки можуть виходити з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що:

- 1) відмовлять два блоки;
- 2) відмовить хоча б один блок;
- 3) відмовлять не менше двох блоків.

Знайти найімовірнішу кількість блоків, що вийдуть із ладу.

*Розв'язання.* Нехай подія  $A$  – відмова блока. Тоді

$$P(A) = p = 1 - 0,8 = 0,2.$$

Тому  $q = 0,8$ . За умовою задачі  $n = 10$ . Застосувавши формулу Бернуллі (6.1) та наслідки з неї, матимемо:

$$1) P_{10}(2) = C_{10}^2 p^2 q^8 = 45 \cdot (0,2)^2 \cdot (0,8)^8 \approx 0,302;$$

$$2) P_{10}(1 \leq k \leq 10) = 1 - q^{10} = 1 - (0,8)^{10} \approx 0,893;$$

$$3) P_{10}(2 \leq k \leq 10) = 1 - [P_{10}(0) + P_{10}(1)] = 1 - C_{10}^0 \cdot (0,2)^0 \cdot (0,8)^{10} - C_{10}^1 \cdot (0,2)^1 \cdot (0,8)^9 \approx 0,624.$$

Найімовірнішу кількість блоків  $k_0$ , що вийдуть із ладу знайдемо з нерівностей

$$10 \cdot 0,2 - 0,8 \leq k_0 \leq 10 \cdot 0,2 + 0,2.$$

Отже,  $k_0 = 2$ .

## 6.2 Наближені формули у схемі Бернуллі

При великій кількості випробувань у схемі Бернуллі зручно користуватися наближеними формулами

Для наближеного обчислення ймовірності появи події  $A$  у  $n$  незалежних випробуваннях  $k$  разів схеми Бернуллі при великих  $n$  і малих  $p$  таких, що  $np < 10$ , доцільно використовувати формулу Пуассона:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad \lambda = np. \quad (6.2)$$

Значення функції  $P_n(k)$  з формули Пуассона наведено в дод.3.

*Локальною функцією Лапласа* називають функцію

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (6.3)$$



Інтегральною функцією Лапласа називають функцію

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (6.4)$$

Значення функцій  $\varphi(x)$ ,  $\Phi(x)$  наведено відповідно в дод.1, 2.

*Зауваження.* Локальна функція Лапласа (або функція Гауса) є парною функцією. А інтегральна функція Лапласа є непарною, а для значень  $x > 5$  вважають  $\Phi(x) = 0,5$ .

Локальна теорема Муавра–Лапласа.

Якщо у схемі Бернуллі кількість випробувань  $n$  достатньо велика, а ймовірність  $p$  появи події  $A$  в усіх випробуваннях однакова та відмінна від нуля й одиниці, то ймовірність появи  $k$  разів події  $A$  можна знайти наближено за формулою

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad (6.5)$$

де  $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ ,  $\varphi(x)$  – локальна функція Лапласа.

Інтегральна теорема Муавра–Лапласа.

Якщо у схемі Бернуллі кількість випробувань  $n$  достатньо велика, а ймовірність  $p$  появи події  $A$  в усіх випробуваннях однакова та відмінна від нуля й одиниці, то ймовірність появи події  $A$  не менше  $k_1$  і не більше  $k_2$  разів можна знайти за наближеною формулою

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad (6.6)$$

де  $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$ ,  $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ ,  $\Phi(x)$  – інтегральна функція Лапласа.

Теорема Бернуллі.

Якщо в  $n$  незалежних випробуваннях ймовірність  $p$  появи події  $A$  однакова й подія  $A$  відбудеться  $m$  разів, то для будь-якого додатного числа  $\varepsilon > 0$  виконується рівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0,$$

тобто подія, для якої відхилення визначається формулою

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| \geq \varepsilon,$$

при великих значеннях  $n$ , майже неможлива. Тому протилежна подія

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon$$

майже достовірна:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Якщо  $m_1 = np - \varepsilon n, m_2 = np + \varepsilon n$ , то

$$x_1 = \frac{np + \varepsilon n - np}{\sqrt{npq}} = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}, \quad x_2 = \frac{np - \varepsilon n - np}{\sqrt{npq}} = -\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}.$$

І тому

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = P(np - \varepsilon n \leq m \leq np + \varepsilon n) = 2\hat{O}\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Ці формули доцільно застосовувати за умови  $np > 100, npq > 20$ .

**Приклад.** Відомо, що процент браку для деякої деталі дорівнює 0,5%. Контролер перевіряє 1000 деталей. Яка ймовірність виявити рівно три браковані деталі? Яка ймовірність виявити не менше трьох бракованих деталей?

*Розв'язання.* Маємо 1000 випробувань Бернуллі з ймовірністю «успіху»  $p=0,005$ . Доцільно застосовувати формулу Пуассона.

За умовою  $n=1000$ ,  $p=0,005$ , отже  $\lambda = np = 5$ , маємо

$$1) P_{1000}(3) = \frac{5^3}{3!} e^{-5} \approx 0,14.$$

$$2) P_{1000}(k \geq 3) = 1 - P_{1000}(k < 3) = 1 - [P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2)] \approx \\ \approx 1 - \left[ e^{-5} + \frac{5}{1!} \cdot e^{-5} + \frac{5^2}{2!} \cdot e^{-5} \right] \approx 0,875$$

$$P_{1000}(k \geq 3) = 1 - P_{1000}(k < 3) = 1 - [P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2)] \approx \\ \approx 1 - \left[ e^{-5} + \frac{5}{1!} \cdot e^{-5} + \frac{5^2}{2!} \cdot e^{-5} \right] \approx 0,875$$

**Приклад.** Гральний кубик підкидають 800 разів. Яка ймовірність того, що кількість очок, кратна трьом, з'явиться 267 разів?

*Розв'язання.* У цій задачі кількість випробувань  $n=800$  досить велика. Ймовірність того, що при підкиданні кубика випаде число, кратне трьом, дорівнює  $p = \frac{1}{3}$  і постійна для всіх випробувань,  $q=1-p=\frac{2}{3}$ . Тому для обчислення ймовірності скористаємося локальною теоремою Муавра – Лапласа. Знайдемо

$$x = \frac{267 - 800 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{40}{3}} = 0,025;$$

$$P_{800}(267) = \frac{3}{40} \Phi(0,025) = \frac{3}{40} \cdot 0,3988 \approx 0,03.$$

**Приклад.** Страхова компанія заключила 40000 договорів. Ймовірність страхового випадку по кожному з них на протязі року складає 2%. Знайти ймовірність, що таких випадків буде не більше 870.

*Розв'язання.* За умовою задачі  $n=40000$ ,  $p=0,02$ . Знаходимо  $q=1-p=0,98$ ,  $np=800$ ,  $\sqrt{npq}=28$ .

Для обчислення  $P(m \leq 870)$  скористаємось інтегральною теоремою Муавра – Лапласа:

$P_{40000}(0 \leq k \leq 870) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$ , де

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 800}{28} = -28,57$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{870 - 800}{28} = 2,5$$

Знаходимо по таблиці значень функції Лапласа (дод.2):

$$P_{40000}(0 \leq k \leq 870) = \Phi(2,5) - \Phi(-28,57) = 0,4938 + 0,5 = 0,9938$$

## ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

### 7. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ЇХ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Ми багато разів уже зустрічалися з такими величинами, кількісне значення яких не може бути раз і назавжди визначене, а міняється під впливом випадкових чинників. Так, кількість хлопчиків, на сотню новонароджених не буде для всіх сотень одним і тим же. Або довжина волокон бавовни певного сорту міняється дуже сильно не тільки для різних районів, де цей сорт виростає, але і навіть для одного куща кожного сорту і в одній коробочці. Вага зерен пшениці, вирощених на деякій ділянці, не рівна деякій певній величині, а міняється від одного зерна до іншого. У наслідок неможливості врахувати вплив всіх чинників (якість ділянки ґрунту, на якій виріс колос з даним зерном, умови освітлення зерна, водний режим і ін.), що визначають зростання зерна, його вага є величиною, що міняється в залежності від випадку.

У кожному з цих прикладів ми маємо справу з величиною, так чи інакше що характеризує собою результат зробленої операції; кожна з цих величин при різних операціях, якими б однорідними ми не старалися зробити умови їх здійснення, може приймати різні значення, у залежності від випадкових відмінностей, що вислизують від нашого контролю, в обстановці цих операцій. Такого роду величини називаються випадковими величинами.

Величина називається **випадковою**, якщо вона в результаті події приймає значення наперед невідоме. Випадкові величини бувають **дискретні** та **неперервні**.

**Дискретною випадковою величиною (ДВВ)** називається така випадкова величина, можливі значення якої утворюють рахункову множину скінчену або нескінчену. Можливі значення ДВВ є окремо ізольовані числа, які ця величина приймає з певними ймовірностями. Іншими словами, можливі значення ДВВ можна пронумерувати. Число можливих значень ДВВ може бути скінченим або нескінченим.

**Неперервною випадковою величиною (НВВ)** називається така випадкова величина, можливі значення якої належать деякому інтервалу скінченому чи нескінченому.

Для опису випадкової величини необхідно навести не лише множину можливих її значень, а й указати, з якими ймовірностями ця величина набуває того чи іншого можливого значення.

З цією метою вводять поняття закону розподілу ймовірностей.

Співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними ймовірностями, називають **законом розподілу випадкової величини**.

Закон розподілу дискретної випадкової величини  $X$  можна задати в аналітичній, табличній формі або графічно.

Табличну форму запису закону розподілу називають **рядом розподілу**:

|                    |       |       |       |     |       |
|--------------------|-------|-------|-------|-----|-------|
| $X = x_i$          | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ... | $x_n$ |
| $P(X = x_i) = p_i$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | ... | $p_n$ |

Зазвичай випадкові величини розміщують в порядку зростання.

Основна властивість таблиці в тому, що сума ймовірностей дорівнює 1:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1 \quad (7.1)$$

Закон розподілу ймовірностей можна зобразити графічно. Для цього візьмемо систему координат  $x_i O p_i$ , відкладемо на осі абсцис можливі значення випадкової величини  $x_i$ , а на осі ординат – ймовірності  $p_i$  цих можливих значень, потім точки з координатами  $(x_i, p_i)$  послідовно сполучимо відрізками прямої. Утворену при цьому фігуру, називають **ймовірнісним многокутником або многокутником розподілу**.

**Приклад.** Закон розподілу дискретної випадкової величини  $X$  задано у табличній формі:

|                    |      |     |     |     |     |     |
|--------------------|------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X = x_i$          | -2,5 | 1   | 3,5 | 5   | 6,5 | 8   |
| $P(X = x_i) = p_i$ | 0,1  | 0,2 | 0,1 | 0,3 | 0,2 | 0,1 |

Побудувати многокутник розподілу.

*Розв'язання:* Многокутник розподілу зображено на рис. 7.1

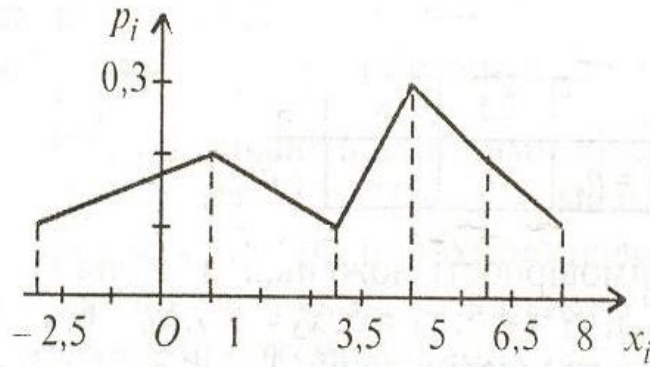


Рис.7.1

Сума ординат ймовірнісного многокутника завжди дорівнює одиниці.

Закон розподілу ймовірностей можна подати в формі, яка придатна і для дискретних і для неперервних випадкових величин, а саме як функцію розподілу випадкової величини  $F(x)$ . Її називають ще **інтегральною функцією розподілу**.

**Функцією розподілу ймовірностей** називається така функція  $F(x)$ , яка для кожного аргументу  $x$  визначає ймовірність того, що випадкова величина  $X$  менше цього аргументу  $x$ :

$$F(x) = P(X < x). \quad (7.2)$$

Властивості функції розподілу впливають із її означення.

$$1. 0 \leq F(x) \leq 1. \quad (7.3)$$

$$2. F(x) \text{ є не спадаючою функцією: якщо } x_1 < x_2, \text{ тоді } F(x_2) \geq F(x_1).$$

3. Імовірність того, що випадкова величина  $X$  набуде можливого значення  $X = x \in (\alpha, \beta)$ , дорівнює приросту інтегральної функції  $F(x)$  на цьому проміжку:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Для неперервних випадкових величин закон розподілу ймовірностей зручно описувати з допомогою функції щільності ймовірностей, яку позначають  $f(x)$ .

**Щільністю ймовірностей** неперервної випадкової величини  $X$  називається перша похідна від функції розподілу  $F(x)$ :

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \quad (7.4)$$

звідки  $dF(x) = f(x)dx$ .

Оскільки

$$P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x) \approx dF(x) = f(x)dx,$$

то добуток  $f(x)dx$  – ймовірність того, що випадкова величина  $X$  міститься у проміжку  $[x, x + dx]$ , де  $dx = \Delta x$ . Функцію щільності розподілу називають ще **диференціальною функцією розподілу**.

Геометрично на графіку щільності ймовірності  $f(x)dx$  відповідає площа прямокутника з основою  $dx$  і висотою  $f(x)$  (рис.7.2).

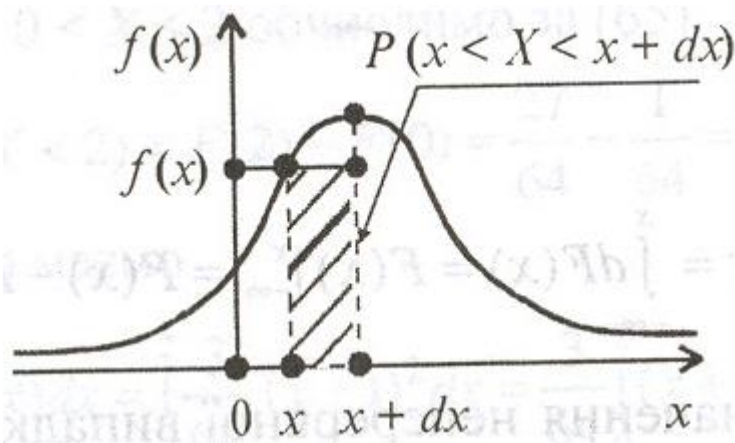


Рис. 7.2

Наведемо властивості функції щільності  $f(x)$ , які є наслідком її означення:

1.  $f(x) \geq 0$ . Ця властивість випливає з означення щільності ймовірності як першої похідної від  $F(x)$  за умови, що  $F(x)$  є неспадною функцією.

2. Площа, яку обмежує функція щільності розподілу та вісь  $OX$ , дорівнює 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1. \quad (7.5)$$

3. Наслідок із властивості (2): якщо неперервна випадкова величина  $X$  визначена лише на проміжку  $[a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = 1. \quad (7.6)$$

4. Імовірність попадання неперервної випадкової величини в інтервал  $[\alpha, \beta]$  обчислюється за формулою

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx. \quad (7.7)$$

5. Функція розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини має вигляд:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx. \quad (7.8)$$

**Приклад** Закон неперервної випадкової величини  $X$  задано у вигляді:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2} \sin x, & 0 < x \leq \pi. \\ 0, & x > \pi \end{cases}$$

Знайти  $F(x)$  і побудувати графіки функцій  $f(x)$ ,  $F(x)$ . Обчислити

$$P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{2}\right)$$

Розв'язання.

1) для  $x \in (-\infty ; 0]$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^x 0 \cdot dx = 0;$$

2) для  $x \in (0 ; \pi]$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \int_0^x \frac{1}{2} \sin x dx = \frac{1}{2} \int_0^x \sin x dx = \\ &= \frac{1}{2} (-\cos x) \Big|_0^x = \frac{1}{2} (-\cos x + 1) = \frac{1 - \cos x}{2}; \end{aligned}$$

3) для  $x \in (\pi ; +\infty)$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx + \int_{\pi}^x f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin x dx + \int_{\pi}^x 0 \cdot dx = \frac{1}{2} (-\cos x) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} (-\cos \pi + \cos 0) = 1. \end{aligned}$$

Отже, функція розподілу ймовірностей буде така:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2} (1 - \cos x), & 0 < x \leq \pi. \\ 1, & x > \pi \end{cases}$$

Графіки функцій  $f(x)$ ,  $F(x)$  зображені відповідно на рис. 7.3 і 7.4.

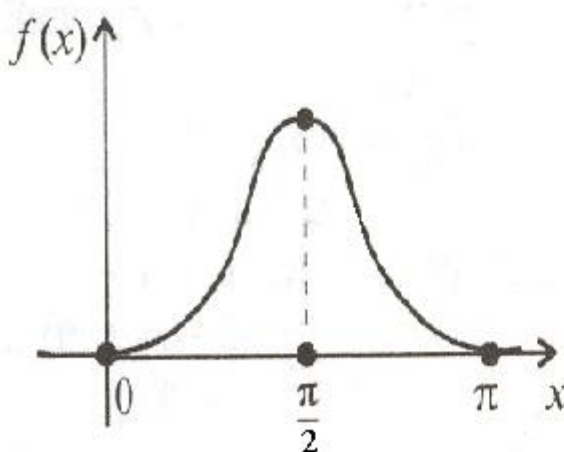


Рис.7.3

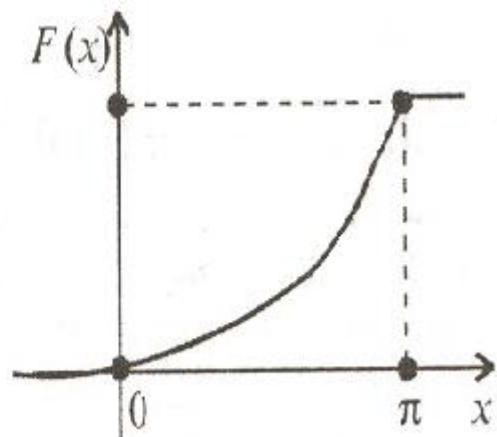


Рис.7.4

**Приклад.** Дискретна випадкова величина задана рядом розподілу.

|           |    |    |   |   |   |    |
|-----------|----|----|---|---|---|----|
| $X = x_i$ | -4 | -1 | 2 | 6 | 9 | 13 |
|-----------|----|----|---|---|---|----|

|                    |     |     |     |  |     |     |
|--------------------|-----|-----|-----|--|-----|-----|
| $P(X = x_i) = p_i$ | 0,1 | 0,2 | 0,1 |  | 0,1 | 0,2 |
|--------------------|-----|-----|-----|--|-----|-----|

Необхідно:

1. Обчислити та записати пропущену ймовірність  $p_4$ .
2. Підрахувати ймовірність попадання в указані інтервали:  $P(X < 5)$ ,  $P(X > 9)$ ,  $P(-2 < X < 9)$ ,  $P(10 < X < 20)$ .
3. Обчислити значення функції розподілу  $F(x)$  в указаних точках:  $F(0)$ ,  $F(3)$ ,  $F(10)$ ,  $F(40)$ .
4. Побудувати багатокутник розподілу.

Розв'язання:

1. Згідно із властивістю ряду розподілу  $\sum_{i=1}^6 p_i = 1$  маємо, що

$$p_4 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_5 + p_6),$$

$$p_4 = 1 - (0,1 + 0,2 + 0,1 + 0,1 + 0,2) = 1 - 0,7 = 0,3.$$

2. Згідно з формулою (4) обчислюємо:

$$P(X < 5) = P(-\infty < X < 5) = P(X = -4 \cup X = -1 \cup X = 2) =$$

$$= P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) = 0,1 + 0,2 + 0,1 = 0,4;$$

$$P(X > 9) = P(9 < X < +\infty) = P(X = 13) = 0,2;$$

$$P(-2 < X < 9) = P(X = -1 \cup X = 2 \cup X = 6) = P(X = -1) +$$

$$+ P(X = 2) + P(X = 6) = 0,2 + 0,1 + 0,3 = 0,6;$$

$$P(0 < X < 20) = P(X = 2 \cup X = 6 \cup X = 9 \cup X = 13) =$$

$$= P(X = 2) + P(X = 6) + P(X = 9) + P(X = 13) =$$

$$= 0,1 + 0,3 + 0,1 + 0,2 = 0,7.$$

3. Згідно з функцією розподілу (2) маємо:

$$1) F(0) = P(X < 0) = P(X = -4 \cup X = -1) = P(X = -4) + P(X = -1) =$$

$$= 0,1 + 0,2 = 0,3;$$

$$2) F(3) = P(X < 3) = P(X = -4 \cup X = -1 \cup X = 2) = P(X = -4) +$$

$$+ P(X = -1) + P(X = 2) = 0,1 + 0,2 + 0,1 = 0,4;$$

$$3) F(10) = P(X < 10) = P(X = -4 \cup X = -1 \cup X = 2 \cup X = 6 \cup X = 9) =$$

$$= P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 6) + P(X = 9) =$$

$$= 0,1 + 0,2 + 0,1 + 0,3 + 0,1 = 0,8;$$

$$4) F(40) = P(X < 40) =$$

$$= P(X = -4 \cup X = -1 \cup X = 2 \cup X = 6 \cup X = 9 \cup X = 13) =$$

$$= P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 6) + P(X = 9) +$$

$$+ P(X = 13) = 0,1 + 0,2 + 0,1 + 0,3 + 0,1 + 0,2 = 1.$$

4. Многокутник розподілу зображено на рис. 7.5.



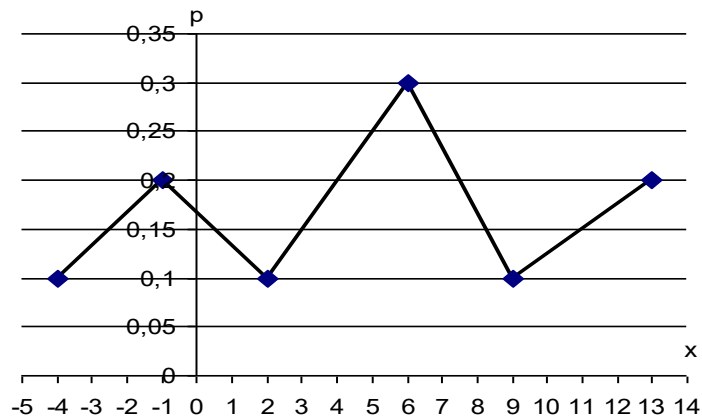


Рис. 7.5

## 8. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

На практиці не має потреби так докладно описувати ці величини, а достатньо знати лише певні параметри, що характеризують їх істотні ознаки. Ці параметри і називають **числовими характеристиками випадкових величин**. Числові характеристики поділяють на два типи: точкові та інтервальні.

Найчастіше на практиці використовують точкову характеристику, яку називають **математичним сподіванням**.

Термін «математичне сподівання» випадкової величини  $X$  є синонімом терміну «середнє значення» випадкової величини  $X$ .

Математичним сподіванням називається величина для ДВВ –

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \quad (8.1)$$

для НВВ –

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \quad (8.2)$$

Якщо неперервна випадкова величина  $X$  визначена лише на проміжку  $[a, b]$ , то

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx. \quad (8.3)$$

**Модю (Мо) дискретної випадкової величини  $X$**  називають те її можливе значення, якому відповідає найбільша ймовірність появи.

**Модю для неперервної випадкової величини  $X$**  називають те її можливе значення, якому відповідає максимальне значення щільності

ймовірності:

$$f(M_o) = \max \quad (8.4)$$

Якщо випадкова величина має одномоду, то такий розподіл ймовірностей називають *одномодальним*; якщо розподіл має дві моди – *двомодальним* і т. ін. Існують і такі розподіли, які не мають моди. Їх називають *антимодальними*.

**Медіаною (Me) неперервної випадкової величини  $X$**  визначається як значення фізичної величини, яке ділить площу під диференціальною функцією на дві рівні частини

$$P(X < M_e) = P(X > M_e) = \frac{1}{2},$$
$$F(M_e) = 0,5. \quad (8.5)$$

Отже, рівняння (8.5) є рівнянням для визначення медіани.

Математичне сподівання називають центром тяжіння, центром розподілу або центром розсіювання. Для вимірювання розсіювання використовують інтервальну числову характеристику, яку називають **дисперсією**.

Для визначення дисперсії використовують центровану випадкову величину – відхилення випадкової величини  $X$  від свого математичного сподівання  $(X - M(X))$ . Зазначимо, що математичне сподівання такого відхилення дорівнює нулю:

$$M(X - M(X)) = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0.$$

**Дисперсією** випадкової величини називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини від свого математичного сподівання:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 \quad (8.6)$$

Використання властивостей математичного сподівання дозволяє це співвідношення записати у вигляді:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2. \quad (8.7)$$

Це дозволяє дати визначення дисперсії наступним чином: **дисперсія** випадкової величини – це є різниця між математичним сподіванням квадрата випадкової величини та квадратом математичного сподівання.

Для ДВВ дисперсію можна визначити за формулами:

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 \cdot p_i \quad (8.8)$$

або

$$D(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - (M(X))^2. \quad (8.9)$$

Для НВВ:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx \quad (8.10)$$

або

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2. \quad (8.11)$$

Слід пам'ятати, що дисперсія не може бути від'ємною величиною ( $D(X) \geq 0$ ).

Отже, дисперсія характеризує квадрат розсіювання випадкової величини відносно свого математичного сподівання. Тому доцільно мати числову характеристику такої вимірності, як і сама випадкова величина. Такою числовою характеристикою є середнє квадратичне відхилення.

**Середнім квадратичним відхиленням** випадкової величини  $X$  називають корінь квадратний із дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (8.12)$$

**Приклад.** Стрілець робить по мішені 3 постріли. Ймовірність влучення у мішень при кожному пострілі дорівнює 0,3. Побудувавши ряд розподілу та функцію розподілу випадкової величини  $X$  – числа влучень у мішень. Знайти математичне очікування та дисперсію.

*Розв'язання:*

Оскільки  $X$  – число  $k$  (число влучень у мішень), то її можливі значення  $X_1=0$ ;  $X_2=1$ ;  $X_3=2$ ;  $X_4=3$ . За законом біноміального розподілу знайдемо ймовірність появ випадкової величини  $X$ .

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k};$$

$$p=0,3;$$

$$q=1-p=0,7.$$

$$P_1(X = 0) = C_3^0 p^0 q^3 = \frac{3!}{0! 0!} (0,3)^0 (0,7)^3 = 0,343,$$

$$P_2(X = 1) = C_3^1 p^1 q^2 = \frac{3!}{1! 2!} (0,3)^1 (0,7)^2 = 0,441,$$

$$P_3(X = 2) = C_3^2 p^2 q = \frac{3!}{2! 1!} (0,3)^2 (0,7)^1 = 0,189,$$

$$P_4(X = 3) = C_3^3 p^3 q^0 = \frac{3!}{3! 0!} (0,3)^3 (0,7)^0 = 0,027.$$

Перевіримо отримані результати, якщо результати правильні, то принаймні.

$$\sum_{i=1}^4 P_i = 1,$$

$$\sum_{i=1}^4 P_i = 0,343 + 0,441 + 0,189 + 0,027 = 1,$$

$$\sum_{i=1}^4 P_i = 1,$$

Отримали ряд розподілу:

|          |       |       |       |       |
|----------|-------|-------|-------|-------|
| <b>X</b> | 0     | 1     | 2     | 3     |
| <b>P</b> | 0,343 | 0,441 | 0,189 | 0,027 |

Знайдемо тепер математичне очікування:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

$$M(X) = 0 \cdot 0,343 + 1 \cdot 0,441 + 2 \cdot 0,189 + 3 \cdot 0,027 = 1,2$$

$$\text{та дисперсію } D(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - (M(X))^2.$$

$$D(X) = 0^2 \cdot 0,343 + 1^2 \cdot 0,441 + 2^2 \cdot 0,189 + 3^2 \cdot 0,027 - (1,2)^2 = 0,84$$

**Приклад.** Випадкова величина  $X$  задана функцією розподілу

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{5}, & 0 \leq x \leq 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}$$

Потрібно знайти:

- а) щільність ймовірності;
- б) математичне очікування;
- в) дисперсію;
- г) побудувати графік функції розподілу випадкової величини  $X$ .

*Розв'язання:* а) Оскільки  $f(x) = F'(x) = \frac{dF}{dx}$ , де  $f(x)$  – щільність ймовірності, то

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{5}, & 0 \leq x \leq 5 \\ 0, & x > 5 \end{cases}$$

б) Оскільки випадкова величина  $X$  не є дискретною, то її математичне очікування знайдемо за формулою

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

Використовуємо цю формулу тому, що  $f(x) \neq 0$  лише на відрізьку  $[0; 4]$ .

$$M(X) = \int_0^5 x \cdot \frac{1}{5} dx = \frac{1}{5} \int_0^5 x dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^5 = \frac{1}{5} \cdot \frac{5^2}{2} - 0 = 2,5.$$

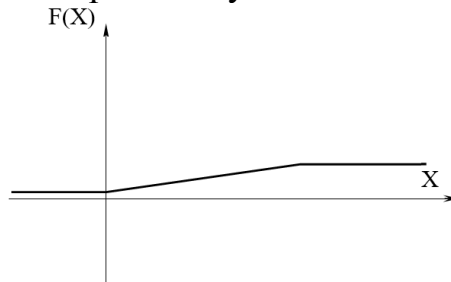
в) Для знаходження дисперсії використаємо формулу

$$D(X) = \int_a^b x^2 \cdot f(x) dx - [M(x)]^2 ;$$

( $f(X) \neq 0$ , якщо  $X \in [a; b]$ );

$$D(X) = \int_0^5 x^2 \cdot \frac{1}{5} dx - 2,5^2 = \frac{1}{5} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^5 - 6,25 = \frac{1}{5} \cdot \frac{125}{3} - 6,25 = 2,08 .$$

г) Побудуємо графік функції розподілу випадкової величини X:



## 9. НАЙБІЛЬШ ПОШИРЕНІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ

Розглянемо найбільш поширені закони розподілу випадкових величин.

**1. Біноміальний розподіл.** Цілочислова випадкова величина (ДВВ)  $X$  має біноміальний закон розподілу, якщо ймовірність її можливих значень обчислюється за формулою Бернуллі:

$$P_k = P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} ,$$

де  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .

Числові характеристики розподілу визначаються наступним чином:

$$M(X) = np, \quad D(X) = npq, \quad \sigma(X) = \sqrt{npq} .$$

**2. Пуассонівський розподіл.** Цілочислова випадкова величина (ДВВ)  $X$  має пуассонівський закон розподілу, якщо ймовірність її можливих значень обчислюється за формулою Пуассона:

$$P_k = P(X = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a} ,$$

де  $a = np, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$ .

Числові характеристики розподілу визначаються наступним чином:

$$M(X) = a = np, \quad D(X) = a, \quad \sigma(X) = \sqrt{a} .$$

**3. Геометричний розподіл.** Цілочислова випадкова величина (ДВВ)  $X$  має геометричний закон розподілу, якщо ймовірність її можливих значень обчислюється за формулою

$$P_k = P(X = k) = pq^{k-1} ,$$

де  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .

Тут  $p$  – ймовірність появи випадкової події в кожній спробі – є величиною сталою,  $q = 1 - p$ . Числові характеристики розподілу визначаються наступним чином:

$$M(X) = \frac{1}{p}, \quad D(X) = \frac{q}{p^2}, \quad \sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p}.$$

**4. Рівномірний закон розподілу.** Неперервна випадкова величина  $(НВВ)_X$ , що визначена на проміжку  $[a, b]$ , має рівномірний закон розподілу, якщо

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{1}{b-a}, & a < x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

Функція розподілу ймовірностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Числові характеристики:

$$M(X) = \frac{b+a}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}, \quad M_e = M(X) = \frac{b+a}{2}.$$

**5. Нормальний розподіл.** Неперервна випадкова величина  $(НВВ)_X$  має нормальний закон розподілу ймовірностей, якщо її функція щільності має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < X < \infty,$$

де  $a = M(X)$ ,  $\sigma = \sigma(X)$ .

Отже, нормальний закон визначається звідси параметрами  $a$  і  $\sigma$  і називається загальним. Тоді функція розподілу

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx, \quad M_e = a.$$

Для обчислення ймовірності попадання в інтервал  $(\alpha, \beta)$  використовують наступні формули

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

**6. Експоненціальний закон розподілу.** Неперервна випадкова величина  $(НВВ)_X$  має експоненціальний закон розподілу, якщо

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Функція розподілу ймовірностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Числові характеристики:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}, M_e = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

## МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

### 10. ВАРІАЦІЙНІ РЯДИ. ДИСКРЕТНИЙ СТАТИСТИЧНИЙ РОЗПОДІЛ ВИБІРКИ

Предметом дослідження теорії ймовірності є так звана **генеральна сукупність**, яка включає усю вивчаєму сукупність однорідних елементів, предметів, понять (кінцеву або безкінцеву), предметом вивчення математичної статистики є **вибірка**. Теорія ймовірностей є теоретико-математичною базою математичної статистики.

**Вибірка** – це частина *випадково* відібраних з генеральної сукупності елементів.

Основним методом математичної статистики є **вибірковий метод**, який полягає в тому, що по порівняно невеликій вибірці робляться висновки об усій генеральній сукупності (випадковій величині  $X$ ).

Кількісні ознаки елементів генеральної сукупності можуть бути одновимірними і багатовимірними, дискретними і неперервними.

Коли реалізується вибірка, кількісна ознака, наприклад  $X$ , набуває конкретних числових значень ( $X = x_i$ ), які називають **варіантами**.

Зростаючий числовий ряд варіант називають **варіаційним**.

Кожна варіанта вибірки може бути спостереженою  $n_i$  раз ( $n_i \geq 1$ ), число  $n_i$  називають **частотою варіанти**  $x_i$ .

При цьому 
$$n = \sum_{i=1}^k n_i,$$

де  $k$  – кількість варіант, що різняться числовим значенням;  
 $n$  – обсяг вибірки.

Відношення частоти  $n_i$  варіанти  $x_i$  до обсягу вибірки  $n$  називають її *відносною частотою* і позначають через  $W_i$ , тобто

$$W_i = \frac{n_i}{n}. \quad (10.1)$$

Для кожної вибірки виконується рівність

$$\sum_{i=1}^k W_i = 1. \quad (10.2)$$

Якщо досліджується ознака генеральної сукупності  $X$ , яка є **дискретною**, то варіанти, які розміщені у зростаючій послідовності, утворюють **дискретний варіаційний ряд**.

Якщо досліджується ознака генеральної сукупності  $X$ , яка є **неперервною**, то варіант буде багато. У цьому разі варіаційний ряд – це певна кількість рівних або нерівних частинних інтервалів чи груп варіант зі своїми частотами.

Такі частинні інтервали варіант, які розміщені у зростаючій послідовності, утворюють **інтервальний варіаційний ряд**.

Перелік варіант варіаційного ряду і відповідних їм частот, або відносних частот, називають *дискретним статистичним розподілом вибірки*.

У табличній формі він має такий вигляд:

|           |       |       |       |     |       |
|-----------|-------|-------|-------|-----|-------|
| $X = x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ... | $x_k$ |
| $n_i$     | $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | ... | $n_k$ |
| $W_i$     | $W_1$ | $W_2$ | $W_3$ | ... | $W_k$ |

Дискретний статистичний розподіл вибірки можна подати емпіричною функцією  $F^*(x)$ .

**Емпірична функція  $F^*(x)$  та її властивості.** Функція аргументу  $x$ , що визначає відносну частоту події  $X < x$ , тобто

$$F^*(x) = W(X < x) = \frac{n_x}{n}, \quad (10.3)$$

називається емпіричною функцією, або кумулятою.

де  $n$  – обсяг вибірки;

$n_x$  – кількість варіант статистичного розподілу вибірки, значення яких менше за фіксовану варіанту  $x$ ;

$F^*(x)$  – називають ще функцією нагромадження відносних частот.

Властивості  $F^*(x)$ :

1)  $0 \leq F^*(x) \leq 1$ ;

2)  $F(x_{\min}) = 0$ , де  $x_{\min}$  є найменшою варіантою варіаційного ряду;

3)  $F(x) \Big|_{x > x_{\max}} = 1$ , де  $x_{\max}$  є найбільшою варіантою варіаційного ряду;

4)  $F(x)$  є неспадною функцією аргументу  $x$ , а саме:  $F(x_2) \geq F(x_1)$  при  $x_2 \geq x_1$ .

**Полігон частот і відносних частот.** Дискретний статистичний розподіл вибірки можна зобразити графічно у вигляді ламаної лінії, відрізки якої сполучають координати точок  $(x_i; n_i)$  або  $(x_i; W_i)$ .

У першому випадку ламану лінію називають *полігоном частот*, у другому – *полігоном відносних частот*.

Числові характеристики:



1) *вибіркова середня величина*  $\bar{x}_B$ . Величину, яка визначається формулою

$$\bar{x}_B = \frac{\sum x_i n_i}{n}, \quad (10.4)$$

називають вибірковою середньою величиною дискретного статистичного розподілу вибірки.

Де  $x_i$  – варіанта варіаційного ряду вибірки;

$n_i$  – частота цієї варіанти;

$n$  – обсяг вибірки ( $n = \sum n_i$ ).

2) *відхилення варіант*. Різницю  $(x_i - \bar{x}_B)n_i$  називають відхиленням варіант.

При цьому

$$\sum (x_i - \bar{x}_B)n_i = \sum x_i n_i - \sum \bar{x}_B n_i = n \cdot \bar{x}_B - n \cdot \bar{x}_B = 0.$$

Отже, сума відхилень усіх варіант варіаційного ряду вибірки завжди дорівнює нулеві;

3) *мода* ( $Mo^*$ ). *Модойо дискретного статистичного розподілу вибірки* називають варіанту, що має найбільшу частоту появи.

Мод може бути кілька. Коли дискретний статистичний розподіл має одну моду, то він називається *одномодальним*, коли має дві моди – *двомодальним* і т. д.;

4) *медіана* ( $Me^*$ ). *Медіаною дискретного статистичного розподілу вибірки* називають варіанту, яка поділяє варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант;

5) *дисперсія*. Для вимірювання розсіювання варіант вибірки відносно  $\bar{x}_B$  вибирається дисперсія.

*Дисперсія вибірки* – це середнє арифметичне квадратів відхилень варіант відносно  $\bar{x}_B$ , яке обчислюється за формулою

$$D_B = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_B)^2 n_i}{n}$$

або

$$D_B = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x}_B)^2; \quad (10.5)$$

6) *середнє квадратичне відхилення вибірки*  $\sigma_B$ . При обчисленні  $D_B$  відхилення підноситься до квадрата, а отже, змінюється одиниця виміру ознаки  $X$ , тому на основі дисперсії вводиться середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_B = \sqrt{D_B}, \quad (10.6)$$

яке вимірює розсіювання варіант вибірки відносно  $\bar{x}_B$ , але в тих самих одиницях, в яких вимірюється ознака  $X$ ;

7) *розмах (R)*. Для грубого оцінювання розсіювання варіант відносно  $\bar{x}_B$  застосовується величина, яка дорівнює різниці між найбільшою  $x_{\max}$  і найменшою  $x_{\min}$  варіантами варіаційного ряду.

Ця величина називається *розмахом*

$$R = x_{\max} - x_{\min}. \quad (10.7)$$

8) *коефіцієнт варіації V*. Для порівняння оцінок варіацій статистичних рядів із різними значеннями  $\bar{x}_B$ , які не дорівнюють нулеві, вводиться коефіцієнт варіації, який обчислюється за формулою

$$V = \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} 100\%. \quad (10.8)$$

**Приклад.** За заданим дискретним статистичним розподілом вибірки

|           |      |     |      |     |     |     |
|-----------|------|-----|------|-----|-----|-----|
| $X = x_i$ | -6   | -4  | -2   | 2   | 4   | 6   |
| $n_i$     | 5    | 10  | 15   | 20  | 40  | 10  |
| $W_i$     | 0,05 | 0,1 | 0,15 | 0,2 | 0,4 | 0,1 |

потрібно:

1. Побудувати  $F^*(x)$  і зобразити її графічно;
2. Накреслити полігони частот і відносних частот;
3. Обчислити  $\bar{x}_B$ ,  $D_B$ ,  $\sigma_B$ ;
4. Знайти  $Mo^*$ ,  $Me^*$ ;
5. Обчислити  $R$ ,  $V$

*Розв'язання.* Згідно з означенням та властивостями  $F^*(x)$  має такий вигляд:

$$F^*(x) = W(X < x) = \frac{n_x}{n} = \begin{cases} 0, & x \leq -6, \\ 0,05, & -6 < x \leq -4, \\ 0,15, & -4 < x \leq -2, \\ 0,3, & -2 < x \leq 2, \\ 0,5, & 2 < x \leq 4, \\ 0,9, & 4 < x \leq 6, \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$

Графічне зображення  $F^*(x)$  подано на рис. 10.1.

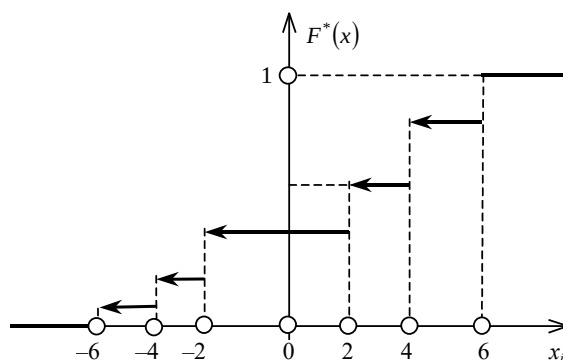


Рис.10.1

Полігони частот та відносних частот зображено на рис. 10.2, 10.3.

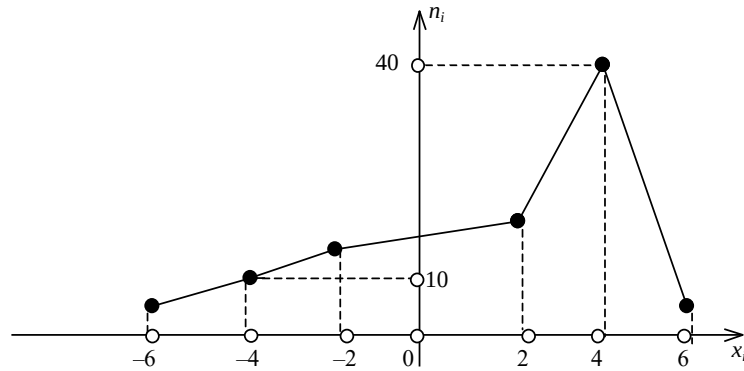


Рис. 10.2

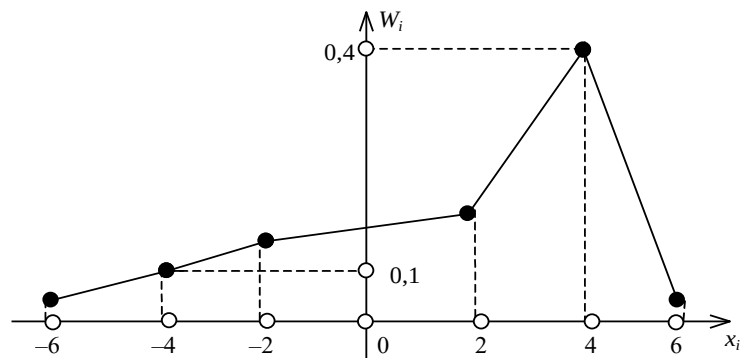


Рис.10.3

Оскільки  $n = \sum n_i = 100$ , то згідно з формулами (10.4), (10.5), (10.6) дістанемо:

$$\bar{x}_B = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{-6 \cdot 5 + (-4) \cdot 10 + (-2) \cdot 15 + 2 \cdot 20 + 4 \cdot 40 + 6 \cdot 10}{100} = 1,6$$

$$\bar{x}_B = 1,6$$

Для обчислення  $D_B$  визначається

$$\frac{\sum x_i^2 n_i}{n} = \frac{(-6)^2 \cdot 5 + (-4)^2 \cdot 10 + (-2)^2 \cdot 15 + (2)^2 \cdot 20 + (4)^2 \cdot 40 + (6)^2 \cdot 10}{100} = 14,8.$$

Тоді

$$D_B = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x}_B)^2 = 14,8 - (1,6)^2 = 12,24.$$

$$D_B = 12,24.$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{12,24} \approx 3,5.$$

$$\sigma_B = 3,5.$$

$$Mo^* = 4.$$

Отже, наведений статистичний розподіл вибірки буде одномодальним.

$Me^* = (2+4)/2=3$ , оскільки варіанти  $x = 2$  та  $x = 4$  поділяють варіаційний ряд на дві частини:, які мають однакову кількість варіант.

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 6 - (-6) = 12.$$

$$V = \frac{\sigma_B}{x_B} 100\% = \frac{3,5}{1,6} 100\% = 219\%.$$

## 11. ІНТЕРВАЛЬНИЙ СТАТИСТИЧНИЙ РОЗПОДІЛ ВИБІРКИ

Перелік часткових інтервалів і відповідних їм частот, або відносних частот, називають **інтервальним статистичним розподілом вибірки**.

У табличній формі цей розподіл має такий вигляд:

|       |             |             |             |     |                 |
|-------|-------------|-------------|-------------|-----|-----------------|
| $h$   | $x_1 - x_2$ | $x_2 - x_3$ | $x_3 - x_4$ | ... | $x_{k-1} - x_k$ |
| $n_i$ | $n_1$       | $n_2$       | $n_3$       | ... | $n_k$           |
| $W_i$ | $W_1$       | $W_2$       | $W_3$       | ... | $W_k$           |

Тут  $h = x_i - x_{i-1}$  є довжиною часткового  $i$ -го інтервалу. Як правило, ці інтервали беруться однаковими.

Інтервальний статистичний розподіл вибірки можна подати графічно у вигляді гістограми частот або відносних частот, а також, як і для дискретного статистичного розподілу, емпіричною функцією  $F^*(x)$  (комулятою).

**Гістограма частот та відносних частот.** Гістограма частот являє собою фігуру, яка складається з прямокутників, кожний з яких має основу  $h$  і висоту

$$n_i \frac{1}{h}.$$

Гістограма відносних частот є фігурою, що складається з прямокутників, кожний з яких має основу завдовжки  $h$  і висоту, що дорівнює  $W_i \frac{1}{h}$ .

**Приклад.** За заданим інтервальним статистичним розподілом вибірки

|         |     |      |       |       |       |       |
|---------|-----|------|-------|-------|-------|-------|
| $h = 8$ | 0–8 | 8–16 | 16–24 | 24–32 | 32–40 | 40–48 |
| $n_i$   | 10  | 15   | 20    | 25    | 20    | 10    |
| $W_i$   | 0,1 | 0,15 | 0,2   | 0,25  | 0,2   | 0,1   |

потрібно побудувати гістограму частот і відносних частот.

**Розв'язання.** Гістограми частот і відносних частот наведені на рис. 11.1, 11.2.

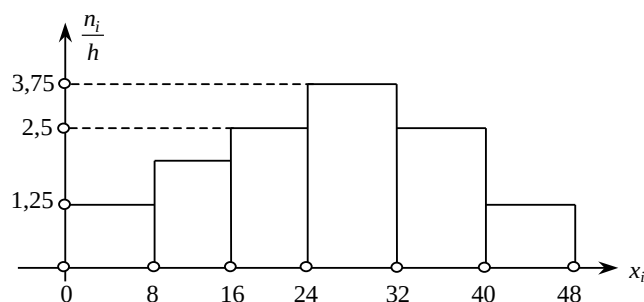


Рис.11.1

$$\text{Площа гістограми частот } S = \sum h \frac{n_i}{h} = \sum n_i = n = 100.$$

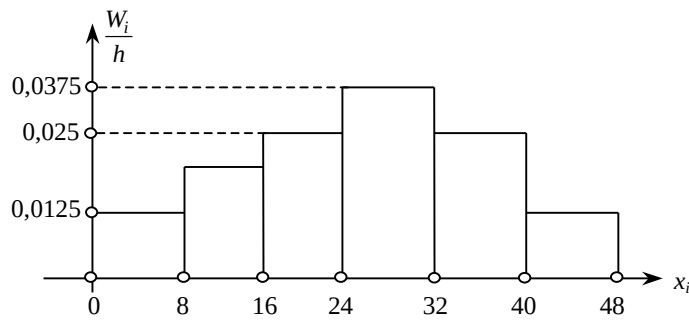


Рис. 11.2

Площа гістограми відносних частот

$$S = \sum h \frac{W_i}{h} = \sum W_i = 1.$$

**Емпірична функція  $F^*(x)$  (кумулята).** При побудові кумюляти  $F^*(x)$  для інтервального статистичного розподілу вибірки за основу береться припущення, що ознака на кожному частинному інтервалі має рівномірну щільність імовірностей. Тому кумюлята матиме вигляд ламаної лінії, яка зростає на кожному частковому інтервалі і наближається до одиниці.

**Приклад.** Для заданого інтервального статистичного розподілу вибірки

|          |      |       |       |       |       |       |
|----------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $h = 10$ | 0–10 | 10–20 | 20–30 | 30–40 | 40–50 | 50–60 |
| $n_i$    | 5    | 15    | 20    | 25    | 30    | 5     |

побудувати  $F^*(x)$  і подати її графічно.

*Розв'язання.*

$$F^*(x) = W(X < x) = \frac{n_x}{n} = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 0,05 & 0 < x \leq 10, \\ 0,2 & 10 < x \leq 20, \\ 0,4 & 20 < x \leq 30, \\ 0,65 & 30 < x \leq 40, \\ 0,95 & 40 < x \leq 50, \\ 1 & 50 < x \leq 60. \end{cases}$$

Графік  $F^*(x)$  зображено на рис. 11.3.

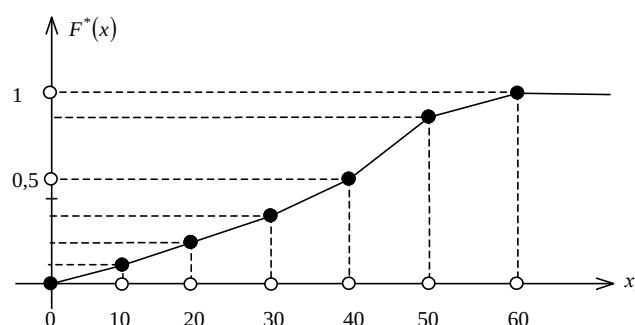


Рис. 11.3

Аналогом емпіричної функції  $F^*(x)$  у теорії ймовірностей є інтегральна функція  $F(x) = P(X < x)$ .

**Медіана.** Для визначення медіани інтервального статистичного розподілу вибірки необхідно визначити медіанний частковий інтервал. Якщо, наприклад, на  $i$ -му інтервалі  $[x_{i-1} - x_i]$   $F^*(x_{i-1}) < 0,5$  і  $F^*(x_i) > 0,5$ , то, беручи до уваги, що досліджувана ознака  $X$  є неперервною і при цьому  $F^*(x)$  є неспадною функцією, всередині інтервалу  $[x_{i-1} - x_i]$  неодмінно існує таке значення  $X = Me$ , де  $F^*(Me) = 0,5$ .

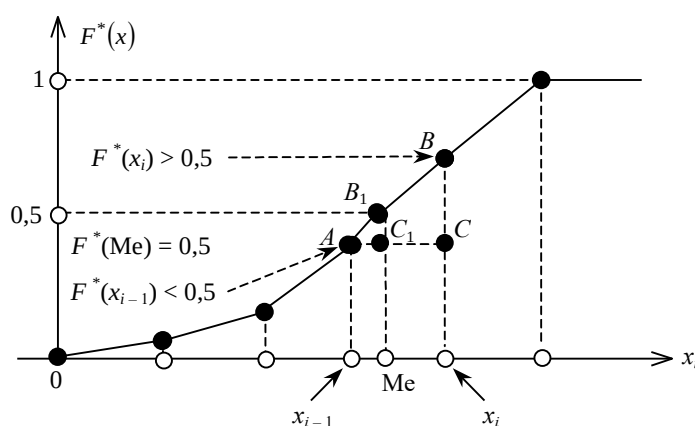


Рис. 11.4

З подібності трикутників  $\triangle ABC$  і  $\triangle AB_1C_1$ , зображених на рис. 11.4, маємо:

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{Me^* - x_{i-1}} = \frac{F^*(x_i) - F^*(x_{i-1})}{0,5 - F^*(x_{i-1})} \rightarrow$$

$$Me^* = x_{i-1} + \frac{0,5 - F^*(x_{i-1})}{F^*(x_i) - F^*(x_{i-1})} h \quad (11.1)$$

де  $h = x_i - x_{i-1}$  називають *кроком*.

**Мода.** Для визначення моди інтервального статистичного розподілу необхідно знайти модальний інтервал, тобто такий частинний інтервал, що має найбільшу частоту появи.

Використовуючи лінійну інтерполяцію, моду обчислимо за формулою

$$Mo^* = x_{i-1} + \frac{n_{Mo} - n_{Mo-1}}{2n_{Mo} - n_{Mo-1} - n_{Mo+1}} h, \quad (11.2)$$

де  $x_{i-1}$  – початок модального інтервалу;  
 $h$  – довжина, або крок, часткового інтервалу;  
 $n_{Mo}$  – частота модального інтервалу;

$n_{Mo-1}$  — частота домодального інтервалу;

$n_{Mo+1}$  — частота післямодального інтервалу.

$\bar{x}_B, D_B, \sigma_B$  для інтервального статистичного розподілу вибірки. Для визначення  $\bar{x}_B, D_B, \sigma_B$  перейдемо від інтервального розподілу до дискретного, варіантами якого є середини часткових інтервалів  $x_i^* = x_{i-1} + \frac{h}{2} = x_i - \frac{h}{2}$ , і який має такий вигляд:

|                                                     |         |         |         |     |         |
|-----------------------------------------------------|---------|---------|---------|-----|---------|
| $x_i^* = x_i - \frac{h}{2} = x_{i-1} + \frac{h}{2}$ | $x_1^*$ | $x_2^*$ | $x_3^*$ | ... | $x_k^*$ |
| $h_i$                                               | $h_1$   | $h_2$   | $h_3$   | ... | $h_k$   |

Тоді  $\bar{x}_B, D_B, \sigma_B$  обчислюються за формулами:

$$\bar{x}_B = \frac{\sum x_i^* n_i}{h}; \quad (11.3)$$

$$D_B = \frac{\sum (x_i^*)^2 n_i}{h} - (\bar{x}_B)^2; \quad (11.4)$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B}. \quad (11.5)$$

**Приклад.** За заданим інтервальним статистичним розподілом вибірки

|         |     |     |      |       |       |       |
|---------|-----|-----|------|-------|-------|-------|
| $h = 4$ | 0–4 | 4–8 | 8–12 | 12–16 | 16–20 | 20–24 |
| $n_i$   | 6   | 14  | 20   | 25    | 30    | 5     |

побудувати гістограму частот. Визначити  $Mo^*$ ,  $Me^*$ . Обчислити  $\bar{x}_B, D_B, \sigma_B$ .

*Розв'язання.* Гістограма частот зображена на рис. 11.5.

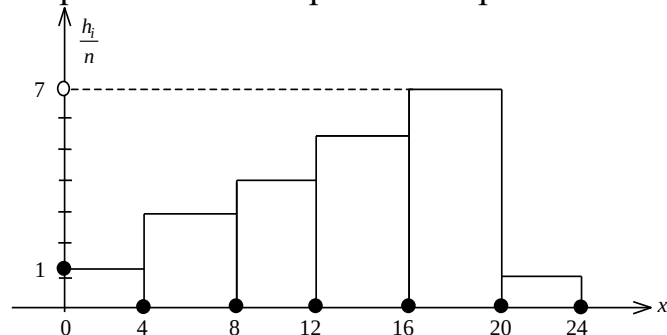


Рис. 11.5

З рис.11.5 визначається модальний інтервал, який дорівнює 16–20.

Застосовуючи (11.2) і беручи до уваги, що  $n_{Mo} = 30$ ,  $n_{Mo-1} = 25$ ,  $n_{Mo+1} = 5$ ,  $h = 4$ ,  $x_{i-1} = 16$ , дістанемо

$$Mo^* = x_{i-1} + \frac{n_{Mo} - n_{Mo-1}}{2n_{Mo} - n_{Mo-1} - n_{Mo+1}} h;$$

$$Mo^* = 16 + \frac{30 - 25}{60 - 25 - 5} 4 = 16 + \frac{5}{30} = 16,17.$$

Отже,  $Mo^* = 16,17$ .

З графіка  $F^*(x)$  визначається медіанний інтервал, який дорівнює 12–16.

Беручи до уваги, що  $F(12) = 0,4$ ,  $F(16) = 0,65$ ,  $h = 4$  і застосовуючи (11.1), дістанемо:

$$Me^* = x_{i-1} + \frac{0,5 - F^*(x_{i-1})}{F^*(x_i) - F^*(x_{i-1})} h = 12 + \frac{0,5 - 0,4}{0,65 - 0,4} 4 = 12 + \frac{0,1}{0,25} 4 = 13,6.$$

Отже,  $Me^* = 13,6$ .

Побудуємо дискретний статистичний розподіл за заданим інтервальним. Оскільки

$h = 4$ , то дістанемо:

|                                                     |   |    |    |    |    |    |
|-----------------------------------------------------|---|----|----|----|----|----|
| $x_i^* = x_i - \frac{h}{2} = x_{i-1} + \frac{h}{2}$ | 2 | 6  | 10 | 14 | 18 | 22 |
| $n_i$                                               | 6 | 14 | 20 | 25 | 30 | 5  |

Беручи до уваги (11.3), (11.4), (11.5) і те, що  $n = 100$ , дістанемо:

$$\bar{x}_B = \frac{\sum x_i^* n_i}{n} = \frac{2 \cdot 6 + 6 \cdot 14 + 10 \cdot 20 + 14 \cdot 25 + 18 \cdot 30 + 22 \cdot 5}{100} = 12,96$$

Отже,  $\bar{x}_B = 12,96$ .

$$\bar{x}_B = \frac{\sum (x_i^*)^2 n_i}{n} = \frac{2^2 \cdot 6 + 6^2 \cdot 14 + 10^2 \cdot 20 + 14^2 \cdot 25 + 18^2 \cdot 30 + 22^2 \cdot 5}{100} = 228,08$$

$$D_B = \frac{\sum (x_i^*)^2 n_i}{n} - (\bar{x}_B)^2 = 228,08 - (12,96)^2 = 60,1184$$

$$D_B = 60,1184. \quad \sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{60,1184} \approx 7,75. \quad \text{Отже, } \sigma_B = 7,75.$$

## 12. ТОЧКОВІ СТАТИСТИЧНІ ОЦІНКИ ЧИСЛОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТА ПАРАМЕТРІВ ГЕНЕРАЛЬНОЇ СУКУПНОСТІ

Статистична оцінка  $a^*$ , яка визначається одним числом (точкою), називається **точковою**. Беручи до уваги, що оцінка  $a^*$  невідомого параметру  $a$  генеральної сукупності  $X$  є функцією варіант вибірки, тобто  $a^* = a^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , а вибірка  $x_1, x_2, \dots, x_n$  є випадковою, то і статистична оцінка  $a^*$  є випадковою величиною. У зв'язку з цим оцінка  $a^*$ , як усяка випадкова величина може мати розподіл, числові характеристики та параметри розподілу.

До точкових оцінок пред'являються такі вимоги:

– **незміщеність**, коли математичне сподівання оцінки  $a^*$  точно дорівнює оцінюваному параметру  $a$ , а саме:

$$M(a^*) = a. \quad (12.1)$$

$$\text{Різниця} \quad a^* - a = \delta \quad (12.2)$$

називається **зміщенням статистичної оцінки  $a^*$** ;

– **ефективність**, коли при заданому обсязі вибірки оцінка  $a^*$  має мінімальну дисперсію в порівнянні з усіма іншими можливими оцінками, тобто

$$D(a^*) = \min\{D(a_1^*), D(a_2^*), \dots\}; \quad (12.3)$$



– **ґрунтовність**, коли у разі необмеженого збільшення обсягу вибірки оцінка  $a^*$  наближається до оцінювального параметра  $a$  (збігається по ймовірності), тобто

$$a^* \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{вер.}} a; \quad (12.4)$$

– **достатність**, коли вона є найбільш інформативною в порівнянні з усіма іншими можливими оцінками.

**Оцінка для математичного сподівання  $M(X)$ .** В якості точкової оцінки для  $M(X)$  звичайно обирається  $\bar{x}$  або  $\bar{x}_B$ , так звана *вибіркова середня*, яка є незміщеною, ефективною та ґрунтовною оцінкою для  $M(X)$  і звичайно обчислюється за формулою

$$\bar{x} = \bar{x}_B = \frac{\sum x_i n_i}{n}. \quad (12.5)$$

**Оцінка для дисперсії  $D(X)$ .** В якості точкової оцінки для  $D(X)$  звичайно обирається *вибіркова дисперсія  $D_B$* , яка обчислюється за формулами

$$D_B = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_B)^2 n_i}{n} \quad (12.6)$$

$$\text{або} \quad D_B = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x}_B)^2. \quad (12.7)$$

Вибіркова дисперсія  $D_B$  є асимптотично ефективною, ґрунтовною, але зміщеною оцінкою для  $D(X)$ . Для виправлення оцінки  $D_B$  застосовується коефіцієнт зміщення  $\frac{n-1}{n}$  (так звана поправка Бесселя), який зі збільшенням обсягу вибірки  $n$  наближається до одиниці.

Отже, точковою незміщеною статистичною оцінкою для  $D(X)$  буде  $\frac{n}{n-1} D_B$ . Вона зветься *виправленою дисперсією* і позначається через  $S^2$ . Для обчислення виправленої дисперсії застосовуються формули:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_B \quad \text{або} \quad S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_B)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_B)^2}{n-1}. \quad (12.8)$$

Незміщеною оцінкою для  $\sigma(X)$  є виправлене середнє квадратичне відхилення  $S$ :

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_B}. \quad (12.9)$$

### 13. ІНТЕРВАЛЬНІ СТАТИСТИЧНІ ОЦІНКИ ЧИСЛОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Точкова статистична оцінка  $a^*$  є функцією випадкової виборки, і тому сама є випадковою величиною. Наближена заміна  $a$  на  $a^*$  часто призводить до істотних похибок, особливо, коли обсяг вибірки – малий. У цьому разі застосовують **інтервальні** статистичні оцінки.

**Інтервальною** зветься статистична оцінка, що визначається двома числами, кінцями інтервала.

Різниця між статистичною оцінкою  $a^*$  та оцінюваним параметром генеральної сукупності  $a$ , взята за абсолютним значенням, називається *точністю оцінки*, а саме:

$$|a^* - a| < \delta, \quad (13.1)$$

де  $\delta$  – точність оцінки.

Оскільки  $a^*$  є випадковою величиною, то і  $\delta$  буде випадковою, тому нерівність (13.1) виконується з певною ймовірністю.

Ймовірність, з якою виконується нерівність (13.1), тобто

$$P(|a^* - a| < \delta) = \gamma \quad (13.2)$$

називають *надійністю*.

Рівність (7.45) можна записати так:

$$P(a^* - \delta < a < a^* + \delta) = \gamma. \quad (13.3)$$

Випадковий інтервал  $I_\gamma = (a^* - \delta; a^* + \delta)$ , що покриває оцінюваний параметр  $a$  генеральної сукупності з заданою надійністю  $\gamma$ , називають *довірчим інтервалом*.

#### Побудова довірчого інтервалу для $m_x$ при відомому значенні $\sigma_x$ із заданою надійністю $\gamma$

Нехай ознака  $X$  генеральної сукупності має нормальний закон розподілу. Побудуємо довірчий інтервал для  $m_x$  із заданою надійністю  $\gamma$ , знаючи числове значення середнього квадратичного відхилення генеральної сукупності  $\sigma_x$ .

Оскільки  $\bar{x}_B$  як точкова незміщена статистична оцінка для  $m_x$  має нормальний закон розподілу з числовими характеристиками  $M(\bar{x}_B) = m_x$ ,  $\sigma(\bar{x}_B) = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ , то, скориставшись (13.2), дістанемо

$$P(|\bar{x}_B - m_x| < \delta) = \gamma. \quad (13.4)$$

Тому  $\frac{\bar{x}_B - m_x}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}}$  матиме нормований нормальний закон розподілу  $N(0; 1)$ .

Згідно з формулою нормованого нормального закону

$$P(|\bar{x}_B - m_x| < \delta) = 2\Phi(x)$$

для (13.4) вона набирає такого вигляду:

$$P\left(\left|\frac{\bar{x}_B - m_x}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}}\right| < x\right) = 2\Phi(x) = \gamma. \quad (13.5)$$

З рівності (13.5) знаходимо функцію  $\Phi(x)$ , а саме:

$$2\Phi(x) = \gamma \rightarrow \Phi(x) = 0,5\gamma.$$

Аргумент  $x$  знаходимо за значенням функції Лапласа, яка дорівнює  $0,5\gamma$  за таблицею.

Отже, довірчий інтервал для  $m_x$  буде мати вигляд:

$$\bar{x}_B - \frac{x \cdot \sigma_x}{\sqrt{n}} < m_x < \bar{x}_B + \frac{x \cdot \sigma_x}{\sqrt{n}}, \quad (13.6)$$

Величина  $\frac{x \cdot \sigma_x}{\sqrt{n}}$  називається *точністю оцінки*, або *похибкою вибірки*.

**Приклад.** Вимірявши 40 випадково відібраних після виготовлення деталей, знайшли вибірккову середню, що дорівнює 15 см. Із надійністю  $\gamma = 0,99$  побудувати довірчий інтервал для середньої величини всієї партії деталей, якщо генеральна дисперсія дорівнює  $0,09 \text{ см}^2$ .

*Розв'язання.* Для побудови довірчого інтервалу необхідно знати:  $\bar{x}_B$ ,  $\sigma_x$ ,  $n$ ,  $x$ .

З умови задачі маємо:

$$\bar{x}_B = 15 \text{ см}, \sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{0,09 \text{ см}^2} = 0,3 \text{ см}, n = 40 \rightarrow \sqrt{n} = \sqrt{40} = 6,32.$$

Величина  $x$  обчислюється з рівняння

$$\Phi(x) = 0,5\gamma = 0,5 \cdot 0,99 = 0,495.$$

$$\Phi(x) = 0,495 \rightarrow x = 2,58 \text{ [за таблицею значень функції Лапласа]}.$$

Знайдемо числові значення кінців довірчого інтервалу:

$$\bar{x}_B - \frac{x \cdot m_x}{\sqrt{n}} = 15 - \frac{2,58 \cdot 0,3}{6,32} = 15 - 0,12 = 14,88 \text{ см.}$$

$$\bar{x}_B + \frac{x \cdot m_x}{\sqrt{n}} = 15 + \frac{2,58 \cdot 0,3}{6,32} = 15 + 0,12 = 15,12 \text{ см.}$$

Таким чином, маємо:

$$14,88 < m_x < 15,12.$$

Отже, з надійністю 0,99 (99% гарантії) оцінюваний параметр  $m_x$  перебуває усередині інтервалу  $[14,87; 15,13]$ .

## 14. СТАТИСТИЧНА ПЕРЕВІРКА ГІПОТЕЗ

**Статистичними** називають гіпотези про вигляд невідомого розподілу генеральної сукупності або про параметри відомих розподілів.

**Основною (нульовою)** називають припущену гіпотезу і позначають  $H_0$ .

**Альтернативною (конкурентною)** називають гіпотезу, що суперечить основній, її позначають  $H_1$ .

Правило, яке встановлює умови, за яких гіпотеза  $H_0$ , що перевіряється, приймається або відхиляється, називається *статистичним критерієм*. Приймаючи або відхиляючи гіпотезу  $H_0$ , можна припустити похибки 2 видів.

**Похибка I роду** полягає в тому, що нульова гіпотеза  $H_0$  відхиляється, а приймається конкуруюча гіпотеза  $H_1$  в той час, коли насправді все ж таки правильною є гіпотеза  $H_0$ .

**Похибка II роду** полягає в тому, що гіпотеза  $H_0$  приймається в той час, коли насправді все ж таки правильною є гіпотеза  $H_1$ .

Досить малу ймовірність, при якій подію можна вважати практично нездійсненою, називають **рівнем значущості**. Ймовірність допустити похибку I роду називається **рівнем значущості критерію**.

Чим менший рівень значущості, тим менша ймовірність відхилити правильну гіпотезу. За рівень значущості найчастіше беруть число  $\alpha \in [0,01; 0,05]$ .

Якщо  $\alpha=0,01$ , то рівень значущості називають однопроцентним, при  $\alpha=0,02$  – двопроцентним, і т. ін.

Перевірка різних статистичних гіпотез проводиться відповідно до наступної **загальної схеми**:

- 1) формулюється нульова гіпотеза  $H_0$ ;
- 2) вибирається статистичний критерій  $K$ ;
- 3) обчислюється розрахункове значення критерію  $K_p$ ;
- 4) знаходиться критичне значення критерію  $K_{кр}$  за таблицями у залежності від рівня значущості  $\alpha$  та обсягу вибірки  $n$ ;
- 5) порівнюються критичне  $K_{кр}$  і розрахункове  $K_p$  значення критерію;
- 6) робиться висновок відносно запропонованої гіпотези: коли  $K_p \leq K_{кр}$ , то гіпотеза  $H_0$  приймається; коли  $K_p > K_{кр}$ , то гіпотеза  $H_0$  відхиляється.

Розглянемо перевірку деяких статистичних гіпотез.

### **Перевірка гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності за критерієм Пірсона.**

Критерій узгодження Пірсона (хі-квадрат) ефективно використовують для перевірки гіпотези про розподіл генеральної сукупності, тобто що розподіл випадкової величини має певний функціональний вираз. Обмежимося застосуванням цього критерію для перевірки гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності.

#### **а) дискретна випадкова величина**

Нехай вибірка має такий розподіл об'єму  $n$ ,  $x_i$  – рівновідстоюючі варіанти:

|                |       |       |     |       |
|----------------|-------|-------|-----|-------|
| Варіанти $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_m$ |
| Частоти $n_i$  | $n_1$ | $n_2$ | ... | $n_m$ |

Якщо  $x_p^2 > x_{кр}^2$ , то гіпотезу треба відхилити.

**Приклад 5.** Використовуючи критерій Пірсона, при рівні значущості 0,05 перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності  $X$  з емпіричним розподілом вибірки об'ємом  $n=200$

|       |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $x_i$ | 5  | 7  | 9  | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 |
| $n_i$ | 15 | 26 | 25 | 30 | 26 | 21 | 24 | 20 | 13 |

*Розв'язання.* Використовуючи метод добутків, знайдемо вибіркoву середню  $\bar{x}_B = 12,63$  та вибіркoве середнє квадратичне відхилення  $\sigma_B = 4.695$ .

Обчислимо теоретичні частоти, враховуючи, що  $n=200$ ,  $h=2$ ,  $\sigma_B=4.695$  за формулою  $n'_i = \frac{nh}{\sigma_E} \varphi(n_i) = \frac{200 \cdot 2}{4.695} \cdot \varphi(n_i) = 85.2 \cdot \varphi(n_i)$

Складемо розрахункову таблицю

| i | $x_i$ | $n_i = \frac{x_i - \bar{x}_B}{\sigma_B}$ | $\varphi(n_i)$ | $n'_i = 85.2 \cdot \varphi(n_i)$ |
|---|-------|------------------------------------------|----------------|----------------------------------|
| 1 | 5     | -1,62                                    | 0,1074         | 9,1                              |
| 2 | 7     | -1,20                                    | 0,1942         | 16,5                             |
| 3 | 9     | -0,77                                    | 0,2966         | 25,3                             |
| 4 | 11    | -0,35                                    | 0,3752         | 32,0                             |
| 5 | 13    | 0,08                                     | 0,3972         | 33,9                             |
| 6 | 15    | 0,51                                     | 0,3503         | 29,8                             |
| 7 | 17    | 0,93                                     | 0,2589         | 22,0                             |
| 8 | 19    | 1,36                                     | 0,1582         | 13,5                             |
| 9 | 21    | 1,78                                     | 0,0818         | 7,0                              |

Складемо наступну розрахункову таблицю, з якої знайдемо спостережене значення критерію  $\chi_p^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$

| i        | $n_i$ | $n'_i$ | $n_i - n'_i$ | $(n_i - n'_i)^2$ | $\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$ |
|----------|-------|--------|--------------|------------------|-------------------------------|
| 1        | 15    | 9,1    | 5,9          | 34,81            | 3,8                           |
| 2        | 26    | 16,5   | 9,5          | 90,25            | 5,5                           |
| 3        | 25    | 25,3   | -0,3         | 0,09             | 0,0                           |
| 4        | 30    | 32,0   | -2,0         | 4,00             | 0,1                           |
| 5        | 26    | 33,9   | -7,9         | 62,41            | 1,8                           |
| 6        | 21    | 29,8   | -8,8         | 77,44            | 2,6                           |
| 7        | 24    | 22,0   | 2,0          | 4,00             | 0,2                           |
| 8        | 20    | 13,5   | 6,5          | 42,25            | 3,1                           |
| 9        | 13    | 7,0    | 6,0          | 36,00            | 5,1                           |
| $\Sigma$ | 200   |        |              |                  | $\chi_p^2 = 22.2$             |

З таблиці знаходимо  $\chi_p^2 = 22.2$

б) неперервна випадкова величина

| інтервали $l_i$ | $(X_1, X_2)$ | $(X_2, X_3)$ | ... | $(X_{m-1}, X_{m+1})$ |
|-----------------|--------------|--------------|-----|----------------------|
| частоти $n_i$   | $n_1$        | $n_2$        | ... | $n_m$                |

$(X_i, X_{i+1})$  – інтервали однакової довжини.

Потрібно з рівнем значущості  $\alpha$  перевірити основну гіпотезу  $H_0$ : генеральна сукупність розподілена нормально. Критерієм перевірки цієї гіпотези беруть випадкову величину  $\chi^2$ , яка у різних випробуваннях приймає різні, наперед невідомі значення  $\chi^2_p$ . Критичне значення цієї випадкової величини залежить від рівня значущості  $\alpha$  та степенів вільності її розподілу  $k$ :  $\chi^2_{kp} = \chi^2(\alpha, k)$ .

Ці критичні значення табульовані (у таблиці додатку) для різних  $\alpha$  та  $k$ . Для розподілу генеральної сукупності за нормальним законом степінь вільності буде  $k=m-3$ , де  $m$  кількість варіантів вибірки або частотних інтервалів варіантів.

**Правило Пірсона.** Щоб при заданому рівнянні значущості  $\alpha$  перевірити основну гіпотезу  $H_0$ : генеральна сукупність розподілена нормально, треба:

1. Обчислити вибірккову середню  $\bar{x}_B$  та вибірккове середнє квадратичне відхилення  $\sigma_B$ ; для розподілу б) в формулах для обчислення  $\bar{x}_B$  і  $\sigma_B$  знаходяться середні арифметичні границі інтервалів.

2. Обчислити теоретичні частоти  $n'_i$  для варіант або інтервалів вибірки:

$$n'_i = p_i \cdot n; \quad i = 1, m,$$

Для розподілу а)  $p_i = \frac{h}{\sigma_B} \varphi(u_i)$ ,

де  $h = x_{i+1} - x_i$ ;  $u_i = \frac{x_i - \bar{x}_B}{\sigma_B}$ ;  $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}$  – локальна функція Лапласа.

Для розподілу б)  $p_i = P(x_i < X < x_{i+1}) = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - \bar{x}_B}{\sigma_B}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}_B}{\sigma_B}\right)$

3. Обчислити спостережене значення критерія  $\chi^2$  за формулою

$$\chi^2_p = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$$

4. Знайти степінь вільності  $\chi^2: k = m-1 - r = m-3$  ( $r = 2$  – для нормального розподілу).

5. Знайти у таблиці критичну точку  $\chi^2_{kp}$ , яка відповідає заданому рівню значимості  $\alpha$  та степеневі вільності  $k$ :  $\chi^2_{kp}(\alpha, k)$ .

6. Порівняти  $\chi^2_p$  та  $\chi^2_{kp}$  і зробити висновок: якщо  $\chi^2_p < \chi^2_{kp}$ , то гіпотезу  $H_0$  треба прийняти; число степенів вільності  $k = m - 3 = 6$

За таблицею критичних точок розподілу  $\chi^2$  при  $\alpha=0,05$  і  $k=6$  знаходимо критичну точку правосторонньої критичної області:

$$\chi^2_{kp}(0,05;6) = 12,6$$

Оскільки  $\chi^2_p > \chi^2_{kp}$  – гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності відхиляємо (емпіричні та теоретичні частоти мають значну розбіжність.)

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория вероятностей. – М.: Наука, 1973.
2. *Волощенко А. Б., Гетманцев В. Д., Кузубов В. И.* Методические указания к решению задач с экономическим содержанием по разделу «Случайные события». – К.: КИНХ, 1979
3. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. шк., 1977
4. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. шк., 1975. – 332 с.
5. *Жлуктенко В. І., Наконечний С. І.* Теорія ймовірностей. – К: КНЕУ, 1999. – Ч.1
6. *Крамер М. Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 2001
7. *Бубняк Т.І.* Вища математика: навчальний посібник. – Львів: «Новий світ-2000», 2004
8. Методичні вказівки та індивідуальні завдання до виконання самостійної роботи з курсу «Вища математика» розділ «Теорія ймовірностей» за темою «Випадкові величини» для студентів І курсу технологічних та механічних спеціальностей. – Кармазіна В.В, Граніна Т.О. – Дніпропетровськ. УДХТУ, 2006 – 49с.

Таблиця значень функції  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

### Додаток 1

| Цілі і десяти частини | Соті частини $x$ |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|-----------------------|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $x$                   | 0                | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      |
| 0,0                   | 0,3989           | 0,3989 | 0,3989 | 0,3988 | 0,3986 | 0,3984 | 0,3982 | 0,3980 | 0,3977 | 0,3973 |
| 0,1                   | 0,3970           | 0,3965 | 0,3961 | 0,3956 | 0,3951 | 0,3945 | 0,3939 | 0,3932 | 0,3925 | 0,3918 |
| 0,2                   | 0,3910           | 0,3902 | 0,3894 | 0,3885 | 0,3876 | 0,3867 | 0,3857 | 0,3847 | 0,3836 | 0,3825 |
| 0,3                   | 0,3814           | 0,3802 | 0,3790 | 0,3778 | 0,3765 | 0,3752 | 0,3739 | 0,3725 | 0,3712 | 0,3697 |
| 0,4                   | 0,3683           | 0,3668 | 0,3653 | 0,3637 | 0,3621 | 0,3605 | 0,3589 | 0,3572 | 0,3555 | 0,3538 |
| 0,5                   | 0,3521           | 0,3503 | 0,3485 | 0,3467 | 0,3448 | 0,3429 | 0,3410 | 0,3391 | 0,3372 | 0,3352 |
| 0,6                   | 0,3332           | 0,3312 | 0,3292 | 0,3271 | 0,3251 | 0,3230 | 0,3209 | 0,3187 | 0,3166 | 0,3144 |
| 0,7                   | 0,3123           | 0,3101 | 0,3079 | 0,3056 | 0,3034 | 0,3011 | 0,2989 | 0,2966 | 0,2943 | 0,2920 |
| 0,8                   | 0,2897           | 0,2874 | 0,2850 | 0,2827 | 0,2803 | 0,2780 | 0,2756 | 0,2732 | 0,2709 | 0,2685 |
| 0,9                   | 0,2661           | 0,2637 | 0,2613 | 0,2589 | 0,2565 | 0,2541 | 0,2516 | 0,2492 | 0,2468 | 0,2444 |
| 1,0                   | 0,2420           | 0,2396 | 0,2371 | 0,2347 | 0,2323 | 0,2299 | 0,2275 | 0,2251 | 0,2227 | 0,2203 |
| 1,1                   | 0,2179           | 0,2155 | 0,2131 | 0,2107 | 0,2083 | 0,2059 | 0,2036 | 0,2012 | 0,1989 | 0,1965 |
| 1,2                   | 0,1942           | 0,1919 | 0,1895 | 0,1872 | 0,1849 | 0,1826 | 0,1804 | 0,1781 | 0,1758 | 0,1736 |
| 1,3                   | 0,1714           | 0,1691 | 0,1669 | 0,1647 | 0,1626 | 0,1604 | 0,1582 | 0,1561 | 0,1539 | 0,1518 |
| 1,4                   | 0,1497           | 0,1476 | 0,1456 | 0,1435 | 0,1415 | 0,1394 | 0,1374 | 0,1354 | 0,1334 | 0,1315 |
| 1,5                   | 0,1295           | 0,1276 | 0,1257 | 0,1238 | 0,1219 | 0,1200 | 0,1182 | 0,1163 | 0,1145 | 0,1127 |
| 1,6                   | 0,1109           | 0,1092 | 0,1074 | 0,1057 | 0,1040 | 0,1023 | 0,1006 | 0,0989 | 0,0973 | 0,0957 |
| 1,7                   | 0,0940           | 0,0925 | 0,0909 | 0,0893 | 0,0878 | 0,0863 | 0,0848 | 0,0833 | 0,0818 | 0,0804 |

|     |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1,8 | 0,0790 | 0,0775 | 0,0761 | 0,0748 | 0,0734 | 0,0721 | 0,0707 | 0,0694 | 0,0681 | 0,0669 |
| 1,9 | 0,0656 | 0,0644 | 0,0632 | 0,0620 | 0,0608 | 0,0596 | 0,0584 | 0,0573 | 0,0562 | 0,0551 |
| 2,0 | 0,0540 | 0,0529 | 0,0519 | 0,0508 | 0,0498 | 0,0488 | 0,0478 | 0,0468 | 0,0459 | 0,0449 |
| 2,1 | 0,0440 | 0,0431 | 0,0422 | 0,0413 | 0,0404 | 0,0396 | 0,0387 | 0,0379 | 0,0371 | 0,0363 |
| 2,2 | 0,0355 | 0,0347 | 0,0339 | 0,0332 | 0,0325 | 0,0317 | 0,0310 | 0,0303 | 0,0297 | 0,0290 |
| 2,3 | 0,0283 | 0,0277 | 0,0270 | 0,0264 | 0,0258 | 0,0252 | 0,0246 | 0,0241 | 0,0235 | 0,0229 |
| 2,4 | 0,0224 | 0,0219 | 0,0213 | 0,0208 | 0,0203 | 0,0198 | 0,0194 | 0,0189 | 0,0184 | 0,0180 |
| 2,5 | 0,0175 | 0,0171 | 0,0167 | 0,0163 | 0,0158 | 0,0154 | 0,0151 | 0,0147 | 0,0143 | 0,0139 |
| 2,6 | 0,0136 | 0,0132 | 0,0129 | 0,0126 | 0,0122 | 0,0119 | 0,0116 | 0,0113 | 0,0110 | 0,0107 |
| 2,7 | 0,0104 | 0,0101 | 0,0099 | 0,0096 | 0,0093 | 0,0091 | 0,0088 | 0,0086 | 0,0084 | 0,0081 |
| 2,8 | 0,0079 | 0,0077 | 0,0075 | 0,0073 | 0,0071 | 0,0069 | 0,0067 | 0,0065 | 0,0063 | 0,0061 |
| 2,9 | 0,0060 | 0,0058 | 0,0056 | 0,0055 | 0,0053 | 0,0051 | 0,0050 | 0,0048 | 0,0047 | 0,0046 |
| 3,0 | 0,0044 | 0,0043 | 0,0042 | 0,0040 | 0,0039 | 0,0038 | 0,0037 | 0,0036 | 0,0035 | 0,0034 |
| 3,1 | 0,0033 | 0,0032 | 0,0031 | 0,0030 | 0,0029 | 0,0028 | 0,0027 | 0,0026 | 0,0025 | 0,0025 |
| 3,2 | 0,0024 | 0,0023 | 0,0022 | 0,0022 | 0,0021 | 0,0020 | 0,0020 | 0,0019 | 0,0018 | 0,0018 |
| 3,3 | 0,0017 | 0,0017 | 0,0016 | 0,0016 | 0,0015 | 0,0015 | 0,0014 | 0,0014 | 0,0013 | 0,0013 |

*Продовження додатка 1*

|     |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 3,4 | 0,0012 | 0,0012 | 0,0012 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0010 | 0,0010 | 0,0010 | 0,0009 | 0,0009 |
| 3,5 | 0,0009 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0006 |
| 3,6 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0004 |
| 3,7 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 |
| 3,8 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 |
| 3,9 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0001 |

**Додаток 2**

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ ЛАПЛАСА  $\Phi(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

| x    | $\Phi(x)$ | x    | $\Phi(x)$ | x    | $\Phi(x)$ | x    | $\Phi(x)$ |
|------|-----------|------|-----------|------|-----------|------|-----------|
| 0,00 | 0,0000    | 0,26 | 0,1026    | 0,52 | 0,1985    | 0,78 | 0,2823    |
| 0,01 | 0,0040    | 0,27 | 0,1064    | 0,53 | 0,2019    | 0,79 | 0,2852    |
| 0,02 | 0,0080    | 0,28 | 0,1103    | 0,54 | 0,2054    | 0,80 | 0,2881    |
| 0,03 | 0,0120    | 0,29 | 0,1141    | 0,55 | 0,2088    | 0,81 | 0,2910    |
| 0,04 | 0,0160    | 0,30 | 0,1179    | 0,56 | 0,2123    | 0,82 | 0,2939    |
| 0,05 | 0,0199    | 0,31 | 0,1217    | 0,57 | 0,2157    | 0,83 | 0,2967    |
| 0,06 | 0,0239    | 0,32 | 0,1255    | 0,58 | 0,2190    | 0,84 | 0,2995    |
| 0,07 | 0,0279    | 0,33 | 0,1293    | 0,59 | 0,2224    | 0,85 | 0,3023    |
| 0,08 | 0,0319    | 0,34 | 0,1331    | 0,60 | 0,2257    | 0,86 | 0,3051    |
| 0,09 | 0,0359    | 0,35 | 0,1368    | 0,61 | 0,2291    | 0,87 | 0,3078    |
| 0,10 | 0,0398    | 0,36 | 0,1406    | 0,62 | 0,2324    | 0,88 | 0,3106    |
| 0,11 | 0,0438    | 0,37 | 0,1443    | 0,63 | 0,2357    | 0,89 | 0,3133    |
| 0,12 | 0,0478    | 0,38 | 0,1480    | 0,64 | 0,2389    | 0,90 | 0,3159    |
| 0,13 | 0,0517    | 0,39 | 0,1617    | 0,65 | 0,2422    | 0,91 | 0,3186    |



|      |        |      |        |      |         |      |        |
|------|--------|------|--------|------|---------|------|--------|
| 0,14 | 0,8557 | 0,40 | 0,1564 | 0,66 | 0,2454  | 0,92 | 0,3212 |
| 0,15 | 0,0596 | 0,41 | 0,1691 | 0,67 | 0,2486  | 0,93 | 0,3238 |
| 0,16 | 0,0636 | 0,42 | 0,1628 | 0,68 | 0,2517  | 0,94 | 0,3264 |
| 0,17 | 0,0675 | 0,43 | 0,1664 | 0,69 | 0,2549  | 0,95 | 0,3289 |
| 0,18 | 0,0714 | 0,44 | 0,1700 | 0,70 | 0,2580  | 0,96 | 0,3315 |
| 0,19 | 0,0753 | 0,45 | 0,1736 | 0,71 | 0,2611  | 0,97 | 0,3340 |
| 0,20 | 0,0793 | 0,46 | 0,1772 | 0,72 | 0,2642  | 0,98 | 0,3365 |
| 0,21 | 0,0832 | 0,47 | 0,1808 | 0,73 | 0,2673  | 0,99 | 0,3389 |
| 0,22 | 0,0871 | 0,48 | 0,1844 | 0,74 | 0,2703  | 1,00 | 0,3413 |
| 0,23 | 0,0910 | 0,49 | 0,1879 | 0,75 | 0,2734  | 1,01 | 0,3438 |
| 0,24 | 0,0948 | 0,50 | 0,1915 | 0,76 | 0,2764  | 1,02 | 0,3461 |
| 0,25 | 0,0987 | 0,51 | 0,1950 | 0,77 | 0,2794  | 1,03 | 0,3485 |
| 1,04 | 0,3508 | 1,33 | 0,4082 | 1,62 | 0,4474  | 1,91 | 0,4719 |
| 1,05 | 0,3531 | 1,34 | 0,4099 | 1,63 | 0,4484  | 1,92 | 0,4726 |
| 1,06 | 0,3554 | 1,35 | 0,4115 | 1,64 | 0,4495  | 1,93 | 0,4732 |
| 1,07 | 0,3577 | 1,36 | 0,4131 | 1,65 | 0,4505  | 1,94 | 0,4738 |
| 1,08 | 0,3599 | 1,37 | 0,4147 | 1,66 | 0,4515- | 1,95 | 0,4744 |
| 1,09 | 0,3621 | 1,38 | 0,4162 | 1,67 | 0,4525  | 1,96 | 0,4750 |
| 1,10 | 0,3643 | 1,39 | 0,4177 | 1,68 | 0,4535  | 1,97 | 0,4756 |
| 1,11 | 0,3665 | 1,40 | 0,4192 | 1,69 | 0,4545  | 1,98 | 0,4761 |

*Продовження додатка 2*

|      |        |      |        |      |        |      |          |
|------|--------|------|--------|------|--------|------|----------|
| 1,12 | 0,3686 | 1,41 | 0,4207 | 1,70 | 0,4554 | 1,99 | 0,4767   |
| 1,13 | 0,3708 | 1,42 | 0,4222 | 1,71 | 0,4564 | 2,00 | 0,4772   |
| 1,14 | 0,3729 | 1,43 | 0,4236 | 1,72 | 0,4573 | 2,02 | 0,4783   |
| 1,15 | 0,3749 | 1,44 | 0,4251 | 1,73 | 0,4582 | 2,04 | 0,4793   |
| 1,16 | 0,3770 | 1,45 | 0,4265 | 1,74 | 0,4591 | 2,06 | 0,4803   |
| 1,17 | 0,3790 | 1,46 | 0,4279 | 1,75 | 0,4599 | 2,08 | 0,4812   |
| 1,18 | 0,3810 | 1,47 | 0,4292 | 1,76 | 0,4608 | 2,10 | 0,4821   |
| 1,19 | 0,3830 | 1,48 | 0,4306 | 1,77 | 0,4616 | 2,12 | 0,4830   |
| 1,20 | 0,3849 | 1,49 | 0,4319 | 1,78 | 0,4625 | 2,14 | 0,4838   |
| 1,21 | 0,3869 | 1,50 | 0,4332 | 1,79 | 0,4633 | 2,16 | 0,4846   |
| 1,22 | 0,3883 | 1,51 | 0,4345 | 1,80 | 0,4641 | 2,18 | 0,4854   |
| 1,23 | 0,3907 | 1,52 | 0,4357 | 1,81 | 0,4649 | 2,20 | 0,4861   |
| 1,24 | 0,3925 | 1,53 | 0,4370 | 1,82 | 0,4656 | 2,22 | 0,4868   |
| 1,25 | 0,3944 | 1,54 | 0,4382 | 1,83 | 0,4664 | 2,24 | 0,4875   |
| 1,26 | 0,3962 | 1,55 | 0,4394 | 1,84 | 0,4671 | 2,26 | 0,4881   |
| 1,27 | 0,3980 | 1,56 | 0,4406 | 1,85 | 0,4678 | 2,28 | 0,4887   |
| 1,28 | 0,3997 | 1,57 | 0,4418 | 1,86 | 0,4686 | 2,30 | 0,4893   |
| 1,29 | 0,4015 | 1,58 | 0,4429 | 1,87 | 0,4693 | 2,32 | 0,4898   |
| 1,30 | 0,4032 | 1,59 | 0,4441 | 1,88 | 0,4699 | 2,34 | 0,4904   |
| 1,31 | 0,4049 | 1,60 | 0,4452 | 1,89 | 0,4706 | 2,36 | 0,4909   |
| 1,32 | 0,4066 | 1,61 | 0,4463 | 1,90 | 0,4713 | 2,38 | 0,4913   |
| 2,40 | 0,4918 | 2,60 | 0,4953 | 2,80 | 0,4974 | 3,20 | 0,49931  |
| 2,42 | 0,4922 | 2,62 | 0,4956 | 2,82 | 0,4976 | 3,40 | 0,49966  |
| 2,44 | 0,4927 | 2,64 | 0,4959 | 2,84 | 0,4977 | 3,60 | 0,49984  |
| 2,46 | 0,4931 | 2,66 | 0,4961 | 2,86 | 0,4979 | 3,80 | 0,499928 |
| 2,48 | 0,4934 | 2,68 | 0,4963 | 2,90 | 0,4981 | 4,00 | 0,499968 |

|      |        |      |        |      |         |         |          |
|------|--------|------|--------|------|---------|---------|----------|
| 2,50 | 0,4938 | 2,70 | 0,4965 | 2,92 | 0,4982  | 5,00    | 0,499997 |
| 2,52 | 0,4941 | 2,72 | 0,4967 | 2,94 | 0,4984  |         |          |
| 2,54 | 0,4945 | 2,74 | 0,4969 | 2,96 | 0,49846 |         |          |
| 2,56 | 0,4948 | 2,76 | 0,4971 | 2,98 | 0,49856 |         |          |
| 2,58 | 0,4951 | 2,78 | 0,4973 | 3,00 | 0,49865 | $x > 5$ | 0,5      |