

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
“УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ХІМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ”

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА МАТЕМАТИКА»
ЗА РОЗДІЛОМ: «ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ. ГРАНИЦІ
ФУНКЦІЇ» ДЛЯ СТУДЕНТІВ ВСІХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ
ДЕННОЇ ТА ЗАОЧНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики.
Протокол № 3 від 17.10.16

Дніпро ДВНЗ УДХТУ 2017

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Вища математика» за розділом: «Вступ до математичного аналізу. Границі функції» для студентів всіх спеціальностей денної та заочної форми навчання / Укл.: Насонова С.С., Купріна Л.О., Гранкіна Т.О. – Дніпро: ДВНЗ УДХТУ, 2017. – 24 с.

Укладачі: С.С. Насонова, канд. техн. наук,
Л.О. Купріна, ст. викладач,
Т.О. Гранкіна, ст. викладач

Відповідальний за випуск: В.І. Олевський, д-р. техн. наук

Навчальне видання

Методичні вказівки
до практичних занять з дисципліни «Вища математика»
за розділом: «Вступ до математичного аналізу. Границі
функції» для студентів всіх спеціальностей
денної та заочної форми навчання

Укладачі: НАСОНОВА Світлана Сергіївна
КУПРІНА Лариса Олександрівна
ГРАНКІНА Тетяна Олександрівна

Технічний редактор Т.М. Кіжло
Комп'ютерна верстка Т.М. Кіжло

Підписано до друку 11.05.17. Формат 60×84/16. Папір ксерокс. Друк різнограф.
Умов. друк. арк. 1,09. Обл.-вид. арк. 1,14. Тираж 100 прим. Зам. № 553.
Свідоцтво ДК № 5026 від 16.12.2015

ДВНЗ УДХТУ, просп. Гагаріна, 8, м. Дніпро, 49005

Редакційно-видавничий відділ

ЗМІСТ

1. Границя послідовності.....	3
2. Границя функції.....	5
3. Порівняння нескінченно малих функцій.....	10
4. Теоретичні питання за темою: «Границі функції».....	12
5. Практичні завдання для індивідуального виконання за темою: «Границі функції».....	13
6. Тестові завдання для підготовки до експрес-контролю за темою: «Границі функції».....	21
Відповіді до тестових завдань.....	23
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	24

1. Границя послідовності

Якщо кожному натуральному числу n поставлено у відповідність число x_n , то говорять, що задано *послідовність*

$$x_1, x_2, \dots, x_n = \{x_n\}.$$

Загальний елемент послідовності є функцією від n , тобто $x_n = f(n)$.

У такий спосіб послідовність може розглядатися як функція порядкового номера елемента.

Задати послідовність можна різними способами – головне, щоб був зазначений спосіб одержання будь-якого члена послідовності.

Приклад. $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ або $\{x_n\} = -1; 1; -1; 1; \dots$

Для послідовностей можна визначити наступні операції:

Множення послідовності на число m : $m\{x_n\} = \{mx_n\}$.

1) Додавання (віднімання) послідовностей: $\{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_n \pm y_n\}$.

2) Добуток послідовностей: $\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\}$.

3) Частка послідовностей: $\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ при $\{y_n\} \neq 0$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається *обмеженою*, якщо існує таке число $M > 0$, що для будь-якого n вірна нерівність:

$$|x_n| < M,$$

тобто всі члени послідовності належать проміжку $(-M; M)$.

Якщо $x_{n+1} > x_n$ для всіх n , то послідовність називається *зростаючою*. Якщо $x_{n+1} \geq x_n$ для всіх n , то послідовність *не зростаюча*. Якщо $x_{n+1} < x_n$ для всіх n , то послідовність називають *убуваючою*. Якщо ж $x_{n+1} \leq x_n$ для всіх n , то послідовність називається *не зростаючою*. Усі ці послідовності називаються *монотонними*.

Наприклад, $\{x_n\} = 1/n$ – убуюча послідовність, тобто вона монотонна; $\{x_n\} = n$ – зростаюча послідовність, а значить є монотонною.

Теорема. Монотонна обмежена послідовність має границю.

Приклад. Розглянемо послідовність: $3, 2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, \dots, 2 + \frac{1}{n}, \dots$

Ця послідовність є монотонною та обмеженою, тобто вона має границю.

Число a називається *границею послідовності* $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε існує номер N такий, що $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$.

У такому випадку пишуть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Приклад. Показати, що при $n \rightarrow \infty$ послідовність $\{x_n\} = 2 + \frac{1}{n}$ має границею число 2.

Розв'язок. n -й член послідовності $x_n = 2 + \frac{1}{n}$. Отже $x_n - 2 = \frac{1}{n}$. Задамо додатне число ε . Виберемо n настільки великим, що буде виконана нерівність $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Для цього достатньо прийняти $n > \frac{1}{\varepsilon}$. При такому виборі n отримуємо $|x_n - 2| < \varepsilon$. Значить, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

2. Границя функції

Число A називається *границею функції* $f(x)$ при $x \rightarrow a$, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ можна знайти таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x - a| < \delta$.

Якщо число A границя функції $f(x)$ при $x \rightarrow a$, то:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

Аналогічно $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, якщо $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > N$.

Записують $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, якщо $|f(x)| > M$ при $|x - a| < \delta$, де M – довільне число.

У такому разі функція $f(x)$ називається *нескінченно великою* при $x \rightarrow a$.

Якщо $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$, то функція $\alpha(x)$ називається *нескінченно малою* при $x \rightarrow a$.

Якщо $x < a$ та $x \rightarrow a$, то пишуть так: $x \rightarrow a - 0$; якщо $x > a$ та $x \rightarrow a$, то записують: $x \rightarrow a + 0$. Числа $f(a - 0) = \lim_{x \rightarrow a - 0} f(x)$ та $f(a + 0) = \lim_{x \rightarrow a + 0} f(x)$ називаються *однобічними границями* функції $f(x)$ у точці a (рис.1).

Для існування границі функції $f(x)$ при $x \rightarrow a$ необхідно і достатньо, щоб $f(a - 0) = f(a + 0)$.

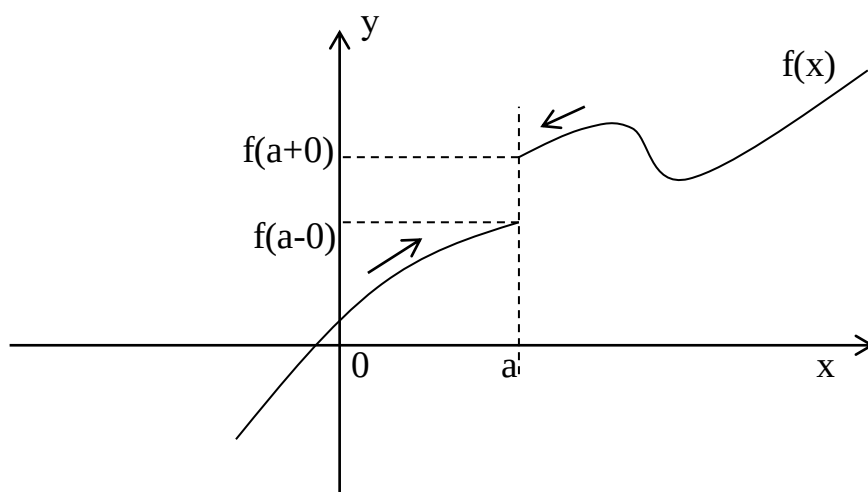


Рис. 1. Однобічні границі функції $f(x)$ у точці a

Для обчислення границь функції застосовуються наступні теореми. Якщо існують $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ та $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, то

1. $\lim_{x \rightarrow a} C = C$, де $C = const$;
2. $\lim_{x \rightarrow a} Cf(x) = C \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, де $C = const$;
3. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
5. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$

Використовуються також наступні границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (перша визначна границя);
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e = 2,718281\dots$ (друга визначна границя);
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, \text{ якщо } n = m \\ 0, \text{ якщо } n < m \\ \infty, \text{ якщо } n > m \end{cases}$

Тут $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, $Q_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m$ – багаточлени.

Крім цього, можна записати наступні корисні на практиці співвідношення:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} kx}{kx} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin kx}{kx} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} kx}{kx} = 1, \quad \text{де } k = const;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m.$$

Приклад 1. Знайти $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^3 - 1000}{x^3 - 20x^2 + 100x}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+5}{2x+7} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(3+\frac{5}{x})}{x(2+\frac{7}{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{5}{x}}{2+\frac{7}{x}} = \frac{3}{2},$$

оскільки при $x \rightarrow \infty$ $\frac{5}{x} \rightarrow 0$ та $\frac{7}{x} \rightarrow 0$.

Приклад 2. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3})}{x^3(4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{4}.$$

Приклад 3. Знайти $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x} = 2.$$

Приклад 4. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-1) - (x-1)}{x^2(x+1) - (x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2-1)}{(x+1)(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = 0.$$

Приклад 5. Знайти $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^3 - 1000}{x^3 - 20x^2 + 100x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^3 - 1000}{x^3 - 20x^2 + 100x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{(x-10)(x^2+10x+100)}{x(x-10)^2} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^2+10x+100}{x(x-10)} = \infty$$

Приклад 6. Знайти $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x+3} = \frac{1}{6}.$$

У даному прикладі була використана формула: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1, x_2 – корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Приклад 7. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$.

Помножимо чисельник і знаменник дробу на суму $\sqrt{x+4} + 2$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

У даному прикладі була використана формула: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Приклад 8. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(1+x)^3} - 1}{x}$.

Нехай $1+x = y^5$. Тоді

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(1+x)^3} - 1}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^3 - 1}{y^5 - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 + y + 1}{y^4 + y^3 + y^2 + y + 1} = \frac{3}{5}$$

Приклад 9. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3})$.

Помножимо і розділимо цей вираз на $\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3}) &= [\infty - \infty] = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3})(\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3})}{\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3}} &= \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 8x + 3 - x^2 - 4x - 3}{\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3}} = \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}} &= \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

Приклад 10. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{x}$.

Використовуючи першу визначну границю, маємо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m \cdot \sin mx}{mx} = m \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{mx} = m$$

Приклад 11. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{5x}{2}}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{5x}{2}}{x} \right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{5}{2} \right)^2 = \frac{25}{2}$$

У даному прикладі була використана формула: $1 - \cos kx = 2 \sin^2 \frac{kx}{2}$.

Приклад 12. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7} \right)^x$.

Діленням чисельника дробу на знаменник виділимо цілу частину:

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7} = 1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7}.$$

Таким чином,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7} \right)^x = \left[1^\infty \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7} \right)^{\frac{x^2 - 3x + 7}{8x - 3}} \right]^{\frac{x(8x - 3)}{x^2 - 3x + 7}}$$

Оскільки $\frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7} \right)^{\frac{x^2 - 3x + 7}{8x - 3}} = e.$$

Беручи до уваги, що $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(8x - 3)}{x^2 - 3x + 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(8 - \frac{3}{x})}{x^2(1 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 - \frac{3}{x}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}} = 8$,

отримуємо такий результат:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7} \right)^x = e^8$$

Приклад 13. Знайти однобічні границі функції $f(x) = \frac{1}{x + 2^{1/(x-3)}}$ при $x \rightarrow 3$.

Якщо $x \rightarrow 3 - 0$, то $\frac{1}{x - 3} \rightarrow -\infty$, а $2^{\frac{1}{x-3}} \rightarrow 0$. Таким чином, $\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \frac{1}{3}$.

Якщо $x \rightarrow 3 + 0$, то $\frac{1}{x - 3} \rightarrow +\infty$, а $2^{\frac{1}{x-3}} \rightarrow +\infty$. Тоді $\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = 0$.

Приклад 14. Знайти однобічні границі функції $f(x) = e^{1/(x-a)}$ при $x \rightarrow a$.

Якщо $x \rightarrow a-0$, то $\frac{1}{x-a} \rightarrow -\infty$. Таким чином, $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = 0$. Якщо $x \rightarrow a+0$, то $\frac{1}{x-a} \rightarrow +\infty$. Тоді $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$.

3. Порівняння нескінченно малих функцій

Нехай $\alpha(x)$, $\beta(x)$ і $\gamma(x)$ – нескінченно малі функції при $x \rightarrow a$. Будемо позначати ці функції α , β і γ відповідно. Ці нескінченно малі функції можна порівнювати за швидкістю їхнього спадання, тобто за швидкістю їхнього наближення до нуля.

1. Якщо $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, то функція α називається *нескінченно малою більш високого порядку*, ніж функція β . У такому разі пишуть: $\alpha = o(\beta)$.

2. Якщо $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = A$, $A \neq 0$, $A = \text{const}$, то α і β називаються *нескінченно малими одного порядку*. Зокрема, якщо $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = 1$, то функції α і β називаються *еквівалентними нескінченно малими*. Записують $\alpha \sim \beta$.

3. Якщо $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow \infty$, то це означає, що $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta}{\alpha} = 0$. Таким чином, функція β називається *нескінченно малою більш високого порядку*, ніж функція α . У такому разі пишуть: $\beta = o(\alpha)$.

4. Нескінченно мала функція α називається *нескінченно малою порядку k* відносно нескінченно малої функції β , якщо границя $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta^k}$ кінцева й відмінна від нуля.

Відмітимо деякі *властивості* еквівалентних нескінченно малих функцій.

1. $\alpha \sim \alpha$, оскільки $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\alpha} = 1$.

2. Якщо $\alpha \sim \beta$ і $\beta \sim \gamma$, то $\alpha \sim \gamma$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\gamma} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\gamma} \right) = 1 \cdot 1 = 1$.

3. Якщо $\alpha \sim \beta$, то $\beta \sim \alpha$,
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{1}{1} = 1.$$

4. Якщо $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$ та $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = k$, то й $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta_1} = k$ і $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta_1}$.

Корисно мати на увазі еквівалентність наступних нескінченно малих величин: якщо $x \rightarrow 0$, то

$$\sin x \sim x, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x.$$

Приклад 1. Нехай x – нескінченно мала величина. Порівняти нескінченно малі величини $\alpha = 5x^2 + 2x^5$ та $\beta = 3x^2 + 2x^3$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 2x^5}{3x^2 + 2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 + 2x^3}{3 + 2x} = \frac{5}{3}.$$

Оскільки $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{5}{3} \neq 0$, то α та β – нескінченно малі одного порядку.

Приклад 2. Порівняти нескінченно малі величини $\alpha = x \sin^2 x$ та $\beta = 2x \sin x$ при $x \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin^2 x}{2x \sin x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0.$$

Тобто $\alpha = o(\beta)$.

Приклад 3. Порівняти нескінченно малі величини $\alpha = x \ln(1+x)$ та $\beta = x \sin x$ при $x \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = 1.$$

Таким чином, $\alpha \sim \beta$.

Приклад 4. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x \sin x)}{\operatorname{tg} x^2}$.

Замінімо чисельник і знаменник дробу еквівалентними нескінченно малими: $\ln(1+3x \sin x) \sim 3x \sin x$, $\operatorname{tg} x^2 \sim x^2$. Тоді отримаємо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x \sin x)}{\operatorname{tg} x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \sin x}{x^2} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 3$$

Приклад 5. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos x}$.

Тому що $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \sim 2 \left(\frac{x}{2}\right)^2$ при $x \rightarrow 0$, то $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$.

Приклад 6. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{\operatorname{tg} 3x}$.

Замінімо знаменник дробу еквівалентною нескінченно малою: $\operatorname{tg} 3x \sim 3x$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{\operatorname{tg} 3x} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+2x}-1)(\sqrt{1+2x}+1)}{3x(\sqrt{1+2x}+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2x-1}{3x(\sqrt{1+2x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3(\sqrt{1+2x}+1)} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+2x}+1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

4. Теоретичні питання за темою: «Границі функцій»

1. Означення границі функції.
2. Нескінченно малі функції. Означення. Теореми про нескінченно малі функції.
3. Границя алгебраїчної суми двох функцій.
4. Границя добутку двох функцій.
5. Границя частки двох функцій.
6. Перша визначна границя.
7. Наслідки з першої визначної границі.
8. Друга визначна границі та наслідки з неї. Приклади.
9. Класифікація нескінченно малих функцій.
10. Таблиця еквівалентності нескінченно малих функцій.

**5. Практичні завдання для індивідуального виконання
за темою: «Границі функцій»**

Обчислити границі:

№ варіанту	Завдання	
1	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x^2 + 1}{3x^4 - 5x + 2}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{2n - 3}$ $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 4x^2 + 3x}$ $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sin(4 - x)}{\sqrt{x} - 2}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^3 - (1 + 3x)}{x^2 + x^3}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 2x} \right)$ $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 4}{3x + 5} \right)^{x+3}$
2	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^5 - 4n + 7n}{n^6 - 3n^3 - 1}$ $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9 + 2x} - 5}{\sqrt[3]{x^2} - 4}$ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 7x + 5}{4x^3 + 85x - 3}$ $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2 - x} - \frac{12}{8 - x^3} \right)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} x [\ln(x + 1) - \ln x]$ $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 2x \cdot \operatorname{ctg} x)$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x} - 1}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{x^2}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 2}{x - 1} \right)^{2x}$
3	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^6 - 3n^2 + 7n}{2n^6 - 3n^5 - 1}$ $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 3x^2 - 4}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x - x^2}{x^3 + 4}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 4x} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt[3]{x^2} - 16}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \sqrt{3x^2 + 2} \right)$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \arcsin x}{4x}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 4}{3x + 2} \right)^{\frac{x+1}{2}}$

4	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^7 - 4n^3 + 7n}{n^6 - 3n^3 - 1}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{2x-1} - \frac{x^2}{4x^2-1} \right)$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + x^2 - 3x^3}{1 - 3x + 6x^3}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 4x + 8} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}$ $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin 2x \cdot \operatorname{tg} x$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+3) - \ln 3}{2x}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{3+x} \right)^x$
5	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 3} + n}{2n - 3}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+1)!}{(n-1)! + (n+1)!}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 - 6x + 7}{5x^2 + 9}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 2x + 3} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ $\lim_{x \rightarrow 2} (2-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 4^x}{4^{x+2} - 3}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x(1 - \cos x)}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+4} \right)^x$
6	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 - 5n + 6n}{2n^4 - 5n^3 - 1}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+2)!}{(n+1)! + (n+2)!}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - 3x + 5x^2 + x^3}{7 - 2x + 2x^3}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x+3} - \sqrt{x})$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - 1}{x \operatorname{tg} 2x}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} \right)^x$
7	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^4 - 3n + 6n}{2n^4 + 7n^3 - 2}$ $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{\sqrt{2x-1} - 3}$ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^3 - 3x^2 + 4}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + x + 5x^4}{x^4 - 12x + 1}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 + 9}}$ $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\pi/2 - x) \operatorname{tg} x$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} (x+4) \cdot (\ln(2x+7) - \ln(2x-3))$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e}{e^{x-3} - 1}$

8	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^4 - 5n + 6n}{2n^3 - 5n^2 - 1}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+1)!}{(n+2)!}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^6 - 2x^2 + 11}{5x^7 + 3x^4 + 2}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x + 1}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ $\lim_{x \rightarrow 3} (3 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 3) [\ln(x + 2) - \ln x]$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{\cos x - 1}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 3x + 5} \right)^{x+4}$
9	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^4 - 6} + n}{5n + 4}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{2x}}$ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 3x^2 + 4}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3})$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}}{x^2 - x}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\operatorname{ctg} \pi x}$ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+10} - 4}{x - 2}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 5x}{2x + \sin 3x}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 5}{2x + 1} \right)^{4x-3}$
10	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - 5n + 7n}{3n^4 - 6n^2 - 8}$ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}$ $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 3x^2 - 4}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^5 - 11x^2 + 9}{5x - 3x^5}$ $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x} - 1}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{1 - \cos x}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{4x^2+3}$
11	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 - 4n + 7n}{3n^3 + 8n^2 - 3}$ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{7+2x-x^2}}{x^2 - 2x}$ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 8x - 3}{x^2 - x - 6}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 5}{\sqrt{4x^2 + 3x} - 6}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 5^{x+2}}{4 + 5^x}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin 3x}$ $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2)^{\frac{x}{x-1}}$ $\lim_{x \rightarrow 0} 5x \cdot \operatorname{arcctg} 6x$

12	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 - 6n^2 + 7n}{3n^2 + 6n + 2}$ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4+x+x^2} - 2}{x+1}$ $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 9x - 18}{x^2 - 7x + 6}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2}{5n^2 + 1}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4x^2 + 7x} - \sqrt{4x^2 - 9x - 11} \right)$	$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{3x+17} - \sqrt{2x+12}}{x^2 + 8x + 15}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\arctg 2x}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} (x-2)[\ln(x-1) - \ln(x+1)]$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 8x}$ $\lim_{x \rightarrow 2} (2x-3)^{\frac{x^2}{x-2}}$
13	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{n^5 - n^2} + n}{6n - 2}$ $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{x^2 - 6x + 5}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 - 7x + 3}{2x^2 + x - 7}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2}{1 - \sqrt[3]{x}} \right)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 3}{2^x - 3}$ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \tg 3x$ $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tg 3x}{\cos x - \cos^3 x}$ $\lim_{x \rightarrow 3} (3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$
14	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 2n + 5n}{2n^4 - 4n^3 - 6}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9} - 3}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 + 3x - 3}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^6 - x^3 + 2x}{2x^6 - 1}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{2-2x} - \frac{2}{1-x^2} \right)$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + 3}{2^x - 3}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 8x \cdot \ctg 3x$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg x - \sin x}{\sin^3 x}$ $\lim_{x \rightarrow 1} (3-2x)^{\frac{x}{1-x}}$
15	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^4 + 2n - 5n}{3n^4 + 6n^3 - 1}$ $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^3 + 2x^2 - 21x + 18}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x}$ $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{4}{4-x^2} \right)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^x}{1 - e^x}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 4x \cdot \ctg x$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$ $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$

16	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^4 - n + 5}{n^3 + 3n^2 - 6}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{2x}}$ $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + 2x - 35}{x^2 - 6x + 5}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + x + 5x^4}{x^4 - 12x + 1}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin 2x \cdot \operatorname{tg} x$ $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{2x+1} - 3}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \arcsin x}{4x}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x+5} \right)^{x+3}$
17	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[6]{n^6 - n^4} + 2n}{n + 6}$ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}$ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 3x^2 + 4}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^6 - 2x^2 + 11}{5x^7 + 3x^4 + 2}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{4x}$ $\lim_{x \rightarrow 2} (2-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+3) - \ln 3}{2x}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^{2x}$
18	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^4 + n^2 - 5n}{n^5 - 3n^3 - 4}$ $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x-2}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} \right)$ $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 3x^2 - 4}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x + 1}$	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{2x+1} - 3}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x+3} - \sqrt{x})$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 5^x}{5^{x+3} - 2}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{2}}$
19	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6 + 5n^3 - 5n}{6n^6 + 9n^3 - 5}$ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4+x+x^2} - 2}{x+1}$ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9x + 14}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^5 - 11x^2 + 9}{5x - 3x^5}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$ $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\pi/2 - x) \operatorname{tg} x$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{1 - \cos x}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{3+x} \right)^x$

20	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^5 - n^3 + 5n}{n^3 + 7n^2 - 6n}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$ $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 9x - 18}{x^2 - 7x + 6}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 5}{\sqrt{4x^2 + 3x} - 6}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4x^2 + 7x} - \sqrt{4x^2 - 9x - 11} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}}{x^2 - x}$ $\lim_{x \rightarrow 3} (3-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - 1}{x \operatorname{tg} 2x}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+4} \right)^x$
21	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[7]{n^7 - n^3} + 2n}{6n - 2}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9} - 3}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2}{5n^2 + 1}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\operatorname{ctg} \pi x}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x+3)[\ln(x+2) - \ln x]$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x(1 - \cos x)}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} \right)^x$
22	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + n^2 - 5n}{n^4 - 3n^3 - 4}$ $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 + 3x - 3}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 - 7x + 3}{2x^2 + x - 7}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4x^2 + 7x} - \sqrt{4x^2 - 9x - 11} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x} - 1}$ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+10} - 4}{x - 2}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{\cos x - 1}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-3} \right)^{3x-2}$
23	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 - 7n^3 - 5n}{5n^5 - 8n^4 - 3}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+15} - 4}$ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x - x^2}{x^3 + 4}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 4x + 8})$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x+3} - \sqrt{x})$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{\cos x - 1}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{4x^2 + 3}$

24	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11n^4 - 4n^3 + 6n}{2n^3 + 5n^2 - 3}$ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+22} - 5}{x-3}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{\sqrt{x^2+16} - 4}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + x^2 - 3x^3}{1 - 3x + 6x^3}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 2x + 3})$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$ $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\pi/2 - x) \operatorname{tg} x$ $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 3) [\ln(x+2) - \ln x]$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 5x}{2x + \sin 3x}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^{2x}$
25	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[9]{n^9 - n^5} + 5n}{5n - 9}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 9x - 10}{x^2 - 3x + 2}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 - 6x + 7}{5x^2 + 9}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{x^2 - x + 1})$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 + 9}}$ $\lim_{x \rightarrow 3} (3-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}$ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+10} - 4}{x-2}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{1 - \cos x}$ $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2)^{\frac{x}{x-1}}$
26	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 4n^2 + 3}{n^4 + 5n^3 + 3}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{2x^2 - 5x + 3}$ $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - 3x + 5x^2 + x^3}{7 - 2x + 2x^3}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\operatorname{ctg} \pi x}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin 3x}$ $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 3)^{\frac{x^2}{x-2}}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$
27	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5 + 2n^2 - 5n}{5n^5 + n^2 + 5}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^6 - 2x^2 + 11}{5x^7 + 3x^4 + 2}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x+1}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}}{x^2 - x}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x} - 1}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 5^{x+2}}{4 + 5^x}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 8x}$ $\lim_{x \rightarrow 3} (3x - 8)^{\frac{2}{x-3}}$

28	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^6 - 4n^4 + 6n}{2n^3 - 6n^2 - 3}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+2)!}{(n+1)! + (n+2)!}$ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^3 - 3x^2 + 4}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^6 - 2x^2 + 11}{5x^7 + 3x^4 + 2}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3} \right)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$ $\lim_{x \rightarrow 0} 5x \cdot \operatorname{arctg} 6x$ $\lim_{x \rightarrow \infty} (x-2)[\ln(x-1) - \ln(x+1)]$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 3x}{\cos x - \cos^3 x}$ $\lim_{x \rightarrow 1} (3-2x)^{\frac{x}{1-x}}$
29	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 + 4n^3 + 3n^2 - 6}{n^5 + 5n^4 + 3n^3 - 7n + 9}$ $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{\sqrt{2x-1} - 3}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\operatorname{arctg} 2x}$ $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$ $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$
30	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + 2n^2 - 5n}{6n^3 + n^2 + 5}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+1)!}{(n+2)!}$ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 3x^2 + 4}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right)$ $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{3x+17} - \sqrt{2x+12}}{x^2 + 8x + 12}$	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \operatorname{tg} 3x$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x+5} \right)^{x+3}$

**6. Тестові завдання для підготовки до експрес-контролю
за темою: «Границі функцій»**

№ завдання	Завдання рівню складності А	Завдання рівню складності В	Завдання рівню складності С
1	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x + 1}{\cos x}$ A. 1 B. 0 C. ∞	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + 16}$ A. 0 B. 2 C. ∞	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2}$ A. 1 B. 0 C. 1/2
2	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2 - 1}$ A. 1 B. 0 C. ∞	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 - 5}{x^2 + 5x - 1}$ A. 3 B. ∞ C. 0	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$ A. 1 B. 0 C. 1/2
3	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3 - 4x^2 + 2}{x^2 - x}$ A. 2 B. 0 C. ∞	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 1}{x^3 + 5x^2 - 4}$ A. 1 B. 0 C. 2	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4}$ A. 4 B. -4 C. 1/4
4	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$ A. 1 B. -1 C. ∞	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9 - x^2}{x + 8}$ A. 0 B. 2 C. ∞	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{3x^2 - 14x - 5}$ A. 9/16 B. 9 C. -4
5	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4x + 5}{x + 2}$ A. 13 B. 5/2 C. ∞	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 10x - 7}{x^3 + 10}$ A. 0 B. 2 C. ∞	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{2x^2 + 5x - 7}$ A. 2/7 B. 5/9 C. -5/9
6	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 - 3x + 1}{x - 4} + 1 \right)$ A. 3/4 B. 1 C. ∞	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{10}$ A. 0 B. 1 C. ∞	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{2x^2 - 9x + 9}$ A. 7/3 B. 4/3 C. -4/3
7	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1 - x^2}$ A. 1 B. 0 C. ∞	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + 2x}{x^2 + 2}$ A. 0 B. 2 C. ∞	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x^2}$ A. 0 B. 1 C. ∞

8	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin 2x}{x^2}$ A. 1 B. 0 C. ∞	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^3 + 2x - 1}$ A. 0 B. 1 C. ∞	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{2x^2}$ A. 0 B. -1/2 C. -1
9	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x + 1}$ A. 2 B. 1 C. 0	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x + 5)(x - 6)}{2x + 2}$ A. 3 B. 0 C. ∞	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin 2x}$ A. 0 B. 1 C. 1/2
10	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$ A. 0 B. 1 C. ∞	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x + 5)^2}{x^2 - 1}$ A. 2 B. 0 C. 4	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\operatorname{tg} 2x}$ A. 0 B. 1/4 C. 1/2
11	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ A. 0 B. ∞ C. e	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + 1)(3x - 7)}{9x^2 - 4}$ A. 1/3 B. 0 C. ∞	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x + 1}\right)^x$ A. 1/e B. 0 C. e
12	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ A. 1 B. ∞ C. 0	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x + 1)^2}{(x - 2)(x + 8)}$ A. 4 B. 1/4 C. 16	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x - 1}\right)^x$ A. 1/e B. 0 C. e^2
13	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ A. 1 B. ∞ C. 0	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x + 1)^2}{(4x - 2)(x + 8)}$ A. 2 B. 1/2 C. 1	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{2x}$ A. e^5 B. 0 C. e^{10}
14	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ A. 0 B. ∞ C. 1	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(12x - 1)(3x + 2)}{(6x - 1)^2}$ A. 3 B. 6 C. 1	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x - 5}\right)^{2x - 1}$ A. 1/e B. e^3 C. e^6

15	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ A. 1 B. ∞ C. 0	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5x-1)(3x+2)}{(9x-1)^2}$ A. 15 B. 5/81 C. 5/27	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$ A. 1 B. $e^{\frac{1}{4}}$ C. e
----	---	--	---

Відповіді до тестових завдань

<i>Номер питання</i>	<i>Вірна відповідь на питання рівня складності А</i>	<i>Вірна відповідь на питання рівня складності В</i>	<i>Вірна відповідь на питання рівня складності С</i>
1	A	B	B
2	B	B	B
3	C	C	C
4	C	C	A
5	C	B	B
6	A	C	A
7	C	A	C
8	C	A	B
9	C	C	A
10	B	C	A
11	C	A	C
12	A	C	C
13	A	C	C
14	C	C	C
15	A	C	B

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1. – М.: Высш. школа, 1980. – 320 с.
2. Вища математика: Підручник: У 2 кн. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К.: Либідь, 2003. – Кн. 1. Основні розділи / Г.Й. Призва, В.В. Плахотник, Л.Д. Гординський та ін.; за ред. Г.Л. Кулініча. – 400 с.
3. Берман Г.Е. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
4. Методичні вказівки з вищої математики для студентів технологічних спеціальностей. Вступ до математичного аналізу. Границі / Укл.: Л.І. Коротка, Н.Ю. Наumenко, О.А. Радуль. – Дніпропетровськ: ДВНЗ УДХТУ, 2009. – 30 с.