

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
“УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ХІМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ”

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ДИСЦИПЛІНИ
“ВИЩА МАТЕМАТИКА” ЗА РОЗДІЛОМ “ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ” ДЛЯ СТУДЕНТІВ І ТА ІІ КУРСІВ УСІХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ
ДЕННОЇ ТА ЗАОЧНОЇ ФОРМ НАВЧАННЯ

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики.
Протокол №3 від 17.10.2016 р.

Дніпро ДВНЗ УДХТУ 2017

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни “Вища математика” за розділом “Звичайні диференціальні рівняння” для студентів I та II курсів усіх спеціальностей денної та заочної форм навчання/ Укл.: Т.О. Гранкіна, А.В. Поліщук, І.В. Шапка – Дніпро: ДВНЗ УДХТУ, 2017. – 54 с.

Укладачі: Т.О. Гранкіна
А.В. Поліщук, канд. техн. наук
І.В. Шапка

Відповідальний за випуск В.І. Олевський, доктор техн. наук

Навчальне видання
Методичні вказівки
до практичних занять з дисципліни “Вища математика” за розділом
“Звичайні диференціальні рівняння” для студентів I та II курсів усіх
спеціальностей денної та заочної форм навчання

Укладачі: ГРАНКІНА Тетяна Олександрівна
ПОЛІЩУК Алла Вікторівна
ШАПКА Ірина Віталіївна

Технічний редактор Т.М. Кіжло
Комп’ютерна верстка Т.М. Кіжло

Підписано до друку 23.05.17. Формат 60×84/16. Папір ксерокс. Друк різнограф.
Умов. друк. арк. 2,54. Обл.-вид. арк. 2,59. Тираж 100 прим. Зам. № 597
Свідоцтво ДК № 5026 від 16.12.2015

ДВНЗ УДХТУ, просп. Гагаріна, 8, м. Дніпро, 49005

Редакційно-видавничий відділ

Вступ

Розділ «Звичайні диференціальні рівняння» входить до програми курсу «Вища математика» всіх спеціальностей денної та заочної форм навчання.

Наступні методичні вказівки спрямовані, передусім, на практичну підготовку студента і розроблені у відповідності з навчальним планом.

Кожний розділ містить короткий довідковий матеріал, що є необхідним для розв'язання практичних завдань. Але слід мати на увазі, що це не є конспект лекцій. Тому приступати до практичних занять треба після проробки лекційного матеріалу.

В кожному розділі наведені приклади розв'язання типових задач.

Останній розділ містить варіанти індивідуальних завдань з даного розділу. Є також список підручників, що рекомендовані для використання в учбовому процесі.

1. Задачі, які приводять до диференціальних рівнянь

Математичний аналіз технічних, фізичних, хімічних задач зазвичай складається з трьох частин: 1) переклад умов задачі на мову математики; 2) розв'язання отриманої таким чином задачі; 3) оцінка одержаних результатів.

Перша частина роботи полягає, як правило, в складанні диференціальних рівнянь і є найбільш складною. Для складання диференціальних рівнянь нема загальних методів, і навчитись складати диференціальні рівняння можна розглядаючи конкретні приклади.

Практична цінність диференціальних рівнянь полягає у тому, що користуючись ними, можна встановити зв'язок між основним фізичним або хімічним законом і часто-густо з цілою низкою змінних, які мають велике значення при дослідженні технічних питань.

Якщо застосувати найпростіший закон до процесу, який іде при змінних умовах, то це приводить до дуже складного співвідношення між змінними.

Дослідимо рух матеріальної точки маси m по вертикальній прямій під дією сили земного тяжіння. Нехай вісь Ox – пряма по, якій рухається матеріальна точка, початок координат візьмемо на поверхні землі, а додатній напрям будемо відраховувати догори. Щоб знати рух, тобто положення точки у будь-який момент часу t після початку руху (яке відповідає значенню $t=0$), потрібно знати значення єдиної координати цієї точки x як функції t . Таким чином, незалежною змінною є t , а шуканою функцією x .

Ми знаємо з механіки закон Ньютона $ma = F$, де m і a – відповідно маса та прискорення матеріальної точки; F – сила, яка діє на точку. З механічного змісту другої похідної випливає, що прискорення дорівнює $\frac{d^2x}{dt^2}$, з іншого боку, ми знаємо, що прискорення сили земного тяжіння у кожній точці поверхні і поблизу Землі є сталою, яка дорівнює g , а сила тяжіння дорівнює mg . Тому що сила тяжіння напрямлена униз у нашій системі координат їй

належить дати знак „-“. Порівнюючи обидва знайдені вирази, одержуємо рівняння руху $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg$ або $\frac{d^2 x}{dt^2} = -g$.

Багато хімічних реакцій та фізичних процесів характеризуються тим, що швидкість зміни однієї змінної величини відносно другої пропорційно значенню цієї змінної у першому степені. Такі процеси називаються процесами першого порядку. Вони визначаються рівнянням $\frac{dx}{dt} = kx$. У випадку хімічної реакції маємо x – кількість речовини, k – стала величина (константа швидкості реакції), t – час. Наприклад, реакція гідролізу двобромантарної кислоти – реакція першого порядку, радіоактивний розпад, швидкість зростання населення і т.п. – все це процеси першого порядку.

2. Основні означення

Означення 1. Диференціальним рівнянням називається рівняння, яке зв'язує шукану функцію, її похідні та аргумент, тобто воно має вигляд

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \text{ або } F(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}) = 0.$$

Якщо шукана функція $y = \varphi(x)$ є функцією однієї незалежної змінної, то диференціальне рівняння називається **звичайним**.

Означення 2. Найвищий порядок похідної, що входить у диференціальне рівняння, називається порядком диференціального рівняння (наприклад, $(y')^2 + x^3 + y^4 = 0$ – рівняння першого порядку, а $y'' + y - x^3 = 0$ – рівняння другого порядку).

Означення 3. Розв'язком або інтегралом диференціального рівняння називається будь-яка функція $y = \varphi(x)$, яка після підстановки у рівняння, обертає його у тотожність.

Приклад. Функції $y = e^x, y = e^{-x}, y = 5e^x - 3e^{-x}$ або взагалі $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, де C_1 і C_2 – сталі, є розв'язками рівняння

$$y'' - y = 0 \tag{2.1}$$

Функції $y = e^{2x}, y = \sin x, y = \cos x$ не є розв'язками рівняння (2.1).

3. Диференціальне рівняння першого порядку. Загальні поняття

Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд $F(x, y, y') = 0$. Якщо це рівняння можна розв'язати відносно y' , то його можна подати у вигляді $y' = f(x, y)$. В цьому випадку говорять, що рівняння розв'язане відносно похідної.

Задача Коші для диференціального рівняння першого порядку полягає в тому, щоб знайти такий розв'язок цього рівняння $y = \varphi(x)$, для якого $\varphi(x_0) = y_0$. Ці умови називаються початковими умовами. Їх записують також у вигляді $y|_{x=x_0} = y_0$, або при $x = x_0, y = y_0$. Розв'язок задачі Коші дає наступна теорема.

Теорема Коші. Якщо в рівнянні $y' = f(x; y)$ функція $f(x, y)$ і її частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial y}$ неперервні в деякій області D , яка містить точку $M_0(x_0; y_0)$, то існує єдиний розв'язок цього рівняння $y = \varphi(x)$, який задовольняє початковим умовам $\varphi(x_0) = y_0$.

Геометричний зміст теореми: існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ диференціального рівняння

$y' = f(x; y)$, графік якого проходить через задану точку $(x_0; y_0)$. З теореми Коші випливає, що диференціальне рівняння $y' = f(x; y)$ має незліченну множину розв'язків (наприклад, розв'язок, графік якого проходить через точки $(x_0; y_0)$, $(x_0; y_1)$, $(x_0; y_2)$, ..., якщо тільки ці точки належать до області D).

Означення 1. Загальним розв'язком диференціального рівняння $y' = f(x; y)$ називається функція $y = \phi(x; C)$, яка залежить від сталої C і задовольняє умови:

- 1) для будь-якого C вона є розв'язком диференціального рівняння;
- 2) для довільних початкових умов $y(x_0) = y_0$ існує таке значення C_0 , що $y_0 = \phi(x_0; y_0)$.

Означення 2. Частинним розв'язком диференціального рівняння $y' = f(x; y)$ називається розв'язок, який отримують із загального при конкретному значенні C_0 ($y = \phi(x; C_0)$) за допомогою початкових умов.

Якщо розв'язок дістаємо у неявному вигляді $\Phi(x; y; C) = 0$, то це загальний, або частинний інтеграл диференціального рівняння $\Phi(x; y; C_0) = 0$.

З геометричної точки зору загальний розв'язок диференціального рівняння $y = \phi(x; C)$ – це сім'я інтегральних кривих, а частинний розв'язок – одна з ліній сім'ї, яка проходить через задану точку $(x_0; y_0)$.

Розв'язати або проінтегрувати диференціальне рівняння – це означає:

- 1) знайти загальний розв'язок або загальний інтеграл (якщо початкові умови не задані);
- 2) знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє заданим початковим умовам (якщо вони є).

4. Рівняння з відокремлюваними змінними

Означення. Диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними називається рівняння вигляду

$$y' = f(x) \cdot g(y) \quad (f(x) \cdot g(y) \neq 0) \quad (4.1)$$

Порівняно із загальним виглядом рівняння першого порядку $y' = f(x; y)$ маємо

$$f(x; y) = f(x) \cdot g(y). \text{ Далі маємо } \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y), \text{ або}$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx \quad (4.2)$$

Якщо y вважати функцією від x , то маємо рівняння двох диференціалів, тому їх первісні відрізняються на довільну сталу. Інтегруючи рівність (4.2), одержимо загальний інтеграл диференціального рівняння

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx \quad (4.3)$$

Зауваження. Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними можна подати у вигляді

$$M_1(x) N_1(y) dx + M_2(x) N_2(y) dy = 0,$$

де $N_1(y) M_2(x) \neq 0$.

Тепер маємо $\frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = 0$. Це рівняння з відокремленими змінними. Інтегруючи, знайдемо загальний інтеграл диференціального рівняння.

Приклад. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$(xy - y) dx + (x + xy^2) dy = 0, \quad y(1) = 1$$

Зробимо перетворення

$$y(x - 1) dx + x(1 + y^2) dy = 0$$

і відокремимо змінні (поділивши обидві частини рівняння на $xy \neq 0$):

$$\frac{x - 1}{x} dx + \frac{1 + y^2}{y} dy = 0$$

проінтегрувавши рівняння, одержимо

$$\int (1 - \frac{1}{x}) dx + \int (\frac{1}{y} + y) dy = C,$$

або

$$x - \ln |x| + \ln |y| + \frac{y^2}{2} = C.$$

Визначимо з початкових умов довільну сталу:

$$1 - \ln 1 + \ln 1 + \frac{1}{2} = C, \quad C = \frac{3}{2},$$

а потім, підставивши знайдене значення довільної сталої у загальний

інтеграл, знайдемо шуканий частинний інтеграл

$$x - \ln x + \ln y + \frac{y^2}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{або} \quad \ln \frac{y}{x} + x + \frac{y^2}{2} = \frac{3}{2}$$

5. Однорідні рівняння першого порядку

Означення 1. Функція $f(x; y)$ називається однорідною функцією n -го виміру, якщо для будь-якого λ має місце тотожність

$$f(\lambda x; \lambda y) = \lambda^n f(x; y)$$

Приклади. Функція $f(x; y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$ – однорідна функція виміру $\frac{2}{3}$, тому що

$$f(\lambda x; \lambda y) = \sqrt[3]{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = \sqrt[3]{\lambda^2(x^2 + y^2)} = \lambda^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{x^2 + y^2} = \lambda^{\frac{2}{3}} f(x; y).$$

Функція $f(x; y) = \frac{x^2 + y^2}{xy} \ln \left| \frac{y}{x} \right|$ – однорідна функція нульового виміру,

тому що

$$f(\lambda x; \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}{(\lambda x)(\lambda y)} \ln \left| \frac{\lambda y}{\lambda x} \right| = \frac{x^2 + y^2}{xy} \ln \left| \frac{y}{x} \right| = \lambda^0 f(x; y)$$

Означення 2. Диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (5.1)$$

називається однорідним, якщо функція $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового виміру.

Розв'язання однорідного рівняння. Однорідна функція нульового виміру залежить лише від відношення змінних, бо $f(\lambda x; \lambda y) = f(x; y)$ і якщо покласти $\lambda = \frac{1}{x}$, то $f(1; \frac{y}{x}) = f(x; y)$. Позначимо $f(1; \frac{y}{x}) = \varphi(\frac{y}{x})$. Тоді рівняння (5.1) набуває вигляду

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad (5.2)$$

Зробимо підстановку $u = \frac{y}{x}$ або $y = u x$. Тоді маємо $\frac{dy}{dx} = x \frac{du}{dx} + u$.

Підставимо значення похідної в (5.2) і одержимо $x \frac{du}{dx} + u = \varphi(u)$ або $x \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$.

Ми одержали рівняння з відокремлюваними змінними. Вважаємо, що $\varphi(u) - u \neq 0$, і відокремлюємо змінні $\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$ звідки $\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln |x| + C$.

Підставимо після інтегрування замість $u = \frac{y}{x}$ і знайдемо загальний інтеграл диференціального рівняння.

Зауваження. Рівняння $M(x;y) dx + N(x;y)dy = 0$ є однорідним, якщо функції $M(x,y)$ і $N(x,y)$ є однорідними функціями одного виміру.

Приклад. Розв'язати рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$, $y(1) = e^2$

Це рівняння є однорідним тому, що $f(x;y) = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$ – однорідна функція нульового виміру:

$$f(\lambda x; \lambda y) = \frac{\lambda y}{\lambda x} \ln \frac{\lambda y}{\lambda x} = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x} = f(x;y).$$

Покладемо $u = \frac{y}{x}$, $y = u x$, $\frac{dy}{dx} = x \frac{du}{dx} + u$. Тоді після підстановки у рівняння, одержимо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$x \frac{du}{dx} + u = u \ln u \quad \text{або} \quad x \frac{du}{dx} = u \ln u - u.$$

Відокремлюючи змінні, знаходимо

$$\frac{du}{u (\ln u - u)} = \frac{dx}{x} \quad \text{або} \quad \frac{du}{u (\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}.$$

Проінтегрувавши, отримаємо

$$\ln |\ln u - 1| = \ln |x| + \ln |C| \quad \text{або} \quad \ln u - 1 = Cx.$$

Підставивши $u = \frac{y}{x}$, отримаємо

$$\ln \frac{y}{x} = Cx + 1, \quad \text{або} \quad \frac{y}{x} = e^{Cx+1}, \quad \text{або} \quad y = x e^{Cx+1}.$$

Знаходимо шуканий частинний розв'язок з початкових умов

$e^2 = 1 e^{C \cdot 1 + 1}$, звідки $2 = C + 1$ або $C = 1$. Підставимо у загальний розв'язок $C = 1$ і добудемо шуканий частинний розв'язок, який задовольняє початковим умовам:

$$y = x e^{x+1}$$

6. Лінійні рівняння першого порядку

Означення. Диференціальне рівняння першого порядку називається лінійним, якщо воно першого ступеня відносно шуканої функції та її похідної y' . Воно має вигляд

$$\frac{dy}{dx} + P(x) = Q(x) \tag{6.1}$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – неперервні функції.

Розв'язання лінійного рівняння. Будемо шукати розв'язок лінійного рівняння у вигляді добутку двох шуканих функцій $u(x)$ і $v(x)$, тобто

$$y = u(x) \cdot v(x) \quad (6.2)$$

Знайдемо похідну цієї функції $\frac{dy}{dx} = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}$. Підставивши значення $\frac{dy}{dx}$ і y у рівняння (6.1), отримаємо

$$v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx} + P(x)u v = Q(x),$$

або

$$v \frac{du}{dx} + u \left(\frac{dv}{dx} + P(x) \cdot v \right) = Q(x) \quad (6.3)$$

Виберемо функцію v так, щоб

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0 \quad (6.4)$$

Рівняння (6.4) – рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюючи змінні, добудемо

$$\frac{dv}{v} = -P(x)dx$$

Проінтегрувавши, знайдемо

$$\ln |v| = - \int P(x)dx + \ln |C_1| \quad \text{або} \quad v = C_1 e^{-\int P(x)dx}.$$

Тому що нам потрібен будь-який ненульовий частинний розв'язок рівняння, покладемо $C_1 = 1$, тобто $v = e^{-\int P(x)dx}$. Тоді для визначення шуканої функції u маємо рівняння

$$v \frac{du}{dx} = Q(x) \quad \text{або} \quad \frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)},$$

звідки

$$u = \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C.$$

Підставимо замість u та v знайдені функції та добудемо загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y = v(x) \left(\int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C \right) \quad \text{або} \quad y = v(x) \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C v(x).$$

Приклад. Розв'язати рівняння $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x+2} = (x+2)^2$.

Це рівняння є лінійним. Шукаємо розв'язок у вигляді

$$y = u \cdot v, \quad \frac{dy}{dx} = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}.$$

Підставимо y і $\frac{dy}{dx}$ в дане рівняння і добудемо

$$v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx} + \frac{uv}{x+2} = (x+2)^2 \quad \text{або} \quad v \frac{du}{dx} + u \left(\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x+2} \right) = (x+2)^2 \quad (6.5)$$

Знаходимо функцію v з рівняння $\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x+2} = 0$. Відокремлюємо змінні, добуваємо

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x+2}.$$

Проінтегрувавши рівняння, знаходимо $\ln|v| = -\ln|x+2| + C_1$. Поклавши $C_1 = 0$, добуваємо $v = \frac{1}{x+2}$. Підставимо знайдене значення v у (6.5), добуваємо

$$\frac{1}{x+2} \frac{du}{dx} = (x+2)^2 \quad \text{або} \quad du = (x+2)^3 dx.$$

Проінтегрувавши, одержимо

$$u = \frac{(x+2)^4}{4} + C.$$

Знаходимо загальний розв'язок рівняння

$$y = u \cdot v = \frac{1}{x+2} \left(\frac{(x+2)^4}{4} + C \right) \quad \text{або} \quad y = \frac{(x+2)^3}{4} + \frac{C}{x+2}.$$

7. Рівняння Бернуллі

Означення. Диференціальне рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \quad (7.1)$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ неперервні функції ($n \neq 0, n \neq 1$), називається рівнянням Бернуллі.

Зведемо рівняння Бернуллі до лінійного. Поділимо обидві частини рівняння (7.1) на y^{-n} і добудемо

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x). \quad (7.2)$$

Зробимо заміну шуканої функції $z = y^{1-n}$, $\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx}$. Підставимо

значення y^{1-n} і $y^{-n} \frac{dy}{dx}$ у рівняння (7.2) і добудемо наступне лінійне рівняння:

$$\frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x) \quad \text{або} \quad \frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x).$$

Знаходимо загальний розв'язок останнього рівняння і підставимо замість z вираз y^{1-n} і добудемо загальний інтеграл диференціального рівняння.

Зауваження. Отже, якщо рівняння Бернуллі зводиться до лінійного рівняння, то його розв'язок можна шукати у вигляді $y = u(x) \cdot v(x)$, де $v(x)$ будь-який ненульовий розв'язок рівняння

$$\frac{dv}{dx} + P(x) \cdot v(x) = 0.$$

Приклад. Розв'язати рівняння $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x y^2$, $y(1) = 1$.

Шукаємо розв'язок рівняння у вигляді $y = u \cdot v$, $\frac{dy}{dx} = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}$.

Підставивши у рівняння замість y і $\frac{dy}{dx}$ їх значення, одержимо

$$v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx} + \frac{uv}{x} = x(uv)^2 \quad \text{або} \quad v \frac{du}{dx} + u \left(\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} \right) = x u^2 v^2 \quad (7.3)$$

Для знаходження функції v маємо рівняння

$$\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}.$$

звідки $\ln|v| = -\ln|x|$ або $v = \frac{1}{x}$.

Підставивши знайдене значення v у рівняння (7.3), знаходимо

$$\frac{1}{x} \frac{du}{dx} = x u^2 \frac{1}{x^2} \quad \text{або} \quad \frac{du}{u^2} = dx.$$

Зінтегрувавши, знаходимо $-\frac{1}{u} = x + C$, звідки $u = -\frac{1}{x+C}$.

Таким чином, загальний розв'язок рівняння

$$y = u v = -\frac{1}{x(x+C)}.$$

Знайдемо частинний розв'язок рівняння, який задовольняє заданим початковим умовам:

$$1 = -\frac{1}{1(1+C)}, \text{ звідки } C = -2.$$

Підставимо знайдене значення довільної сталої у загальний розв'язок і добудемо шуканий частинний розв'язок:

$$y = -\frac{1}{x(x+C)}.$$

8. Рівняння у повних диференціалах

Означення. Диференційне рівняння

$$M(x;y) dx + N(x;y) dy = 0 \quad (8.1)$$

називається рівнянням у повних диференціалах, якщо функції $M(x;y)$ і $N(x;y)$ неперервні в області D , мають неперервні частинні похідні $\frac{\partial M}{\partial y}$ та $\frac{\partial N}{\partial x}$ і у кожній точці області D

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (8.2)$$

Інтегрування рівняння у повних диференціалах.

Доведемо, що ліва частина (8.1), якщо виконані умови (8.2), є повним диференціалом деякої функції $u(x;y)$ і навпаки, якщо виконані умови (8.2), то ліва частина (8.1) є повним диференціалом деякої функції $u(x;y)$, тобто рівняння (8.1) має вигляд $du(x;y) = 0$, і тому його загальний інтеграл є $u(x;y) = C$.

Справді, нехай ліва частина (8.1) є повний диференціал деякої функції $u(x;y)$, тобто

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \equiv M(x;y) dx + N(x;y) dy;$$

тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x;y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x;y) \quad (8.3)$$

$$\text{маємо } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Тому що за умовами $\frac{\partial M}{\partial y}$ та $\frac{\partial N}{\partial x}$ неперервні, то мішані похідні неперервні і є рівними, тобто

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

і рівняння (8.1) є рівнянням у повних диференціалах.

Доведемо, що з умови (8.2) випливає, що ліва частина (8.1) є повним диференціалом деякої функції $u(x;y)$. Нехай $P(x_0;y_0)$ – деяка точка області D . Проінтегрувавши співвідношення

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x;y) \quad \text{за } x \text{ і вважаючи, що } y \text{ – стала, добудемо}$$

$$u = \int_{x_0}^x M(x;y) dx + \phi(y), \quad (8.4)$$

де $\phi(y)$ – довільна функція, яка залежить лише від y . Покажемо, що

функцію $\phi(y)$ можна знайти так, щоб виконувалось друге з співвідношень (8.3).

Диференціюємо (8.4) за y :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x M(x;y) dx + \phi'(y) = \int \frac{\partial M}{\partial y} dx + \phi'(y).$$

Змінити порядок інтегрування і диференціювання можна за теоремою Лейбніца. Врахуємо, що $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x;y)$ та $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, добудемо

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y} dx + \phi'(y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial N}{\partial x} dx + \phi'(y) = N(x;y). \quad (8.5)$$

Помітимо, що

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial N}{\partial x} dx = N(x;y) - N(x_0;y)$$

Підставимо значення інтеграла у (8.5), добуваємо диференціальне рівняння для знаходження функції $\phi(y)$:

$$N(x;y) - N(x_0;y) + \phi'(y) = N(x;y) \quad \text{або} \quad \phi'(y) = N(x_0;y),$$

звідки

$$\phi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0;y) dy + C_1, \quad (8.6)$$

де C_1 – довільна стала.

Підставимо (8.6) у (8.4) і знайдемо функцію $u(x;y)$:

$$u(x;y) = \int_{x_0}^x M(x;y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0;y) dy + C_1.$$

Якщо функцію $u(x,y)$ прирівняти довільній сталій, то добудемо загальний інтеграл рівняння (8.1):

$$\int_{x_0}^x M(x;y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0;y) dy = C.$$

Приклад. Розв'язати рівняння $\left(x^3 + \frac{2x}{y^2}\right)dx + \left(2y - \frac{2x^2}{y^3}\right)dy = 0$

Перевіримо, що це рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Позначимо

$$M(x;y) = x^3 + \frac{2x}{y^2}, \quad N(x;y) = 2y - \frac{2x^2}{y^3}.$$

Маємо

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{4x}{y^3}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{4x}{y^3}.$$

Якщо $y \neq 0$, то функції $M(x;y)$, $N(x;y)$, $\frac{\partial M}{\partial y}$ та $\frac{\partial N}{\partial x}$ неперервні і

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Тому ліва частина рівняння є повним диференціалом деякої функції

$u(x; y)$:

$$u(x; y) = \int_{x_0}^x \left(x^3 + \frac{2x}{y^2} \right) dx + \int_{y_0}^y \left(2y - \frac{2x_0^2}{y^3} \right) dy = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{y^2} \right) \Big|_{x_0}^x + \left(y^2 + \frac{x_0^2}{y^2} \right) \Big|_{y_0}^y =$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{y^2} + y^2 + \frac{x_0^2}{y^2} - \frac{x_0^4}{4} - \frac{x_0^2}{y_0^2} - y_0^2 - \frac{x_0^2}{y_0^2}$$

Позначимо $C_1 = -\frac{x_0^4}{4} - y_0^2 - \frac{x_0^2}{y_0^2}$. Тоді $u = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{y^2} + y^2 + C_1$ і загальний інтеграл

має вигляд

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{y^2} + y^2 = C$$

Питання для самоперевірки

1. Яке рівняння називається диференціальним?
2. Що називають порядком диференціального рівняння?
3. Який вигляд має диференціальне рівняння першого порядку, яке розв'язане відносно похідної?
4. Що називають розв'язком диференціального рівняння?
5. Що називають інтегральною кривою диференціального рівняння $y' = f(x; y)$?
6. Сформулювати задачу Коші для диференціального рівняння $y' = f(x; y)$.
7. Що називається загальним розв'язком диференціального рівняння $y' = f(x; y)$?
8. Як із загального розв'язку диференціального рівняння добути частинний розв'язок?
9. Яке диференціальне рівняння називається рівнянням з відокремлюваними змінними?
10. Дати означення однорідної функції і однорідного диференціального рівняння першого порядку.
11. Як розв'язати однорідне рівняння першого порядку?
12. Дати означення лінійного рівняння першого порядку. Як розв'язати таке рівняння?
13. Який вигляд має рівняння Бернуллі?
14. Як розв'язати рівняння Бернуллі?
15. Дати означення рівняння у повних диференціалах.

9. Рівняння вищих порядків

У загальному випадку рівняння n -го порядку має вигляд $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$. Якщо це рівняння можна розв'язати відносно $y^{(n)}$, тоді

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (9.1)$$

Задача, яка полягає у знаходженні розв'язку (9.1), який задовольняє початковим умовам

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (9.2)$$

називається задачею Коші. Розв'язок задачі Коші дає теорема.

Теорема Коші.

Якщо в рівнянні (9.1) функція f та її частинні похідні за змінними $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ неперервні в області D , яка містить значення $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$, то існує єдиний розв'язок, який задовольняє початковим умовам (9.2).

Загальним розв'язком (інтегралом) називається функція $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ ($\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$)

яка задовольняє умовам:

1) при довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$ вона задовольняє диференціальному рівнянню;

2) при довільних умовах (9.2) існують такі сталі $C_i = C_i^0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), при яких ці умови виконуються.

Частинний розв'язок (інтеграл) дістаємо із загального при $C_i = C_i^0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

10. Рівняння, які допускають зниження порядку

У деяких випадках порядок рівняння може бути знижений. Прийоми такого зниження різноманітні. Вкажемо деякі з них.

1. $y^{(n)} = f(x)$

Загальний розв'язок можна дістати після n -кратного інтегрування

$$y = \underbrace{\int dx \int dx \dots \int dx}_n f(x) + \frac{C_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{C_2 x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_{n-1} + C_n$$

2. $y'' = f(x, y')$

Тут немає y . Користуємося підстановкою $y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dx}$. Рівняння набуває вигляду

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p) \quad \text{і має перший порядок відносно } p.$$

$$3. y'' = f(y, y')$$

Тут немає x . Користуємося підстановкою $y' = p(y) = p$. Тоді $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$.

Рівняння набуває вигляду $p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$ і має перший порядок відносно

p .

Зауваження 1. Якщо маємо рівняння $y'' = f(y')$, то доцільніше застосовувати випадок 2.

Зауваження 2. Якщо задані початкові умови, то доцільніше при інтегруванні одразу визначити довільні сталі.

Приклади 1. Розв'язати рівняння

$$(1 + x^2) y'' - 2x y' = 0.$$

Покладемо $y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dx}$. Маємо $(1 + x^2) \frac{dp}{dx} - 2x p = 0$. Це рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\text{Маємо } \frac{dp}{p} = \frac{2x dx}{1 + x^2};$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{2x dx}{1 + x^2} + \ln |C_1|, \text{ або } \ln |p| = \ln |1 + x^2| + \ln |C_1|,$$

$$p = C_1 (1 + x^2), \quad \frac{dy}{dx} = C_1 (1 + x^2),$$

$$y = \frac{C_1 x^3}{3} + C_1 x + C_2.$$

2. Розв'язати рівняння $y'' = e^{2y}$, $x = 1$, $y = 0$, $y' = -1$.

Покладемо $y' = p$, $y'' = p \frac{dp}{dy}$. Маємо $p \frac{dp}{dy} = e^{2y}$,

$$p dp = e^{2y} dy,$$

$$\int p dp = \int e^{2y} dy + C_1,$$

$$\frac{p^2}{2} = \frac{e^{2y}}{2} + C_1.$$

Підставляємо початкові умови і знаходимо C_1 : $\frac{(-1)^2}{2} = \frac{e^0}{2} + C_1$, $C_1 = 0$.

Маємо рівняння

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = e^{2y}, \quad \frac{dy}{dx} = -\sqrt{e^{2y}}, \quad \frac{dy}{dx} = -e^y.$$

Перед квадратним коренем потрібно обрати знак „-“, бо при $x = 1$, $y' = -1$.

Проінтегрувавши останнє рівняння добуваємо $-e^{-y} dy = dx$, $e^{-y} = x + C_2$. Визначаємо сталу C_2 : $e^0 = 1 + C_2$, $C_2 = 0$ і добуваємо шуканий частинний

розв'язок

$$e^{-y} = x, \quad y = \ln x.$$

11. Лінійні однорідні рівняння вищих порядків

Означення. Лінійним рівнянням n -го порядку називається рівняння

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (11.1)$$

де $a_i(x)$ ($i=1,2,\dots,n$) і $f(x)$ – неперервні функції. Якщо $f(x)\equiv 0$, то рівняння називається однорідним, якщо $f(x)\neq 0$, то рівняння називається неоднорідним або з правою частиною.

Рівняння (11.1) є окремим випадком (9.2) і на нього поширюється теорема Коші.

Означення. Система функцій називається лінійно залежною на $[a; b]$, якщо існують такі сталі α_i ($i=1,2,\dots,n$), які одночасно не всі дорівнюють 0, і такі, що

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) = 0 \quad (11.2)$$

Якщо рівність (11.2) має місце лише у випадку $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, то функції називаються лінійно незалежними на $[a, b]$.

Для двох лінійно залежних функцій y_1 і y_2 $\frac{y_2}{y_1} = \lambda$ (λ – стала), і навпаки.

Розглянемо рівняння

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (11.3)$$

Означення. Система двох лінійно незалежних розв'язків y_1 і y_2 рівняння (11.3) називається фундаментальною.

Теорема. Загальний розв'язок рівняння (11.3) є лінійною комбінацією фундаментальної системи розв'язків, тобто

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad (11.4)$$

Приклад. Рівняння $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x} = 0$ має фундаментальну систему розв'язків

$y_1 = x$ і $y_2 = x \ln|x|$, тому загальний розв'язок має вигляд $y = C_1 x + C_2 x \ln|x|$.

12. Лінійні неоднорідні рівняння другого порядку

Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння другого порядку

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \quad (12.1)$$

і відповідне йому однорідне рівняння

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (12.2)$$

Загальний розв'язок (12.1) визначає наступна теорема.

Теорема 1. Загальний розв'язок рівняння (12.1) має вигляд

$$y = y_0 + Y, \quad (12.3)$$

де y_0 – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння (12.2), а Y – частинний розв'язок (12.1).

Дуже корисною є також теорема про суперпозицію розв'язків (12.1).

Теорема 2. Якщо Y_1 – розв'язок рівняння $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_1(x)$, а Y_2 – розв'язок рівняння $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_2(x)$, то $Y = Y_1 + Y_2$ є розв'язком рівняння (12.1), де $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$y'' + y = x + e^x \quad (12.4)$$

Частинним розв'язком рівняння $y'' + y = x$ є функція $Y_1 = x$, а частинним розв'язком рівняння $y'' + y = e^x$ є функція $Y_2 = \frac{1}{2}e^x$, тому $Y = x + \frac{1}{2}e^x$ є частинним розв'язком (12.4). Якщо функції $y_1 = \cos x$ і $y_2 = \sin x$ утворюють фундаментальну систему розв'язків відповідного однорідного рівняння $y'' + y = 0$, то загальний розв'язок (12.4) має вигляд

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x + \frac{1}{2}e^x.$$

13. Лінійні однорідні рівняння другого порядку

Розглянемо рівняння

$$y'' + p y' + q y = 0, \quad (13.1)$$

де p і q – сталі дійсні числа. Шукаємо розв'язок рівняння у вигляді

$$y = e^{kx} \quad (13.2)$$

де k – стала. Маємо $y' = k e^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$. Підставляючи ці значення в

(13.1), маємо:

$$\begin{array}{l} \text{Звідси} \end{array} \quad \begin{array}{l} e^{kx} (k^2 + pk + q) = 0. \\ k^2 + pk + q = 0 \end{array} \quad (13.3)$$

Це рівняння називають характеристичним для рівняння (13.1), його корені k_1 і k_2 . Можливі три випадки.

Перший випадок. Корені k_1 і k_2 - дійсні і різні.

Тоді $y_1 = e^{k_1 x}$ і $y_2 = e^{k_2 x}$ - лінійно незалежні розв'язки (13.1), бо $\frac{y_2}{y_1} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq \text{const}$. За теоремою з п.11 загальний розв'язок (13.1) набирає вигляду

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \quad (13.4)$$

Другий випадок. Корені k_1 і k_2 - дійсні і рівні.

В цьому випадку функції $y_1 = e^{k_1 x}$ і $y_2 = x e^{k_2 x}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок набирає вигляду

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_2 x} \quad (13.5)$$

Третій випадок. Корені k_1 і k_2 - комплексно-спряжені, $k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ ($\frac{p^2}{4} - q < 0$).

Позначимо $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$. Тоді функції $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ і $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ утворюють фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок набирає вигляду

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x \quad (13.6)$$

Приклади. Розв'язати рівняння

$$1) y'' + 3y' + 2y = 0; \quad 2) y'' - 2y' + y = 0; \quad 3) y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Розв'язання. Складемо характеристичні рівняння. Маємо відповідно:

$$1) k^2 + 3k + 2 = 0; \quad 2) k^2 - 2k + 1 = 0; \quad 3) k^2 + 2k + 5 = 0.$$

Корені характеристичних рівнянь такі :

$$1) k_1 = -1, k_2 = -2; \quad 2) k_1 = k_2 = 1; \quad 3) k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-4}; \quad \alpha = -1, \beta = 2.$$

Враховуючи значення коренів характеристичних рівнянь, знаходимо фундаментальні системи розв'язків:

$$1) y_1 = e^{-x} \text{ і } y_2 = e^{-2x}; \quad 2) y_1 = e^x \text{ і } y_2 = x e^x; \quad 3) y_1 = e^{-x} \cos 2x \text{ і } y_2 = e^{-x} \sin 2x$$

і добуваємо загальні розв'язки кожного з рівнянь:

$$1) y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}; \quad 2) y = C_1 e^x + C_2 x e^x; \quad 3) y = C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x$$

14. Лінійні неоднорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо рівняння

$$y'' + p y' + q y = f(x), \quad (14.1)$$

де права частина має спеціальний вигляд

$$f(x) = (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n) e^{\alpha x} = P_n(x) e^{\alpha x} \quad (14.2)$$

Загальний розв'язок (14.1) за теоремою 1 п.12 має вигляд $y = y_0 + y_H$, де y_0 – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, а y_H – частинний розв'язок рівняння (14.1).

Щоб знайти частинний розв'язок (14.1), будемо шукати його у вигляді

$$y_H = x^r (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n) = x^r Q_n(x) e^{\alpha x} \quad (14.3)$$

де $r=0$, якщо α не є коренем характеристичного рівняння

$$k^2 + p k + q = 0 \quad (14.4)$$

відповідного однорідного рівняння, $r=1$, якщо α простий корінь рівняння (14.4) і $r=2$, якщо α подвійний корінь характеристичного рівняння (14.4).

У випадку, якщо права частина (14.1) має вигляд

$$f(x) = M \cos \beta x + N \sin \beta x, \quad (14.5)$$

то шукаємо розв'язок (14.1) у вигляді

$$y_H = A \cos \beta x + B \sin \beta x, \quad (14.6)$$

якщо βi не є коренем характеристичного рівняння (14.4) і у вигляді

$$y_H = Ax \cos \beta x + Bx \sin \beta x, \quad (14.7)$$

якщо βi є коренем характеристичного рівняння (14.4).

Приклад 1. Знайти розв'язок рівняння $y'' - y' = x + \sin x$.

Розв'язання. Згідно з теоремами 1 і 2 п. 12, маємо $y = y_0 + Y_1 + Y_2$,

де y_0 – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y'' - y' = 0$, Y_1 – частинний розв'язок рівняння $y'' - y' = x$, а Y_2 – частинний розв'язок рівняння $y'' - y' = \sin x$.

Характеристичне рівняння $k^2 - k = 0$ має корені $k_1 = 0$ і $k_2 = 1$,

$$y_0 = C_1 e^{0x} + C_2 e^{1x}.$$

Знайдемо вигляд Y_1 для рівняння $y'' - y' = x e^{0x}$. Тому що $\alpha = 0$ простий корінь характеристичного рівняння, а x – многочлен першого степеня, то шукати розв'язок потрібно у вигляді $Y_1 = (Ax + B)x = Ax^2 + Bx$. Знайдемо вигляд Y_2 для рівняння $y'' - y' = \sin x$. Отже, $\beta i = i$ не є коренем характеристичного рівняння, то шукаємо розв'язок у вигляді $Y_2 = D \cos x + E \sin x$.

Тоді

$$Y_1 + Y_2 = Ax^2 + Bx + D \cos x + E \sin x$$

$$(Y_1 + Y_2)' = 2Ax + B - D \sin x + E \cos x$$

$$(Y_1 + Y_2)'' = 2A - D \cos x - E \sin x$$

Підставимо $Y_1 + Y_2$ у ліву частину рівняння і добудемо тотожність

$$2A - B - 2Ax - (D + E) \cos x + (D - E) \sin x \equiv x + \sin x$$

Добуваємо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів A, B, C, D :

$$\begin{cases} -2A = 1 \\ 2A - B = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} D + E = 0 \\ D - E = 1 \end{cases}$$

Розв'язавши систему, знайдемо $A = -\frac{1}{2}$, $B = -1$, $D = \frac{1}{2}$, $E = -\frac{1}{2}$.

Загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = C_1 + C_2 e^x - \frac{1}{2} x^2 - x + \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x.$$

15. Метод варіації довільних сталих

Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа) дозволяє знаходити загальний розв'язок неоднорідних диференціальних рівнянь, не накладаючи обмежень на вид правої частини, тобто є загальним методом інтегрування неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Нехай дано неоднорідне диференціальне рівняння

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \quad (15.1)$$

де a_1, a_2 – сталі коефіцієнти; $f(x)$ – довільна функція.

Розглянемо відповідне однорідне рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$. Його загальний розв'язок, як відомо, може бути представленим у вигляді лінійної комбінації двох лінійно незалежних частинних розв'язків y_1, y_2 , тобто

$$y_{o.o.} = C_1 y_1 + C_2 y_2. \quad (15.2)$$

Далі, будемо вважати у виразі (15.2) сталі C_1 і C_2 функціями від x , тобто шукати загальний розв'язок неоднорідного рівняння (15.1) у вигляді

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2, \quad (15.3)$$

де $C_1(x), C_2(x)$ – невідомі функції, які необхідно визначити.

В теорії диференціальних рівнянь показано, що визначення похідних від початкових функцій $C_1'(x), C_2'(x)$ зводиться до розв'язку лінійної алгебраїчної системи двох рівнянь з двома невідомими виду

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x). \end{cases} \quad (15.4)$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь сумісна і має єдиний розв'язок, якщо головний визначник системи

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} - \text{визначник Вронського} - \text{відмінний від нуля. Тоді}$$

вираз для $C_1'(x), C_2'(x)$ в загальному вигляді буде наступним

$$\begin{aligned} C_1'(x) &= -\frac{y_2 \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)}; \\ C_2'(x) &= \frac{y_1 \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)} \end{aligned} \quad (15.5)$$

Інтегруючи співвідношення (15.5), находимо вираз для початкових функцій $C_1(x), C_2(x)$:

$$\begin{aligned} C_1(x) &= -\int \frac{y_2 \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)} dx + \overline{C_1}, \\ C_2(x) &= \int \frac{y_1 \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)} dx + \overline{C_2}, \end{aligned} \quad (15.6)$$

де $\overline{C_1}, \overline{C_2}$ – константи інтегрування.

Підставляючи у формулу (15.3) знайдені вирази для $C_1(x), C_2(x)$ (15.5), одержимо загальний розв'язок неоднорідного рівняння (15.1):

$$y_{o.n.} = \left[- \int \frac{y_2 \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)} dx + \overline{C_1} \right] y_1 + \left[\int \frac{y_1 \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)} dx + \overline{C_2} \right] y_2. \quad (15.7)$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

Запишемо відповідне однорідне рівняння і знайдемо його загальний розв'язок:

$$y'' - y = 0.$$

Характеристичне рівняння має вигляд:

$$k^2 - 1 = 0; \quad k_1 = 1; \quad k_2 = -1.$$

Таким чином, лінійно незалежними частинними розв'язками будуть функції $y_1 = e^x$ і $y_2 = e^{-x}$, а загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y_{o.o.} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Загальний розв'язок початкового однорідного рівняння шукаємо у вигляді:

$$y = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x}.$$

Система рівнянь (15.4) буде в даному випадку записана таким чином:

$$\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) e^{-x} = 0, \\ C_1'(x) e^x - C_2'(x) e^{-x} = \frac{e^x}{e^x + 1}. \end{cases}$$

Додаючи рівняння, маємо:

$$2C_1'(x) e^x = \frac{e^x}{e^x + 1},$$

$$C_1'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{e^x + 1}.$$

Інтегруючи останню рівність:

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{e^x + 1} = \left\{ \begin{array}{l} e^x + 1 = t; \quad e^x = t - 1; \\ x = \ln(t - 1); \quad dx = \frac{dt}{t - 1}; \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t(t - 1)} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{t - (t - 1)}{t(t - 1)} dt = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t - 1} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t - 1| - \frac{1}{2} \ln |t| + \overline{C_1} = \\ &= \frac{1}{2} \ln |e^x| - \frac{1}{2} \ln |e^x + 1| + \overline{C_1} = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \ln |e^x + 1| + \overline{C_1}. \end{aligned}$$

Із першого рівняння системи находимо:

$$C_2'(x) = -C_1'(x) \cdot e^{2x};$$

$$C_2'(x) = -\frac{1}{2} \frac{e^{2x}}{e^x + 1};$$

$$\begin{aligned} C_2(x) &= -\frac{1}{2} \int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{e^x d(e^x + 1)}{e^x + 1} = \left\{ \begin{array}{l} e^x + 1 = t \\ d(e^x + 1) = dt \end{array} \right\} = \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{(t-1)dt}{t} = -\frac{1}{2} \int dt + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \ln|t| + \overline{C}_2 = \\ &= -\frac{1}{2} (e^x + 1) + \frac{1}{2} \ln|e^x + 1| + \overline{C}_2. \end{aligned}$$

Загальний розв'язок в силу (15.7) має вид:

$$\begin{aligned} y &= \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \ln|e^x + 1| + \overline{C}_1 \right] e^x + \left[-\frac{1}{2} (e^x + 1) + \frac{1}{2} \ln|e^x + 1| + \overline{C}_2 \right] e^{-x} = \\ &= \overline{C}_1 e^x + \overline{C}_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x - \frac{1}{2} e^x \ln|e^x + 1| - \frac{1}{2} e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-x} \ln|e^x + 1| = \\ &= \overline{C}_1 e^x + \overline{C}_2 e^{-x} + \frac{1}{2} \left[(e^{-x} - e^x) \ln|e^x + 1| + x e^x - e^{-x} - 1 \right], \end{aligned}$$

де $\overline{C}_2, \overline{C}_1$ – довільні сталі.

Питання для самоперевірки

1. Який загальний вигляд диференціального рівняння n -го порядку?
2. Що називають розв'язком диференціального рівняння?
3. Сформулювати задачу Коші для диференціального рівняння $y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$.
4. Дати означення загального розв'язку диференціального рівняння n -го порядку.
5. Якими методами можна знизити порядок диференціального рівня?
6. Як добути характеристичне рівняння однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами?
7. Як добути загальний розв'язок однорідного рівняння у випадку:
а) корені характеристичного рівняння дійсні і різні; б) дійсні і рівні; в) комплексні спряжені?
8. Як добути загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння?
9. В чому полягає метод варіації довільних сталих?

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Варіант 1

Розв'язати рівняння.

1. $y' = \cos^2 x$

2. $y' \sqrt{1-x^2} = 1+y^2$

3. $x(1+y^2) + yy' \sqrt{1+x^2} = 0$

4. $(x+2y)dx - xdy = 0$

5. $xy' - 2y = 2x^4$

Розв'язати задачу Коші.

6. а) $(1+\ell^x)yy' = \ell^x$, $y(0) = 1$

б) $(9-x^2)y' - xy = 9$, $x(3) = 3$

Визначити тип диференціального рівняння і проінтегрувати його.

7. а) $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$, б) $y \sin x dx + \cos x dy = 0$,

в) $y' - \frac{y}{x+2} = x^3 + 2x$, $y(-1) = \frac{3}{2}$.

Знайти загальний розв'язок рівняння:

8. а) $y'' = \frac{1}{1+x^2}$, б) $xy'' = y'$, в) $y'' = \ell^y$

Розв'язати задачу Коші.

9. $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\ln 2}{2}$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Розв'язати рівняння.

10. а) $x'' - 2x' = 0$, б) $x'' - 5x' + 6x = 0$

в) $x'' - 2x' + 5x = 0$, $x(0) = x'(0) = 1$

Знайти загальний розв'язок рівняння.

11. а) $y'' - 2y' - 3y = \ell^{4x}$, б) $y'' - 3y' + 2y = \sin x$,

в) $y'' + 2y' + y = \frac{\ell^{-x}}{x}$.

Варіант 2

Розв'язати рівняння.

1. $y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$

2. $y' = e^{x+y}$

3. $x\sqrt{3+y^2}dx = -y\sqrt{1+x^2}dy = 0$

4. $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$

5. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$

Розв'язати задачу Коші.

6. а) $(xy^2 + x)dx + (xy^2 - y)dy = 0, \quad y(0) = 1$

б) $x' - x \operatorname{tg} t = \frac{1}{\cos t}, \quad x(0) = 0$

Визначити тип диференціального рівняння і проінтегрувати його.

7. а) $2xy' + y^2 = 1$, б) $y' = \frac{x+y}{x-y}$,

в) $y' + \frac{y}{x} = x^2, \quad y(1) = 0.$

Знайти загальний розв'язок рівняння:

8. а) $y'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, б) $y'' = y' + x$, в) $(y'')^2 = y'$

Розв'язати задачу Коші.

9. $y''(x^2 + 1) = 2xy', \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$

Розв'язати рівняння.

10. а) $3x'' - 2x' - 8x = 0$, б) $x'' - 4x' + 13x = 0$,

в) $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = -2.$

Знайти загальний розв'язок рівняння.

11. а) $y'' - 5y' + 6y = 2xe^{3x}$, б) $y'' + y = 3\sin 7x$,

в) $y'' + y = \operatorname{tg} x.$

Варіант 3

Розв'язати рівняння.

1. $y' = \sin^3 x$

2. $y' = \frac{x \sin x}{y \cos y}$

3. $(\ell^{2x} + 5)dy + y\ell^{2x}dx = 0$

4. $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$

5. $\frac{dy}{dx} = x^3 - 2\frac{y}{x}$

Розв'язати задачу Коші.

6. а) $y' \operatorname{ctg} x + y = 2, \quad y(0) = -1$

б) $x' = x \sin t + 2 \sin 2t, \quad x(0) = 1$

Визначити тип диференціального рівняння і проінтегрувати його.

7. а) $y - y' = y^2 + xy'$ б) $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$

в) $y' - \frac{y}{x+1} = (x+1)\ell^x, \quad y(0) = 1.$

Знайти загальний розв'язок рівняння:

8. а) $y'' = \frac{1}{x},$ б) $y'' = \frac{y'}{x} + x,$ в) $(1 + y'^2) = 2yy''.$

Розв'язати задачу Коші.

9. $y'' + \frac{y'}{x} = \frac{x^2}{y'}, \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 4.$

Розв'язати рівняння.

10. а) $y'' - 2y' - 2y = 0,$ б) $y'' + 6y' + 13y = 0,$

в) $x'' + 6x' + 9x = 0, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 1.$

Знайти загальний розв'язок рівняння.

11. а) $y'' - 3y' + 2y = \ell^{3x}(x-2)$ б) $y'' + 2y' + 5y = 3\sin 2x,$

в) $y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x.$

Варіант 4

Розв'язати рівняння.

1. $y' = \frac{1}{1 + \sqrt{x}}$

2. $(1 + y^2)x dx + (1 + x^2)dy = 0$

3. $y'(1 + \ell^x)dy = \ell^x dx$

4. $xy' = y - x \ln \frac{y}{x}$

5. $y' + y \operatorname{tg} x = \sec x$

Розв'язати задачу Коші.

6. а) $(1 - x)dy - ydx = 0, \quad y(0) = 1$

б) $y' - \frac{y}{x} = x^3, \quad x(0) = 0$

Визначити тип диференціального рівняння і проінтегрувати його.

7. а) $y + y = xy^3$, б) $(\ell^x + 2)dy = y\ell^x dx$.

в) $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0, \quad y(0) = 1$.

Знайти загальний розв'язок рівняння:

8. а) $y'' = \frac{1}{(1 - x)^2}$, б) $(1 + x^2)y' + (y')^2 + 1 = 0$,

в) $(y')^2 + 2yy' = 0$

Розв'язати задачу Коші.

9. $2y'' = 3y^2 \quad y(-2) = 1, \quad y'(-2) = -1$.

Розв'язати рівняння.

10. а) $4y'' - 6y' + 5y = 0$, б) $y'' - 6y' + 25y = 0$,

в) $y'' - 5y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$.

Знайти загальний розв'язок рівняння.

11. а) $y'' - y' + y = \ell^{2x}(x + 3)$, б) $y'' + 4y = 2 \sin x$,

в) $y'' + y = \operatorname{ctg} x$.

Варіант 5

Розв'язати рівняння.

1. $y' = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

2. $(1+y^2)x dx + (1+x^2)y dy = 0$

3. $y' \sqrt{4-x^2} + xy^2 + x = 0$

4. $(y + \sqrt{xy}) dx = x dy$

5. $x^2 y' + xy + 1 = 0$

Розв'язати задачу Коші.

6. а) $dx - \sqrt{1-x^2} dy = 0, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}.$

б) $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad y(0) = 0$

Визначити тип диференціального рівняння і проінтегрувати його.

7. а) $x\sqrt{1+y^2} dx + y\sqrt{1+x^2} dy = 0,$ б) $xy' = 3\sqrt{x^2+y^2} + y,$

в) $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} \ell^x, \quad y(1) = \ell.$

Знайти загальний розв'язок рівняння:

8. а) $y'' = x + \cos x,$ б) $(y'')^2 = y',$ в) $yy'' + (y')^2 = 1$

Розв'язати задачу Коші.

9. $y'' = \frac{1}{x} y', \quad y(2) = 6, \quad y'(2) = 1.$

Розв'язати рівняння.

10. а) $y'' - 7y' + 10y = 0,$ б) $y'' - 6y' + 25y = 0,$

в) $y'' - 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1.$

Знайти загальний розв'язок рівняння.

11. а) $y'' - 6y' + 8y = (x+3)\ell^x,$ б) $y'' + y' + y = 2 \cos 3x,$

$$\text{в)} \quad y'' + y = \frac{1}{\sin 2x}.$$

Варіант 6

Розв'язати рівняння.

$$1. \quad y' = x \cos x$$

$$2. \quad (x+1)dy + xydx = 0$$

$$3. \quad x\sqrt{4+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$$

$$4. \quad xy' - y = (x+y) \ln \frac{x+y}{y}$$

$$5. \quad xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$$

Розв'язати задачу Коші.

$$6. \text{ а)} \quad x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0, \quad y(1) = 0$$

$$\text{б)} \quad y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = \frac{3}{2}$$

Визначити тип диференціального рівняння і проінтегрувати його.

$$7. \text{ а)} \quad (1-x^2)dy + xydx = 0, \quad \text{б)} \quad y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12$$

$$\text{в)} \quad y' - \frac{y}{x} = x \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$8. \text{ а)} \quad y'' = \sin \frac{3}{2}x, \quad \text{б)} \quad xy'' - y' \ln \frac{y'}{x} = 0, \quad \text{в)} \quad yy'' = y^{12}$$

Розв'язати задачу Коші.

$$9. \quad y'' = x e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Розв'язати рівняння.

$$10. \text{ а)} \quad y'' + y' - 6y = 0, \quad \text{б)} \quad y'' - 9y' = 0,$$

$$\text{в)} \quad y'' - 6y' + 13y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

Знайти загальний розв'язок рівняння.

$$11. \text{ а)} \quad y'' - 7y' + 10y = 5e^{2x}, \quad \text{б)} \quad y'' + 25y = 12 \cos 3x,$$

$$\text{в)} \quad y'' - y' = 3 \frac{\ell^x}{x}.$$

Варіант 7

Розв'язати рівняння.

1. $y' = x^2 \ell^x$
2. $y \ell^{2x} dx - (1 + \ell^{2x}) dy = 0$
3. $(\ell^x + 8) dy = y \ell^x dx$
4. $y' - y \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$
5. $4(x^2 - y^2)(x dx - y dy) = 0$

Розв'язати задачу Коші.

$$6. \text{ а)} \quad x dy - y dx = 0, \quad y(1) = 1$$

$$\text{б)} \quad y' + \frac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1$$

Визначити тип диференціального рівняння і проінтегрувати його.

$$7. \text{ а)} \quad x \sqrt{1 + y^2} dx + y \sqrt{1 + x^2} dy = 0, \quad \text{б)} \quad xy' = 3 \sqrt{x^2 + y^2} + y,$$

$$\text{в)} \quad y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} \ell^x, \quad y(1) = \ell.$$

Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$8. \text{ а)} \quad y'' = \frac{6}{x^3}, \quad \text{б)} \quad y'' = 2y', \quad \text{в)} \quad y'' = 2yy'$$

Розв'язати задачу Коші.

$$9. \quad xy'' = \sqrt{1 + y^{12}}, \quad y(1) = 0, \quad y'(\ell^2) = 1.$$

Розв'язати рівняння.

$$10. \text{ а)} \quad y'' + y' - 16y = 0, \quad \text{б)} \quad y'' - 8y' + 13y = 0$$

$$\text{в)} \quad y'' + 8y' + 6y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1$$

Знайти загальний розв'язок рівняння.

$$11. \text{ а)} \quad y'' - 6y' + 8y = (x+5)\ell^{3x}, \quad \text{б)} \quad y'' + 9y = 4\cos 2x,$$

$$\text{в)} \quad y'' + 16y = \operatorname{tg} 4x.$$

Варіант 8

Розв'язати рівняння.

1. $y' = \frac{1}{x^2 - 1}$

2. $xydx + \sqrt{1-x^2} dy = 0$

3. $\sqrt{5+y^2} + yy'\sqrt{1-x^2} = 0$

4. $(x-y)dx + xdy = 0$

5. $y' + y \cos x = \sin 2x$

Розв'язати задачу Коші.

6. а) $2y'\sqrt{x} = y, \quad y(0) = 1$

б) $y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 5, \quad y(2) = 4$

Визначити тип диференціального рівняння і проінтегрувати його.

7. а) $(1 + \ell^x)y' = y\ell^x$, б) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$,

в) $dx + (xy - y^3)dy = 0, \quad y(-1) = 0$.

Знайти загальний розв'язок рівняння:

8. а) $y'' = \frac{8}{x^3}$, б) $y'' = 2y'$, в) $y'' = 2yy'$.

Розв'язати задачу Коші.

9. $(1+x^2)y'' + y^{12} + 1 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$.

Розв'язати рівняння.

10. а) $y'' - 5y' + 6y = 0$, б) $7y'' + y' = 0$,

в) $y'' + 9x = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1, \quad x'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -6$.

Знайти загальний розв'язок рівняння.

11. а) $y'' - 6y' + 8y = \ell^{2x}$, б) $y'' - y' + y = 14 \sin 2x$,

$$\text{в)} \quad y'' - y' = \frac{\ell^x}{1 + \ell^x}.$$

Варіант 9

Розв'язати рівняння.

$$1. \quad y' = 2\ell^x \cos x$$

$$2. \quad (x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$$

$$3. \quad xy' + y \ln y = 0$$

$$4. \quad y' = \frac{2x + y}{x}$$

$$5. \quad y' - 2xy = x^3$$

Розв'язати задачу Коші.

$$6. \text{ а)} \quad 2y' = y \cos x, \quad y(0) = 1$$

$$\text{б)} \quad y' + \frac{2}{x}y = x^3, \quad y(1) = -\frac{\pi}{6}$$

Визначити тип диференціального рівняння і проінтегрувати його.

$$7. \text{ а)} \quad xy' = -4\sqrt{x^2 + y^2} + y \quad \text{б)} \quad \sqrt{1 - x^2}y' + xy^2 + x = 0$$

$$\text{в)} \quad y' - \frac{2x - 5}{x^2}y = 5, \quad y(2) = 1.$$

Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$8. \text{ а)} \quad y'' = 4\cos 2x, \quad \text{б)} \quad y'' + 2xy'^2 = 0, \quad \text{в)} \quad y''y^3 = 1.$$

Розв'язати задачу Коші.

$$9. \quad (1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Розв'язати рівняння.

$$10. \text{ а)} \quad y'' - 4y' + 13y = 0, \quad \text{б)} \quad y'' - 4y = 0,$$

$$\text{в)} \quad y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Знайти загальний розв'язок рівняння.

$$11. \text{ а)} \quad y'' - 3y' + 2y = (x + 4)\ell^{2x} \quad \text{б)} \quad y'' + 64y = 2\sin 3x,$$

$$\text{в)} \quad y'' - 2y' + y = \frac{\ell^x}{1 + x^2}.$$

Варіант 10

Розв'язати рівняння.

1. $y' = \ln^2 x + 1$

2. $2x^2 yy' + y^2 = 2$

3. $y(1 + \ln y) + xy' = 0$

4. $x^2 y' + y^2 = 0, \quad y(-1) = 1$

5. $xy' + \frac{y}{x+1} = x$

Розв'язати задачу Коші.

6. а) $x^2 y' + y^2 = 0, \quad y(-1) = 1$

б) $y' + 3\frac{y}{x} = \frac{2}{x^3}, \quad y(1) = 1$

Визначити тип диференціального рівняння і проінтегрувати його.

7. а) $(\ell^{2x} + 5)dy + y\ell^{2x}dx = 0$, б) $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$,

в) $y' + \frac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi}$.

Знайти загальний розв'язок рівняння:

8. а) $y'' = \frac{y'}{x}(1 + \ln \frac{y'}{x})$, б) $y'' = \frac{1}{\cos^2 2x}$, в) $y'' = y^2 + 1$

Розв'язати задачу Коші.

9. $y^2 y'' = -1, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$.

Розв'язати рівняння.

10. а) $x'' + 3x' - 4x = 0$, б) $y'' + 4y' = 0$,

в) $x'' + 9x = 0, \quad x(\frac{\pi}{3}) = -1, \quad x'(\frac{\pi}{3}) = -6$,

Знайти загальний розв'язок рівняння.

11. а) $y'' - 4y' + 4y = x^2 \ell^x$, б) $y'' + y = \cos 3x$,

в) $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$.

Варіант 11

Розв'язати рівняння.

1. $y' = \frac{x}{x^3 - 1}$

2. $2x^2 yy' + y^2 = 2$

3. $y(1 + \ln y) + xy' = 0$

4. $\cos x \frac{dy}{dx} = y \sin x + \cos^2 x$

5. $\frac{3x^2 + y^2}{y^2} dx - \frac{2x^2 + 5y^2}{y^2} dy = 0$

Розв'язати задачу Коші.

6. а) $y'(x^2 - 4) = 2xy, \quad y(0) = 0$

б) $y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{\pi}{2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}$

Визначити тип диференціального рівняння і проінтегрувати його.

7. а) $y(1 + \ln y) + xy' = 0, \quad \text{б) } 4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5,$

в) $y' + \frac{2}{x}y = x^3, \quad y(1) = \frac{5}{6}.$

Знайти загальний розв'язок рівняння:

8. а) $y'' = \frac{3}{\sin^2 \frac{x}{2}}, \quad \text{б) } (1 - x^2) + xy' - 2 = 0, \quad \text{в) } 2yy'' = y^{12}$

Розв'язати задачу Коші.

9. $2(y'')^2 = y'(y-1), \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -1.$

Розв'язати рівняння.

10. а) $\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + 2s = 0, \quad \text{б) } 4y'' + y = 0,$

в) $y'' - 4y' + 13y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$

Знайти загальний розв'язок рівняння.

11. а) $y'' - 3y' + 2y = (x+1)\ell^{2x}$,

б) $y'' + y' + y = 3\cos 2x$, в) $y'' + 16y = \operatorname{tg} 4x$.

Варіант 12

Розв'язати рівняння.

1. $y' = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)(x^2 + 1)}$

2. $2\ell^x \operatorname{tg} y dx + (1 + \ell^x) \sec^2 y dy = 0$

3. $\sqrt{3 + y^2} + \sqrt{1 - x^2} yy' = 0$

4. $y^2 + x^2 y' = xy y'$

5. $\frac{dy}{dx} = 2xy - x^3 + x$

Розв'язати задачу Коші.

6. а) $y' + y \operatorname{tg} x = 0$, $y(0) = 0$

б) $y' - \frac{2}{x+1} y = \ell^x (x+1)^2$, $y(0) = 1$

Визначити тип диференціального рівняння і проінтегрувати його.

7. а) $(1 + y^2) dx - (\operatorname{arctg} y - x) dy = 0$,

б) $y \ell^{2x} dx - (1 + \ell^x) dy = 0$.

в) $(y^2 - 3x^2) dy + 2xy dx = 0$, $y(0) = 1$.

Знайти загальний розв'язок рівняння:

8. а) $y'' = \sin^2 x \cos x$, б) $(1 + \ell^x) y'' + y' = 0$, в) $y'' + y'^2 = 2\ell^{-y}$

Розв'язати задачу Коші.

9. $y'' y^3 = 1$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

Розв'язати рівняння.

10. а) $y'' + 9y = 0$, б) $4 \frac{d^2 \rho}{d\varphi^2} + \rho = 0$,

в) $y'' + 4y' + 13y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 11$.

Знайти загальний розв'язок рівняння.

11. а) $y'' - 7y' + 8y = 5x\ell^x$, б) $y'' + 64y = 4\cos 2x$,
 в) $y'' + 25y = \operatorname{tg}^2 5x$.

Варіант 13

Розв'язати рівняння.

1. $\operatorname{tg} x \sin^2 y dx + \cos^2 x dy = 0$

2. $y' = \frac{\ln x}{x}$

3. $(1 + \ell^x)yy' = \ell^x$

4. $(x^2 + y^2)y' = 2xy$

5. $y' + xy = \ell^{\frac{x^2}{2}}$

Розв'язати задачу Коші.

6. а) $y' + 2\sqrt{y} \ln x, \quad y(\ell) = 1$

б) $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} \ell^x, \quad y(1) = \ell$

Визначити тип диференціального рівняння і проінтегрувати його.

7. а) $(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 + y^2} + xy + y^2,$

б) $y\ell^{2x}dxy' - y\operatorname{ctg} x = \frac{y^3}{\sin x},$

в) $y' = 2y + \ell^x - x, \quad y(0) = \frac{1}{4}.$

Знайти загальний розв'язок рівняння:

8. а) $y'' = \frac{\operatorname{arctg} 2x}{1 + 4x^2},$ б) $y'' = 2(y' - 1)\operatorname{ctg} x,$ в) $yy'' + y'^2 = 0$

Розв'язати задачу Коші.

9. $2y' + (y'^2 - 6x)y'' = 0, \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 2.$

Розв'язати рівняння.

10. а) $y'' + 2y' + 5y = 0,$ б) $y'' - 6y' + 9y = 0,$

в) $y'' + 4y' + 13y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$

Знайти загальний розв'язок рівняння.

11. а) $y'' - 36y = x\ell^{2x}$, б) $y'' + 2y' + 4y = 3\sin x$,
 в) $y'' + 25y = \frac{1}{\cos 5x}$.

Варіант 14

Розв'язати рівняння.

1. $y' = \ell^x \sin 2x$
 2. $xy' + y = y^2$
 3. $x^2 y^2 y' = y^{x-1}$
 4. $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2)$
 5. $y' - 2\frac{y}{x} = \frac{\ell^{-x^2}}{x}$

Розв'язати задачу Коші.

6. а) $(1 + x^2)y' + y\sqrt{1 + x^2} = xy$, $y(0) = 1$
 б) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^2}$, $y(1) = 4$

Визначити тип диференціального рівняння і проінтегрувати його.

7. а) $\sqrt{3 + y^2} dx - y dy = x^2 y dy$, б) $y' + y = \cos x$,
 в) $(y^2 - 3x^2) dy + 2xy dx = 0$, $y(0) = 1$.

Знайти загальний розв'язок рівняння:

8. а) $y'' = \sin(2x - 3)$, б) $x^2 y'' = y'^2$, в) $y^4 - y^3 y' = 1$

Розв'язати задачу Коші.

9. $y^4 - y^2 y'' = y'$; $y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язати рівняння.

10. а) $y'' - 5y' + 6y = 0$, б) $y'' + 4y' = 0$,
 в) $y'' + 4y' + 13y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

Знайти загальний розв'язок рівняння.

11. а) $y'' - 4y' + 3y = 2x\ell^{5x}$, б) $y'' + 4y' = 2\sin 2x$,
 в) $y'' + y = \frac{1}{\sin^2 x}$.

Варіант 15

Розв'язати рівняння.

1. $y' = x \cos x$

2. $(x+1)dy + xydx = 0$

3. $x\sqrt{4+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$

4. $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$

5. $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$

Розв'язати задачу Коші.

6. а) $x dy - y dx = 0, \quad y(1) = 1$

б) $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = \frac{3}{2}$

Визначити тип диференціального рівняння і проінтегрувати його.

7. а) $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0, \quad \text{б) } xy' = 3\sqrt{x^2+y^2} + y$

в) $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x, \quad y(1) = e.$

Знайти загальний розв'язок рівняння:

8. а) $y'' = \frac{x}{x^2+1}, \quad \text{б) } x^4 y'' + 2x^3 y' = 1, \quad \text{в) } y'' + 2y(y')^3 = 0.$

Розв'язати задачу Коші.

9. $y^2 y'' = -1, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0.$

Розв'язати рівняння.

10. а) $y'' - 8y' + 15y = 0, \quad \text{б) } y'' + 3y' = 0,$

в) $y'' - 6y' + 13y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 11.$

Знайти загальний розв'язок рівняння.

11. а) $y'' + 4y' + 4y = x^2 \quad \text{б) } y'' + y' + 2y = 5 \sin 2x,$

в) $y'' + y = \frac{1}{\sin^2 x}.$

Варіант 16

Розв'язати рівняння.

1. $y' = \frac{x^7}{(1+x^4)^2}$

2. $xy' + y = y^2$

3. $x^2 \sqrt{3+y^2} dx + y \sqrt{2+x^2} dy = 0$

4. $(1+y^2)dx - xydy = 0$

5. $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$

Розв'язати задачу Коші.

6. а) $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1, \quad y(1) = 1$

б) $(1+y^2)dx = xydy, \quad y(1) = 0$

Визначити тип диференціального рівняння і проінтегрувати його.

7. а) $x(y' - x \cos x) = y, \quad \text{б) } (y^2 + xy^2)dx + (x^2 - yx^2)dy = 0,$

в) $y' \sin x = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

Знайти загальний розв'язок рівняння:

8. а) $y'' = \cos(1-2x), \quad \text{б) } y'' = -y' + 1, \quad \text{в) } (y' + 2y)y'' = y'^2$

Розв'язати задачу Коші.

9. $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}, \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 4.$

Розв'язати рівняння.

10. а) $y'' + 10y' + 25y = 0, \quad \text{б) } y'' + 16y = 0,$

в) $y'' + 2y' - 8y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -4.$

Знайти загальний розв'язок рівняння.

11. а) $y'' + 9y' + 8y = 5x e^x, \quad \text{б) } y'' + 64y = 4 \cos 2x,$

в) $y'' + 25y = \operatorname{ctg}^2 5x$.

Варіант 17

Розв'язати рівняння.

1. $y = \frac{1}{\ell^x + 1}$

2. $\ell^x(1 + y^2)dx - 2y(1 + \ell^x)dy = 0$

3. $x(\sqrt{5 + y^2})dx + y\sqrt{4 + x^2}dy = 0$

4. $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$

5. $xy' + y = \ln x + 1$

Розв'язати задачу Коші.

6. а) $(xy^2 + x)dy + (x^2y - y)dx = 0, \quad y(1) = 1$

б) $y' + 2xy = x\ell^{-x^2} \sin x, \quad y(0) = 1$

Визначити тип диференціального рівняння і проінтегрувати його.

7. а) $y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}, \quad \text{б) } y(1 + \ell^x)dy = \ell^x dx$

в) $(2\ell^y - x)dy = dx, \quad y(1) = 0.$

Знайти загальний розв'язок рівняння:

8. а) $y'' = \cos^2 2x, \quad \text{б) } x^2 y'' + xy' = 1, \quad \text{в) } yy'' + y'^2 = 1.$

Розв'язати задачу Коші.

9. $y''(1 + \ln x) + \frac{1}{x}y' = 2 + \ln x, \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad y'(1) = 1.$

Розв'язати рівняння.

10. а) $y'' + 4y' + 7y = 0, \quad \text{б) } y'' - 4y = 0,$

в) $y'' - 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 8, \quad y'(0) = 0.$

Знайти загальний розв'язок рівняння.

11. а) $y'' + 7y' + 8y = 5\ell^{-7x} \quad \text{б) } y'' + 4y = 12 \sin 4x,$

в) $y'' + 25y = \operatorname{tg}^2 5x.$

Варіант 18

Розв'язати рівняння.

1. $y = \frac{1}{\sqrt{x+x^2}}$

2. $y' = e^{-y} + 1$

3. $y(4 + e^x)dy - e^x dx = 0$

4. $x' = -\frac{2x}{t} + t^2$

5. $y' = \frac{x-y}{x-2y}$

Розв'язати задачу Коші.

6. а) $y'tgx = y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

б) $y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x, \quad y(0) = 1$

Визначити тип диференціального рівняння і проінтегрувати його.

7. а) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, \quad \text{б) } xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$

в) $(xy^2 + x)dy + (x^2y - y)dx = 0, \quad y(1) = 1.$

Знайти загальний розв'язок рівняння:

8. а) $y'' = \arctg x, \quad \text{б) } x^2y'' + xy' = 1, \quad \text{в) } yy'' + y'^2 = 1.$

Розв'язати задачу Коші.

9. $xy'' = y' - xy'^2, \quad y(2) = 2, \quad y'(2) = 1.$

Розв'язати рівняння.

10. а) $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad \text{б) } y'' - 4y' = 0,$

в) $y'' + y' - 6y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 0.$

Знайти загальний розв'язок рівняння.

11. а) $y'' + 64y = 2 \sin 3x \quad \text{б) } y'' - 3y' + 2y = e^{2x},$

$$\text{в)} \quad y'' + y' = \frac{\ell^x}{1 + \ell^x}.$$

Варіант 19

Розв'язати рівняння.

$$1. \quad y' = \frac{1}{(1 + x^2)^2}$$

$$2. \quad \ell^{-y} \left(1 + \frac{dy}{dt} \right) = 1$$

$$3. \quad \sqrt{5 + y^2} dx + 4(x^2 y + y) dy = 0$$

$$4. \quad y' = \frac{x + 2y}{-x}$$

$$5. \quad x' = 2t - x$$

Розв'язати задачу Коші.

$$6. \text{ а)} \quad y' \sin x = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\text{б)} \quad y' - y \cos x = -\sin 2x, \quad y(0) = 3$$

Визначити тип диференціального рівняння і проінтегрувати його.

$$7. \text{ а)} \quad y' + y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x, \quad \text{б)} \quad y(3 + \ell^x) dy = \ell^x dx,$$

$$\text{в)} \quad y' = \ell^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}, \quad y(1) = 0.$$

Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$8. \text{ а)} \quad y'' = \frac{1}{2 - 3x^2}, \quad \text{б)} \quad y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x, \quad \text{в)} \quad yy'' = 1 - y'^2.$$

Розв'язати задачу Коші.

$$9. \quad y'' = x^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 12.$$

Розв'язати рівняння.

$$10. \text{ а)} \quad y'' - y' = 0, \quad \text{б)} \quad y'' + y' = y,$$

$$\text{в)} \quad y'' = \frac{y}{a^2}, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = 0.$$

Знайти загальний розв'язок рівняння.

11. а) $y'' + 5y' + 6y = x\ell^x$ б) $y'' - 2y' + 5y = \cos x$,

в) $y'' + 4y = \operatorname{tg}^2 2x$.

Варіант 20

Розв'язати рівняння.

1. $y' = \frac{x}{1+x^2 + \sqrt{1+x^2}}$

2. $xy' - y = y^3$

3. $4xdy - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$

4. $\frac{dx}{2x^2 - 2xy + 2y^2} = \frac{dy}{y^2 - 4xy}$

5. $y'x + y = -xy^2$

Розв'язати задачу Коші.

6. а) $y' + y\operatorname{tg}x = \cos^2 x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$

б) $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$, $y(0) = 1$

Визначити тип диференціального рівняння і проінтегрувати його.

7. а) $y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}$, б) $\frac{2\ell^x}{1+\ell^x}dx + \frac{\sec^2 y}{\operatorname{tgy}}dy = 0$,

в) $y' - \frac{2x-5}{x^2}y = 5$

Знайти загальний розв'язок рівняння:

8. а) $y'' = x \cos^2 x$, б) $(x+1)y'' - (x+2)y' + x+2 = 0$,

в) $y'' - y'^2 + y'(y-1) = 0$.

Розв'язати задачу Коші.

9. $y'y'' + yy'' - y'^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Розв'язати рівняння.

10. а) $y'' + 5y' + 6y = 0$, б) $y'' + 9y = 0$,

в) $y'' + 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

Знайти загальний розв'язок рівняння.

11. а) $y'' + 5y' + 4y = (x + 7)e^{-4x}$ б) $y'' + y = \cos 5x$,

в) $y'' + 4y = \frac{1}{\cos^2 2x}$.

Варіант 21

Розв'язати рівняння.

1. $e^{2x} dx - e^y dy - \frac{1+y}{1+y^2} dy = 0$

2. $y' = \frac{1}{(x^2 + 1)^{3/2}}$

3. $6x dx - 6y dy = 2x^2 y dy - 3xy^2 dx$

4. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 5\frac{y}{x} + 3$

5. $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$

Розв'язати задачу Коші.

6. а) $\sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx$, $y(0) = \frac{\pi}{4}$

б) $y' - 3x^2 y = \frac{1}{3} x^2 (1 + x^3)$, $y(0) = 0$

Визначити тип диференціального рівняння і проінтегрувати його.

7. а) $y' - xy = -y^3 e^{-x^3}$, б) $(e^x dx - e^{2y} dy) - \frac{1+y^2}{1+y} dy = 0$

в) $(\sqrt{xy} - x) dy + y dx = 0$, $y(1) = 1$.

Знайти загальний розв'язок рівняння:

8. а) $y'' = \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, б) $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3$,

в) $yy'' - y'(1 + y') = 0$.

Розв'язати задачу Коші.

9. $y^2 + y'^2 - 2yy'' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Розв'язати рівняння.

10. а) $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, б) $y'' + 2y' + 5y = 0$,

в) $y'' - 4y' + 3y = 0, y(0) = 6, y'(0) = 10.$

Знайти загальний розв'язок рівняння.

11. а) $y'' + 9y' + 6y = 5x\ell^{-x},$ б) $y'' - y' = \ell^{2x} \cos x,$

в) $y'' + 16y = \operatorname{ctg} 4x.$

Варіант 22

Розв'язати рівняння.

1. $y' = \frac{x^5}{\sqrt{x^4 + 4}}$

2. $y - xy' = a(x^2 y' + 1)$

3. $6xdx - ydy = yx^2 dy - 2xy^2 dx$

4. $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$

5. $x^2 y' = y^2 + xy$

Розв'язати задачу Коші.

6. а) $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} \frac{dy}{dx} = 0, y(0) = 1$

б) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, y(1) = 1$

Визначити тип диференціального рівняння і проінтегрувати його.

7. а) $6xdx - 2ydy = 2yx^2 dy - 3xy^2 dx,$ б) $y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - 2xy}$

в) $y' + \frac{y}{x} = 3x, y(1) = 1.$

Знайти загальний розв'язок рівняння:

8. а) $y'' = x \cos x^2,$ б) $x^3 y'' + x^2 y' = 1,$ в) $3y'' y' = y + y'^3 + 1.$

Розв'язати задачу Коші.

9. $yy' + y'^2 + yy'' = 0, y(0) = 1, y'(0) = -1.$

Розв'язати рівняння.

10. а) $y'' + 2ay' + a^2 y = 0,$ б) $\frac{y' - y}{y''} = 3,$

в) $4y'' + 4y' + y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0.$

Знайти загальний розв'язок рівняння.

11. а) $5y'' - 6y' + 5y = 5\ell^{\frac{2}{3}x}$, б) $y'' + y = -8\cos 3x$,

в) $y'' - y' = \frac{\ell^x}{1 + \ell^x}$.

Варіант 23

Розв'язати рівняння.

1. $y' = \frac{2}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

2. $(y^2 + xy^2)dx + (x^2 - yx^2)dy = 0$

3. $2xdx - 2ydy = x^2ydy - 2xy^2dx$

4. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4$

5. $xy' + y = (\ln x + 1)xy^2$

Розв'язати задачу Коші.

6. а) $(1 + \ell^x)yy' = \ell^y$, $y(0) = 0$

б) $y' - y\cos x = \sin 2x$, $y(0) = -1$

Визначити тип диференціального рівняння і проінтегрувати його.

7. а) $xy' = y \ln \frac{y}{x}$, б) $(3 + \ell^x)yy' = \ell^x$,

в) $y' + 3\frac{y}{x} = \frac{2}{x^3}$, $y(1) = 1$.

Знайти загальний розв'язок рівняння:

8. а) $y'' = x \sin 2x$, б) $y'' - y'^2 - y = 0$, в) $y'(1 + y'^2) = ay''$.

Розв'язати задачу Коші.

9. $y'' = y'$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

Розв'язати рівняння.

10. а) $\frac{d^2s}{dt^2} + a\frac{ds}{dt} = 0$, б) $3y'' - 2y' - 8y = 0$,

в) $y'' + 4y' + 29y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 15$.

Знайти загальний розв'язок рівняння.

11. а) $y'' - 2y' = \ell^x (x^2 + x - 3)$, б) $5y'' - 6y' + 5y = \sin \frac{4}{5} x$,
 в) $y'' + 9y = \operatorname{ctg}^2 3x$.

Варіант 24

Розв'язати рівняння.

1. $y' = \frac{\ell^{x-1}}{\ell^{x+1}}$

2. $x dx - y dy = x^2 y dy - x y^2 dx$

3. $6x dx - y dy = y x^2 dy - 3x y^2 dx$

4. $y' = \frac{y^2 + xy - y^2}{x^2 - xy}$

5. $y' - xy \frac{1}{2(x^2 - 1)} - \frac{x}{2y} = 0$

Розв'язати задачу Коші.

6. а) $xy' + y = y^2$, $y(1) = 0,5$

б) $2xyy' + x^2 - y^2 = 0$, $y(0) = 0$

Визначити тип диференціального рівняння і проінтегрувати його.

7. а) $xy' = \frac{3y^3 + 10x^2 y}{2y^2 + 5x^2}$, б) $y' = y \operatorname{ctg} x + \frac{y^3}{\sin x}$,

в) $y - xy' = b(1 + x^2 y')$, $y(1) = 1$.

Знайти загальний розв'язок рівняння:

8. а) $y'' = \frac{x^3}{x+1}$, б) $y'' x \ln x = y'$, в) $y^2 + y'^2 - 2yy'' = 0$

Розв'язати задачу Коші.

9. $y'' = \cos y + y'^2 \sin y - y' = 0$, $y(-1) = \frac{\pi}{6}$, $y'(-1) = 2$.

Розв'язати рівняння.

10. а) $4 \frac{d^2 x}{dt^2} - 20 \frac{dx}{dt} + 25x = 0$, б) $4y'' - 8y' + 5y = 0$,

$$\text{в)} y'' + 2y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Знайти загальний розв'язок рівняння.

$$11. \text{ а)} 5y'' - 6y' + 5y = \ell^{\frac{3}{5}x} \cos x, \quad \text{б)} y'' + y = 2x^2 - x + 2,$$

$$\text{в)} y'' - 2y' + y = \frac{\ell^x}{x^2 + 1}.$$

Варіант 25

Розв'язати рівняння.

$$1. y' = \cos^2 x$$

$$2. y' \sqrt{1 - x^2} = 1 + y^2$$

$$3. x(1 + y^2) + yy' \sqrt{1 + x^2} = 0$$

$$4. (x + 2y)dx - xdy = 0$$

$$5. xy' - 2y = 2x^4$$

Розв'язати задачу Коші.

$$6. \text{ а)} (1 + \ell^x)yy' = \ell^x, \quad y(0) = 1$$

$$\text{б)} (9 - x^2)y' - xy = 9, \quad x(3) = 3$$

Визначити тип диференціального рівняння і проінтегрувати його.

$$7. \text{ а)} \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}, \quad \text{б)} y \sin x dx + \cos x dy = 0,$$

$$\text{в)} y' - \frac{y}{x+2} = x^3 + 2x, \quad y(-1) = \frac{3}{2}.$$

Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$8. \text{ а)} y'' = \frac{1}{1 + x^2}, \quad \text{б)} xy'' = y', \quad \text{в)} y'' = \ell^y$$

Розв'язати задачу Коші.

$$9. y'' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\ln 2}{2}, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Розв'язати рівняння.

$$10. \text{ а)} x'' - 2x' = 0, \quad \text{б)} x'' - 5x' + 6x = 0$$

$$\text{в)} x'' - 2x' + 5x = 0, \quad x(0) = x'(0) = 1$$

Знайти загальний розв'язок рівняння.

11. а) $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$, б) $y'' - 3y' + 2y = \sin x$,
 в) $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$.

Варіант 26

Розв'язати рівняння.

1. $y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$

2. $y' = e^{x+y}$

3. $x\sqrt{3+y^2}dx = -y\sqrt{1+x^2}dy = 0$

4. $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$

5. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$

Розв'язати задачу Коші.

6. а) $(xy^2 + x)dx + (xy^2 - y)dy = 0$, $y(0) = 1$

б) $x' - x \operatorname{tg} t = \frac{1}{\cos t}$, $x(0) = 0$

Визначити тип диференціального рівняння і проінтегрувати його.

7. а) $2xy' + y^2 = 1$, б) $y' = \frac{x+y}{x-y}$,

в) $y' + \frac{y}{x} = x^2$, $y(1) = 0$.

Знайти загальний розв'язок рівняння:

8. а) $y'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, б) $y'' = y' + x$, в) $(y'')^2 = y'$

Розв'язати задачу Коші.

9. $y''(x^2 + 1) = 2xy'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

Розв'язати рівняння.

10. а) $3x'' - 2x' - 8x = 0$, б) $x'' - 4x' + 13x = 0$,

в) $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = -2.$

Знайти загальний розв'язок рівняння.

11. а) $y'' - 5y' + 6y = 2x\ell^{3x},$ б) $y'' + y = 3\sin 7x,$

в) $y'' + y = \operatorname{tg} x.$

Варіант 27

Розв'язати рівняння.

1. $y' = \sin^3 x$

2. $y' = \frac{x \sin x}{y \cos y}$

3. $(\ell^{2x} + 5)dy + y\ell^{2x}dx = 0$

4. $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$

5. $\frac{dy}{dx} = x^3 - 2\frac{y}{x}$

Розв'язати задачу Коші.

6. а) $y' \operatorname{ctg} x + y = 2, \quad y(0) = -1$

б) $x' = x \sin t + 2 \sin 2t, \quad x(0) = 1$

Визначити тип диференціального рівняння і проінтегрувати його.

7. а) $y - y' = y^2 + xy'$ б) $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$

в) $y' - \frac{y}{x+1} = (x+1)\ell^x, \quad y(0) = 1.$

Знайти загальний розв'язок рівняння:

8. а) $y'' = \frac{1}{x},$ б) $y'' = \frac{y'}{x} + x,$ в) $(1 + y'^2) = 2yy''.$

Розв'язати задачу Коші.

9. $y'' + \frac{y'}{x} = \frac{x^2}{y'}, \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 4.$

Розв'язати рівняння.

10. а) $y'' - 2y' - 2y = 0,$ б) $y'' + 6y' + 13y = 0,$

в) $x'' + 6x' + 9x = 0, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 1.$

Знайти загальний розв'язок рівняння.

11. а) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x - 2)$ б) $y'' + 2y' + 5y = 3\sin 2x$,
в) $y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x$.

Варіант 28

Розв'язати рівняння.

1. $y' = \frac{1}{1 + \sqrt{x}}$
2. $(1 + y^2)x dx + (1 + x^2)dy = 0$
3. $y'(1 + e^x)dy = e^x dx$
4. $xy' = y - x \ln \frac{y}{x}$
5. $y' + y \operatorname{tg} x = \sec x$

Розв'язати задачу Коші.

6. а) $(1 - x)dy - ydx = 0, \quad y(0) = 1$

б) $y' - \frac{y}{x} = x^3, \quad x(0) = 0$

Визначити тип диференціального рівняння і проінтегрувати його.

7. а) $y + y' = xy^3$, б) $(e^x + 2)dy = ye^x dx$.

в) $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0, \quad y(0) = 1$.

Знайти загальний розв'язок рівняння:

8. а) $y'' = \frac{1}{(1 - x)^2}$, б) $(1 + x^2)y' + (y')^2 + 1 = 0$,

в) $(y')^2 + 2yy' = 0$

Розв'язати задачу Коші.

9. $2y'' = 3y^2 \quad y(-2) = 1, \quad y'(-2) = -1$.

Розв'язати рівняння.

10. а) $4y'' - 6y' + 5y = 0$, б) $y'' - 6y' + 25y = 0$,
в) $y'' - 5y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$.

Знайти загальний розв'язок рівняння.

11. а) $y'' - y' + y = e^{2x}(x+3)$, б) $y'' + 4y = 2 \sin x$,
в) $y'' + y = \operatorname{ctg} x$.

Варіант 29

Розв'язати рівняння.

1. $y' = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$
2. $(1+y^2)x dx + (1+x^2)y dy = 0$
3. $y' \sqrt{4-x^2} + xy^2 + x = 0$
4. $(y + \sqrt{xy}) dx = x dy$
5. $x^2 y' + xy + 1 = 0$

Розв'язати задачу Коші.

6. а) $dx - \sqrt{1-x^2} dy = 0, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}$.
б) $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad y(0) = 0$

Визначити тип диференціального рівняння і проінтегрувати його.

7. а) $x\sqrt{1+y^2} dx + y\sqrt{1+x^2} dy = 0$, б) $xy' = 3\sqrt{x^2+y^2} + y$,
в) $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x, \quad y(1) = e$.

Знайти загальний розв'язок рівняння:

8. а) $y'' = x + \cos x$, б) $(y'')^2 = y'$, в) $yy'' + (y')^2 = 1$

Розв'язати задачу Коші.

9. $y'' = \frac{1}{x} y', \quad y(2) = 6, \quad y'(2) = 1$.

Розв'язати рівняння.

10. а) $y'' - 7y' + 10y = 0$, б) $y'' - 6y' + 25y = 0$,

$$в) y'' - 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

Знайти загальний розв'язок рівняння.

$$11. а) y'' - 6y' + 8y = (x + 3)e^x, \quad б) y'' + y' + y = 2 \cos 3x,$$

$$в) y'' + y = \frac{1}{\sin 2x}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовик, В. П., І. І. Юрик. Вища математика. У трьох частинах. Частини 1, 2, 3 : Навчальний посібник. Харків : Веста, 2008.
2. В.С. Герасимчук, Г.С. Васильченко, В.І. Кравцов Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах.. Книги 1, 2, 3. К.: Книги України ЛТД, 2009.
3. Г.Й. Призва, В.В. Плахотник, Л.Д. Гординський та ін. Вища математика: : Підручник. У 2-х книгах Кн.1 ,2. К. : Либідь, 2003.
4. Бубняк Т.І. Вища математика : Навчальний посібник К. : Новий світ-2000, 2004.
5. Овчинников, П. П., В. М. Михайленко Вища математика: У двох частинах. Частина 2 : Підручник К. : Техніка, 2004.
6. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа.— М.: Наука, 1994. — 443 с.