

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ХІМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА МАТЕМАТИКА»
ЗА РОЗДІЛОМ «ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ
ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ» ДЛЯ СТУДЕНТІВ ВСІХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ
ДЕННОЇ ТА ЗАОЧНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики.
Протокол № 3 від 17.10.16

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Вища математика» за розділом: «Диференціальне числення функції однієї змінної» для студентів всіх спеціальностей денної та заочної форми навчання. Укл.: Насонова С.С., Купріна Л.О., Поліщук А.В. – Дніпро: ДВНЗ УДХТУ, 2017. – 30 с.

Укладачі: С.С. Насонова, канд. техн. наук,
Л.О. Купріна, ст. викладач,
А.В. Поліщук, , канд. техн. наук

Відповідальний за випуск : В.І. Олевський, д-р. техн. наук

Навчальне видання
Методичні вказівки
до практичних занять з дисципліни «Вища математика»
за розділом «Диференціальне числення функції однієї змінної»
для студентів всіх спеціальностей денної та заочної форми навчання

Укладачі: НАСОНОВА Світлана Сергіївна
КУПРІНА Лариса Олександрівна
ПОЛІЩУК Алла Вікторівна

Технічний редактор Т.М. Кіжло
Комп'ютерна верстка Т.М. Кіжло

Підписано до друку 15.05.17. Формат 60×84/16. Папір ксерокс. Друк різнограф.
Умов. друк. арк. 1,45. Обл.-вид. арк. 1,51. Тираж 100 прим. Зам. № 565.
Свідоцтво ДК № 5026 від 16.12.2015

ДВНЗ УДХТУ, просп. Гагаріна, 8, м. Дніпро, 49005

Редакційно-видавничий відділ

1. Диференціювання функцій

Нехай задано функцію $y = f(x)$, визначену на інтервалі (a, b) . Надамо аргументу $x \in (a, b)$ приріст Δx , $x + \Delta x \in (a, b)$. Знайдемо відповідний йому приріст функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ і запишемо відношення приросту функції до приросту аргументу $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Знайдемо границю $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Якщо ця границя існує, то її називають похідною функції $y = f(x)$ і позначають $f'(x)$ або y' , f'_x , y'_x , $\frac{dy}{dx}$.

Таким чином, похідною функції $f(x)$ по аргументу x називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Якщо ця границя кінцева, то похідна існує, й функція $f(x)$ називається диференційованою в точці x . Операція відшукування похідної називається диференціюванням функції.

Основні правила диференціювання

Нехай $C \in \mathbb{R}$ – стала, $u = u(x)$, $v = v(x)$ – функції, що мають похідні. Тоді:

1. $C' = 0$;

2. $x' = 1$;

3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

4. $(C \cdot u)' = C \cdot u'$;

5. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

6. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, ($v \neq 0$);

7. $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}$, ($v \neq 0$)

8. $\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}$;

Формули диференціювання основних функцій

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.

2. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

9. $(\sin x)' = \cos x$.

10. $(\cos x)' = -\sin x$.

$$3. \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

$$4. (e^x)' = e^x.$$

$$5. (a^x)' = a^x \cdot \ln a.$$

$$6. (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$7. (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

$$8. (\lg x)' = \frac{1}{x \cdot \ln 10}.$$

$$11. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$12. (\operatorname{ctgx})' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$13. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$14. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$15. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$16. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Приклад. Знайти похідну функції $y = 2x^3 + 5x^2 - 7x - 4$ за означенням (не користуючись формулами диференціювання).

Розв'язання. Надамо аргументу x приріст Δx , тоді y отримує приріст Δy :

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^3 + 5(x + \Delta x)^2 - 7(x + \Delta x) - 4.$$

Знайдемо приріст функції:

$$\Delta y = \left[2(x + \Delta x)^3 + 5(x + \Delta x)^2 - 7(x + \Delta x) - 4 \right] - (2x^3 + 5x^2 - 7x - 4) = 6x^2\Delta x + 6x\Delta x^2 + 2\Delta x^3 + 10x\Delta x + 5\Delta x^2 - 7\Delta x$$

Знайдемо відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x\Delta x + 2\Delta x^2 + 10x + 5\Delta x - 7$$

Знайдемо границю цього відношення при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x^2 + 6x\Delta x + 2\Delta x^2 + 10x + 5\Delta x - 7) = 6x^2 + 10x - 7$$

Таким чином, за означенням похідної $y' = 6x^2 + 10x - 7$.

Приклад. Знайти похідну функції $y = \sqrt{x}$ за означенням (не користуючись формулами диференціювання).

Розв'язання. Знайдемо приріст функції $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$. Тоді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Отже, $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Приклад. Знайти похідну функції $y = -ctgx - x$ за означенням (не користуючись формулами диференціювання).

Розв'язання. Знаходимо

$$\Delta y = -ctg(x + \Delta x) - (x + \Delta x) + ctgx + x = ctgx - ctg(x + \Delta x) - \Delta x$$

Використовуючи формулу $ctg\alpha - ctg\beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\alpha \sin\beta}$, отримуємо:

$$\Delta y = \frac{\sin(x + \Delta x - x)}{\sin x \sin(x + \Delta x)} - \Delta x = \frac{\sin \Delta x}{\sin x \sin(x + \Delta x)} - \Delta x,$$

звідси

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}{\sin x \sin(x + \Delta x)} - 1.$$

Отже,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}{\sin x \sin(x + \Delta x)} - 1 = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

Таким чином, отримуємо відповідь: $y' = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 = ctg^2 x$.

Приклад. Використовуючи формули та правила диференціювання, знайти похідні наступних функцій: 1) $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 1$; 2) $y = x^2 \cdot e^x$; 3) $x^3 \cdot arctgx$; 4) $y = x\sqrt{x}(3\ln x - 2)$; 5) $y = \frac{\arcsin x}{x}$.

Розв'язання.

1) Знайдемо похідну функції $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 1$

$$\begin{aligned} y' &= (2x^3)' - (5x^2)' + (7x)' + (4)' = 2(x^3)' - 5(x^2)' + 7(x)' + (4)' = \\ &= 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 7 \cdot 1 + 0 = 6x^2 - 10x + 7 \end{aligned}$$

2) Знайдемо похідну функції $y = x^2 \cdot e^x$

$$y' = x^2 \cdot (e^x)' + e^x \cdot (x^2)' = x^2 e^x + 2x e^x = x e^x (x + 2)$$

3) Знайдемо похідну функції $y = x^3 \cdot \arctg x$

$$y' = x^3 \cdot (\arctg x)' + \arctg x \cdot (x^3)' = x^3 \cdot \frac{1}{1+x^2} + 3x^2 \cdot \arctg x = \frac{x^3}{1+x^2} + 3x^2 \cdot \arctg x$$

4) Знайдемо похідну функції $y = x\sqrt{x}(3\ln x - 2)$. Перепишемо дану функцію у вигляді $y = x^{3/2} \cdot (3\ln x - 2)$. Тоді

$$y' = x^{3/2} \cdot \frac{3}{x} + \frac{3}{2} x^{1/2} (3\ln x - 2) = 3x^{1/2} + \frac{9}{2} x^{1/2} \cdot \ln x - 3x^{1/2} = \frac{9}{2} \sqrt{x} \ln x$$

5) Знайдемо похідну функції $y = \frac{\arcsin x}{x}$

$$y' = \frac{x \cdot (\arcsin x)' - \arcsin x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x}{x^2} = \frac{x - \sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$$

2. Диференціювання складної функції

Нехай $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ – дві довільні функції, $u \in A$, $x \in B$, де A , B – області визначення. Значення $u = \varphi(x)$ при будь-яких $x \in B$ належать області A . Тоді можна записати $y = f(\varphi(x))$.

Функцію, одержану «накладанням» двох і більше функцій, будемо називати *складною*.

Наприклад, $y = \ln(x+5)$ – складна. Вона утворена накладанням двох функцій: $y = \ln u$, $u = x+5$.

Правило диференціювання складної функції. Якщо функція $y = f(u)$ диференційована по u , а функція $u = \varphi(x)$ – по x , то складна функція

$y = f(\varphi(x))$ має похідну

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \quad \text{чи} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Приклад. Знайти похідні наступних функцій:

1) $y = (2x^3 + 5)^4$; 2) $y = tg^6 x$; 3) $\cos^2 x$; 4) $y = \sin(2x + 3)$; 5) $y = \ln tg \frac{x}{2}$;

6) $y = e^x \cdot arctge^x - \ln \sqrt{1 + e^{2x}}$

Розв'язання.

1) Позначимо $2x^3 + 5 = u$. Тоді $y = u^4$. Застосовуючи правило диференціювання складної функції отримуємо:

$$y' = (u^4)'_u \cdot (2x^3 + 5)'_x = 4u^3 \cdot 6x^2 = 24x^2(2x^3 + 5)^3$$

$$2) y' = 6tg^5 x \cdot (tg x)' = 6tg^5 x \cdot \sec^2 x$$

$$3) y' = 2 \cos x \cdot (\cos x)' = -2 \cos x \cdot \sin x = -\sin 2x$$

$$4) y' = \cos(2x + 3) \cdot (2x + 3)' = 2 \cos(2x + 3)$$

$$\begin{aligned} 5) y' &= \frac{1}{tg(x/2)} \cdot (tg(x/2))' = \frac{1}{tg(x/2)} \cdot \sec^2(x/2) \cdot (x/2)' = \\ &= \frac{1}{2tg(x/2)\cos^2(x/2)} = \frac{1}{2\sin(x/2)\cos(x/2)} = \frac{1}{\sin x} \end{aligned}$$

6) Запишемо задану функцію у вигляді

$$y = e^x \cdot arctge^x - \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x}),$$

отримуємо

$$\begin{aligned} y' &= e^x \cdot \frac{1}{1 + e^{2x}} \cdot e^x + e^x arctge^x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + e^{2x}} \cdot e^{2x} \cdot 2 = \\ &= \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} + e^x arctge^x - \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} = e^x arctge^x \end{aligned}$$

3. Логарифмічне диференціювання. Похідна показниково-степеневі функції

При знаходженні похідної деяких функцій доцільно застосовувати логарифмування. Для диференціювання показниково-степеневі функції $y = u^v$, де $u = u(x)$ і $v = v(x)$, логарифмування обов'язкове. Виведемо формулу для похідної цієї функції. Логарифмуючи рівність $y = u^v$ і диференціюючи обидві частини отриманої рівності $\ln y = \ln u^v$ знаходимо:

$$\frac{1}{y} y' = v' \ln u + v \frac{u'}{u}.$$

Отже, $y' = y(v' \ln u + v \frac{u'}{u}) = u^v(v' \ln u + v \frac{u'}{u}) = u^v v' \cdot \ln u + v \cdot u^{v-1} u'$. Таким чином,

$$(u^v)' = v \cdot u^{v-1} u' + u^v \ln u \cdot v'.$$

Приклад. Знайти похідну функції $y = x^{x^2}$

Розв'язок. Прологарифмуємо задану рівність. Тоді маємо:

$$\ln y = x^2 \ln x$$

Продиференціюємо обидві частини цієї рівності по x . Оскільки y є функцією аргументу x , то $\ln y$ є складна функція і $(\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y'$. Отже,

$$\frac{y'}{y} = x^2 \cdot \frac{1}{x} + 2x \cdot \ln x, \quad \frac{y'}{y} = x(1 + 2 \ln x)$$

Звідси $y' = xy(1 + 2 \ln x) = xx^{x^2}(1 + 2 \ln x) = x^{x^2+1}(1 + 2 \ln x)$.

Приклад. Знайти похідну функції $y = (\sin x)^{\tan x}$

Розв'язання. Логарифмуємо задану рівність:

$$\ln y = \tan x \cdot \ln \sin x$$

Звідси

$$\frac{y'}{y} = \tan x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x + \sec^2 x \cdot \ln \sin x = 1 + \sec^2 x \cdot \ln \sin x;$$

$$y' = y(1 + \sec^2 x \cdot \ln \sin x) = (\sin x)^{\tan x} (1 + \sec^2 x \cdot \ln \sin x)$$

Приклад. Знайти похідну функції $y = \frac{(2x-1)^3 \cdot \sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2 \cdot \sqrt[3]{1-x}}$

Розв'язання. Задана функція не є показниково-степенною, але її також доцільно спочатку прологарифмувати:

$$\begin{aligned}\ln y &= 3\ln(2x-1) + \frac{1}{2}\ln(3x+2) - 2\ln(5x+4) - \frac{1}{3}\ln(1-x); \\ \frac{y'}{y} &= \frac{3}{2x-1} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3x+2} - 2 \cdot \frac{5}{5x+4} + \frac{1}{3(1-x)}; \\ y' &= y = \frac{(2x-1)^3 \cdot \sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2 \cdot \sqrt[3]{1-x}} \cdot \left[\frac{6}{2x-1} + \frac{3}{2(3x+2)} - \frac{10}{5x+4} + \frac{1}{3(1-x)} \right].\end{aligned}$$

4. Диференціювання функцій, заданих параметрично

Якщо функція $y = f(x)$ задана параметрично двома рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in (\alpha; \beta)$, то її похідні обчислюються за формулами:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}, \text{ або } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Приклад. Знайти $\frac{dy}{dx}$, якщо $x = t^3 + 3t + 1$, $y = 3t^5 + 5t^3 + 1$.

Розв'язання. Знайдемо $\frac{dy}{dt} = 3t^2 + 3$, $\frac{dy}{dt} = 15t^4 + 15t^2$. Отже,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{15t^4 + 15t^2}{3t^2 + 3} = 5t^2$$

5. Диференціювання неявних функцій

Рівняння $F(x, y) = 0$ задає неявно функцію $y = y(x)$ на інтервалі $(a; b)$, якщо для всіх $x \in (a; b)$ виконується рівність $F(x, y(x)) = 0$.

Для обчислення похідної функції $y = y(x)$ треба продиференціювати по x рівняння $F(x, y) = 0$. Розв'язуючи це рівняння відносно $y'(x)$, знаходимо похідну неявної функції.

Приклад. Знайти похідну y'_x для функції, заданої неявно рівнянням $x^2 + y^2 = 4$.

Розв'язання. Оскільки y є функція аргументу x , то застосовуючи правило диференціювання складної функції, знаходимо: $(y^2)' = 2yy'$. Диференціюємо по x обидві частини даного рівняння, отримуємо:

$$2x + 2yy' = 0,$$

тобто

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Приклад. Знайти похідну y'_x для функції, заданої неявно рівнянням $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$.

Розв'язання. Диференціюємо по x обидві частини даного рівняння, отримуємо:

$$3x^2 + \frac{y'}{y} - x^2 e^y y' - 2x e^y = 0,$$

тобто

$$y' = \frac{(2x y e^y - 3x^2) y}{1 - x^2 y e^y}.$$

6. Застосування похідної до задач геометрії

Теорема. Якщо крива задана рівнянням $y = f(x)$, то значення $f'(x_0)$ похідної $f'(x)$ у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту k дотичної до графіка функції $y = f(x)$, проведеної в точці $M_0(x_0, y_0)$: $f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \varphi$, де $y_0 = f(x_0)$ (рис. 1).

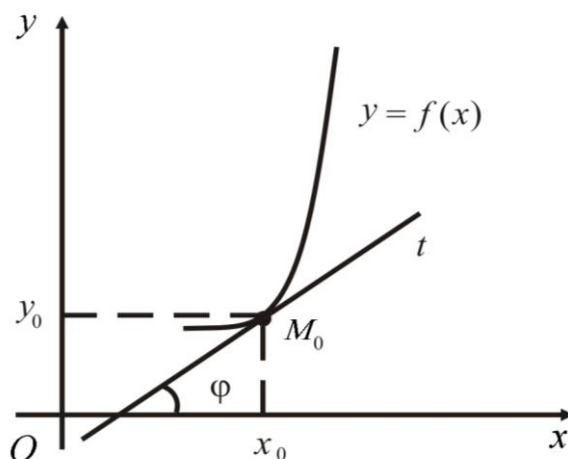


Рис. 1

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

Нормаллю до кривої в точці M_0 називається пряма, яка проходить через задану точку та перпендикулярна до дотичної в цій точці кривої.

Рівняння нормалі має вигляд:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0),$$

Кутом між двома кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ в точці їх перетину $M_0(x_0, y_0)$ називається кут між дотичними до цих кривих у точці M_0 . Цей кут розраховується за формулою:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0)}.$$

Приклад. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ в точці $M(1; -1)$.

Розв'язання. З рівняння кривої знайдемо похідну:

$$2x + 2y^2 + 4xy' + 12y^3y' = 0,$$

тобто

$$y' = -\frac{x + y^2}{2xy + 6y^3}.$$

$$\text{Отже, } y_0' = -\frac{1 + (-1)^2}{2 \cdot 1(-1) + 6(-1)^3} = \frac{1}{4}.$$

Рівняння дотичної

$$y + 1 = \frac{1}{4}(x - 1), \text{ або } x - 4y - 5 = 0.$$

Рівняння нормалі

$$y + 1 = -4(x - 1), \text{ або } 4x + y - 3 = 0.$$

Приклад. Визначити, який кут утворює з віссю абсцис дотична до кривої $y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^3$, проведена в точці з абсцисою $x = 1$.

Розв'язання. Знаходимо похідну $y' = \frac{10}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^2$. При $x=1$ маємо $y' = 3$, тобто $\operatorname{tg} \alpha = 3$, звідси $\alpha = \operatorname{arctg} 3 \approx 71^{\circ} 34'$.

7. Похідні вищих порядків

Похідною другого порядку (другою похідною) від функції $y = f(x)$ називається похідна від її похідної, тобто

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Другу похідну також позначають $y''(x)$ або $\frac{d^2 y}{dx^2}$. Похідна від похідної другого порядку називається *похідною третього порядку*

$$f'''(x) = (f''(x))'$$

Взагалі, *похідною n -го порядку* від функції $y = f(x)$ називається похідна від похідної $(n-1)$ -го порядку

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

Позначають n -ю похідну так: $y^{(n)}(x)$ або $\frac{d^n y}{dx^n}$, або $f^{(n)}(x)$.

Похідні вищих порядків (друга, третя і т.д.) обчислюються послідовним диференціюванням заданої функції.

Якщо функція задана параметрично: $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, то похідні $y'_x, y''_{xx}, \dots$, обчислюються за формулами

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \quad y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} \text{ і т.д.}$$

Похідну другого порядку можна також обчислити за формулою

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt}x'_t - x''_{tt}y'_t}{(x'_t)^3}$$

Приклад. $y = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 7$. Знайти $y', y'', y''', \dots$.

Розв'язання. $y' = 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 2x - \frac{1}{2}$,

$$y'' = 20x^3 + 24x^2 - 18x - 2,$$

$$y''' = 60x^2 + 48x - 18,$$

$$y^{IV} = 120x + 48, \quad y^V = 120, \quad y^{VI} = y^{VII} = \dots = 0$$

Приклад. $y = \ln x$. Знайти $y^{(n)}$.

Розв'язання. $y' = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $y'' = -1 \cdot x^{-2}$, $y''' = 1 \cdot 2x^{-3}$, $y^{IV} = -1 \cdot 2 \cdot 3x^{-4}$, і т.д.

Вираз для n -ї похідної має вигляд:

$$y^{(n)} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)(-1)^{n-1} \cdot x^{-n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}$$

Приклад. $y = \sin x$. Знайти $y^{(n)}$.

Розв'язання.

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \dots$$

$$\text{Отже, } y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

Приклад. Знайти y'_x та y''_{xx} , якщо $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

$$\text{Розв'язання. } y'_x = \frac{(a \sin^3 t)'_t}{(a \cos^3 t)'_t} = \frac{3a \sin^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sin t} = -\operatorname{tg} t;$$

$$y''_{xx} = \frac{(-\operatorname{tg} t)'_t}{(a \cos^3 t)'_t} = \frac{-\sec^2 t}{-3a \cos^2 t \sin t} = \frac{1}{3a \sin t \cos^4 t}.$$

8. Диференціали першого та вищих порядків

Диференціалом першого порядку функції $y = f(x)$ називається головна частина її приросту, лінійна відносно приросту аргументу. Диференціалом аргументу називається приріст аргументу $dx = \Delta x$.

Диференціал функції дорівнює добутку її похідної на диференціал аргументу:

$$dy = f'(x)dx.$$

Основні властивості диференціалу

$$1. dC = 0, \text{ де } C = \text{const}$$

$$4. d(uv) = u dv + v du$$

$$2. d(Cu) = C du$$

$$5. d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

$$3. d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$6. df(u) = f'(u) du$$

Якщо приріст Δx аргументу малий за абсолютною величиною, то

$$\Delta y \approx dy,$$

і

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Таким чином, диференціал функції може застосовуватися для *наближених обчислень*.

Диференціалом другого порядку функції $y = f(x)$ називається диференціал від диференціалу першого порядку:

$$d^2y = d(dy)$$

Аналогічно можна дати визначення *диференціалу третього порядку*:

$$d^3y = d(d^2y)$$

Взагалі, диференціал n -го порядку від функції $y = f(x)$ має вигляд

$$d^{(n)}y = d(d^{(n-1)}y).$$

Якщо $y = f(x)$ і x – незалежна змінна, то диференціали вищих порядків обчислюються за формулами:

$$d^2y = y''(dx)^2, \quad d^3y = y'''(dx)^3, \quad \dots, \quad d^ny = y^{(n)}(dx)^n.$$

Приклад. Знайти диференціал функції $y = \arctg x$.

$$\text{Розв'язок. } dy = (\arctg x)' \cdot dx = \frac{dx}{1+x^2}.$$

Приклад. Знайти диференціали першого, другого, третього порядків функції $y = (2x - 3)^3$.

$$\text{Розв'язання. } dy = 3(2x - 3)^2 \cdot 2dx = 6(2x - 3)^2 dx,$$

$$d^2y = 12(2x - 3) \cdot 2dx^2 = 24(2x - 3)dx^2,$$

$$d^3y = 24 \cdot 2dx^3 = 48dx^3.$$

Приклад. Обчислити наближене значення $\arcsin 0,51$

Розв'язання. Розглянемо функцію $y = \arcsin x$. Вважаючи $x = 0,5$; $\Delta x = 0,01$ та застосовуючи формулу

$$\arcsin(x + \Delta x) \approx \arcsin x + (\arcsin x)' \cdot \Delta x,$$

отримуємо

$$\arcsin 0,51 \approx \arcsin 0,5 + \frac{1}{\sqrt{1-(0,5)^2}} \cdot 0,01 = \frac{\pi}{6} + 0,011 = 0,513$$

9. Застосування похідних до знаходження границі функції. Правило Лопітала

Теорема 1. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначені і диференційовані в деякому околі точки x_0 , причому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$$

і в околі цієї точки $\varphi'(x) \neq 0$. Тоді, якщо існує границя відношення похідних

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

то існує і границя відношення функцій

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

і ці границі рівні між собою

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Теорема 2. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначені і диференційовані в деякому околі точки x_0 і в цьому околі

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty, \quad \varphi'(x) \neq 0.$$

Тоді, якщо існує границя

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

то існує границя

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

причому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Зауваження. Правило Лопітала застосовується лише для розкриття невизначеностей вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$ та $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Невизначеності вигляду

$$[0 \cdot \infty], [\infty - \infty], [0^0], [\infty^0], [1^\infty]$$

алгебраїчними перетворюваннями зводяться до основних $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

1. Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$, тоді

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \varphi(x) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

2. Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$, тоді

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \varphi(x)) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{\varphi(x)}} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{\varphi(x)}} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

3. Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$, тоді $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \ln f(x)}$.

Приклад. Обчислити $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln x}{x}$

Розв'язання. Підставимо в функції $f(x) = \ln x$ і $\varphi(x) = x$ граничне значення аргументу x і одержимо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$$

Застосовуємо правило Лопітала

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{2x}}{x}$

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{2x}}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5e^{5x} - 2e^{2x}}{1} = 3$

Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^{x/2}}{x + e^x}$.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^{x/2}}{x + e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x/2}(1 + \frac{x}{2})}{1 + e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}e^{x/2}(2 + \frac{x}{2})}{e^x} =$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{x}{2}}{e^{x/2}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/2}{(1/2)e^{x/2}} = 0$$

Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot \ln x)$.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot \ln x) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-2/x^3} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$

Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x$.

Розв'язання. У даному випадку маємо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0} \right]$. Позначимо дану функцію через y , тобто $y = (\sin x)^x$ та прологарифмуємо її:

$$\ln y = x \cdot \ln \sin x = \frac{\ln \sin x}{1/x}.$$

Знайдемо границю логарифма даної функції за допомогою правила Лопіталя

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x / \sin x}{-1/x^2} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{\sin x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \cos x \cdot \frac{x}{\sin x} \right) = 0$$

Отже, $\lim_{x \rightarrow 0} y = e^0 = 1.$

Приклад. Обчислити $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\ln x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\left[1^\infty \right]$. Нехай $y = (1+x)^{\ln x}$.

Прологарифмуємо цю функцію

$$\ln y = \ln x \cdot \ln(1+x)$$

Знайдемо границю логарифма даної функції за допомогою правила Лопіталя

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln x \cdot \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{1/\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/(1+x)}{-1/(x \ln^2 x)} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln^2 x}{x+1} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2 x}{1+1/x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 \ln x)/x}{-1/x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1/x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0 \end{aligned}$$

10. Теоретичні питання за темою:
«Диференціальне числення функції однієї змінної»

1. Похідна функції. Основні формули й правила диференціювання.
2. Правило диференціювання складної функції.
3. Логарифмічне диференціювання. Похідна показникові-степеневі функції.
4. Диференціювання функцій, заданих параметрично.
5. Диференціювання неявних функцій.
6. Застосування похідної до задач геометрії.
7. Диференціал функції. Геометричний зміст диференціала. Властивості диференціала.
8. Застосування диференціала до наближених обчислень.
9. Похідні та диференціали вищих порядків.
10. Правило Лопіталя щодо розкриття невизначеностей виду $\left[\frac{0}{0} \right]$.
11. Правило Лопіталя щодо розкриття невизначеностей виду $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

11. Практичні завдання для індивідуального виконання
за темою: «Диференціальне числення функції однієї змінної»

Завдання 1. Знайти перші похідні функцій. У завданнях а) і б) додатково знайти другі похідні.

1.	$a) y = 4x^7 + \frac{1}{x^2} - \sqrt{2x};$ $б) y = \frac{x + e^{3x+2}}{1 + \cos 3x};$ $в) y = (x + 2) \cdot e^{-x^2};$ $г) y = \sin(3x^7 + 1) + 8x;$ $д) y = 2^{\lg x} + 3^{\cos 4x};$	$e) y = x^2 \cdot \cos 7x;$ $ж) y = \frac{x^2}{(x+1)^2};$ $з) y = \ln^5 \sin x;$ $и) y = \arcsin e^{4x};$ $к) y = (\sin 2x)^{\frac{1}{x}}.$
2.	$a) y = 9x^2 + \frac{1}{2x^2} - \sqrt[3]{x};$ $б) y = \sqrt[3]{1+x^3};$ $в) y = e^{\sin 5x} \cdot \ln x;$ $г) y = \ln \sin (2x + 5);$ $д) y = 0,9^{\cos^2 x};$	$e) y = x \cdot \arctg 3x;$ $ж) y = \frac{9-x^2}{9+x^2};$ $з) y = 3 \sin^2 x \cdot \cos 2x;$ $и) y = e^{-x^2} + x^2 + \frac{3}{x};$ $к) y = x^{\arccos x}.$

3.	$a) y = 3x^5 - \frac{1}{x^5} - \sqrt[5]{x};$ $б) y = 2\sqrt{4x+3} - \frac{3}{\sqrt{x^3+x+1}};$ $в) y = (\ln x + 1)^2 \cdot \cos 2x;$ $г) y = \arcsin \sqrt{1-4x};$ $д) y = 5^{\lg x} + 3^{\sin x};$	$e) y = x\sqrt{1+x^2};$ $ж) y = \frac{1+e^x}{1-e^x};$ $з) y = \sin^2 2x + \cos x;$ $и) y = \ln \operatorname{tg} 5x;$ $к) y = (x+1)^{2x}.$
4.	$a) y = 3x^7 - \frac{1}{x^7} - \sqrt[7]{3x};$ $б) y = \sqrt{3-4x+5x^2} + 4x \cdot \ln x;$ $в) y = \arcsin(3x^2 + 2);$ $г) y = \frac{\sin^2 x}{2 + \cos^2 x};$ $д) y = 3^{\sin^2 x};$	$e) y = \frac{5 + \sin 5x}{4 - \cos 2x};$ $ж) y = (x^2 + 1) \cdot \operatorname{arctg} 4x;$ $з) y = (2x + 5) \cdot e^{-x^5};$ $и) y = \ln \sqrt{x+1};$ $к) y = (\cos x)^{\sqrt{x}}.$
5.	$a) y = 4x^9 - \frac{4}{x^9} - \sqrt[9]{4x};$ $б) y = \sqrt[3]{1+\sqrt{x+3}};$ $в) y = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2};$ $г) y = x \cdot \arccos \sqrt{4-x^2};$ $д) y = 0,2^{\operatorname{ctg}^2 x};$	$e) y = e^x \cdot \cos x;$ $ж) y = 3x^2 \cdot \ln x^3;$ $з) y = \frac{3 + \sin 2x}{9 - e^{2x}};$ $и) y = (2x + 2 \cos x) \cdot e^{-x};$ $к) y = (\sin 2x)^{\cos x}.$
6.	$a) y = 15x^3 - \frac{15}{x^3} + \sqrt[3]{x^2};$ $б) y = \sqrt{1+\ln^2 x};$ $в) y = \frac{\cos 3x + 4}{\sin 3x - 4};$ $г) y = \operatorname{tg}^2 \sqrt{x+5} + 8x + 7;$ $д) y = (x + x^2)^x;$	$e) y = e^{\sin 4x + 8};$ $ж) y = \frac{x}{x-1} - \ln 4x;$ $з) y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}};$ $и) y = \cos^{100} x + \sin 100x;$ $к) y = 3^{\arccos 3x}.$
7.	$a) y = 3x^{11} + \frac{5}{x^{11}} + \sqrt[11]{x^3};$ $б) y = \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2;$	$e) y = (1 - x^2) \cdot \cos 2x;$ $ж) y = \sqrt[3]{x + x\sqrt{x}};$

	$6) y = \frac{x}{\sqrt{25-x^2}};$ $2) y = \arctg(\ln x) + \ln(\sin x);$ $4) y = 2 \cdot \cos(4x+x^2);$	$3) y = e^{-x} \cdot \sin 2x;$ $u) y = \ln^5(x^2-1);$ $\kappa) y = (\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}.$
8.	$a) y = 7x - \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^3};$ $6) y = \sqrt[3]{\frac{1+x^2}{1-x^2}};$ $8) y = 3x \cdot \arcsin 2x;$ $2) y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^3+1};$ $4) y = 3^{\operatorname{ctg} x} + 8^{\cos 4x};$	$e) y = \sin^4 x + \cos^4 x;$ $\kappa) y = \ln \frac{x^2}{1-x^2};$ $3) y = (x^2 + 2x + 2) \cdot e^{-x};$ $u) y = \sin(x+6) - x \cdot \cos 4x;$ $\kappa) y = (x^2)^{\frac{1}{x}}.$
9.	$a) y = 6x^7 + \frac{7}{x^6} + \sqrt[6]{x^5};$ $6) y = \sqrt[3]{2-x^2} \cdot \sqrt{x};$ $8) y = \frac{x^6}{6x^5-1};$ $2) y = \ln^3 \sin(3x+3);$ $4) y = 2^{\operatorname{tg} 3x};$	$e) y = \ln(x^2+5);$ $\kappa) y = x^5 \cdot e^{-x};$ $3) y = \arctg \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$ $u) y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x};$ $\kappa) y = (\sqrt{x})^{\sin x}.$
10.	$a) y = 12x^{14} + \frac{14}{x^2} - \sqrt[12]{x};$ $6) y = \sqrt[3]{x^2+3x};$ $8) y = \frac{x}{x^2+2};$ $2) y = \ln(2x^3+3x^2);$ $4) y = 5^{\frac{x}{x+1}};$	$e) y = 8x \cdot e^{-x^2};$ $\kappa) y = (3x+1)^5 \cdot \cos 3x;$ $3) y = \frac{\sin x}{3\cos^2 x};$ $u) y = \arctg^2 e^x;$ $\kappa) y = x^{\ln^2 x}.$
11.	$a) y = x^{15} + \frac{15}{x^2} - \sqrt{x};$ $6) y = (5x+x^3) \cdot \ln x^2;$ $8) y = \frac{x \cdot \cos x}{1-\sin x} + 2\sin 4x + 4;$	$e) y = \cos(10x+x^3);$ $\kappa) y = (1+\sqrt[3]{x})^3;$ $3) y = \frac{7-\cos 3x}{5+\sin 5x};$

	$z) y = \arccos \frac{1}{2x^2};$ $\partial) y = 0,7^{\arctg x};$	$u) y = \ln(4 + \sin 4x);$ $\kappa) y = x^{\sin \sqrt{x}}.$
12.	$a) y = 3x^5 - \frac{1}{x} + \sqrt[4]{x};$ $\bar{b}) y = \frac{\sin x}{\cos^2 x};$ $\bar{e}) y = (x + 1)^2 \cdot \cos 5x;$ $z) y = \arctg(e^{2x} + 3);$ $\partial) y = \sqrt{x + \sqrt[3]{x}};$	$e) y = \ln \lg(2x + 1);$ $\kappa) y = \frac{x^3}{(x - 2)^2};$ $3) y = 2^{3x} + 7x^7 + e^{-x^2};$ $u) y = 0,7^{\operatorname{ctg}^2 x};$ $\kappa) y = x^{\arcsin x}.$
13.	$a) y = 2x^5 + \frac{5}{x^2} - \sqrt[5]{2x};$ $\bar{b}) y = \sqrt[3]{\cos^2 x + x^2};$ $\bar{e}) y = \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^3}};$ $z) y = x \cdot \arccos x - \sqrt{2 - x^3};$ $\partial) y = 7^{\ln^2 x};$	$e) y = (3x + 2) \cdot \sin 3x;$ $\kappa) y = \ln^2 \lg 2x;$ $3) y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x};$ $u) y = \arcsin(e^{7x});$ $\kappa) y = (\sin 2x)^x.$
14.	$a) y = 2x^7 - \frac{1}{7x^7} - \sqrt[7]{2x};$ $\bar{b}) y = \frac{x^2}{x^3 - 1};$ $\bar{e}) y = (3 - \sin^2 x)^3;$ $z) y = \frac{1 + \cos 2x}{x^3} + \sin(3x + 9);$ $\partial) y = e^{\sqrt{2x}} + 3;$	$e) y = \arctg x^2 + 7x^6 + 2;$ $\kappa) y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}};$ $3) y = x^2 \cdot \ln(x^2 + 1);$ $u) y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + 5\sqrt[5]{x^3 + 1};$ $\kappa) y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$
15.	$a) y = x^7 + \frac{7}{x^3} - \sqrt[3]{7x};$ $\bar{b}) y = \frac{\sin x}{1 + \ln \sin x};$ $\bar{e}) y = (5 + x^3)^2 \cdot e^{-x};$ $z) y = 2\sqrt{4x} - \frac{4}{\sqrt[3]{x^2 + 5}};$	$e) y = e^x \cdot \sin 2x;$ $\kappa) y = \arctg \sqrt{\frac{3 - x}{x - 2}};$ $3) y = \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x}};$ $u) y = \cos(3^x);$

	$\partial) y = 7^{\sqrt{\cos x}};$	$\kappa) y = (\arcsin x)^{(x^2)}.$
16.	$a) y = x^5 + \frac{5}{x^3} - \sqrt[3]{5x};$ $\bar{o}) y = \frac{2 \sin 5x}{1 - \cos 3x};$ $\wp) y = \arcsin(\cos x^2) + x^2;$ $\varepsilon) y = 2 \operatorname{tg}^3(x^3 + 2);$ $\partial) y = 2^{\sin 3x};$	$e) y = (x^2 + 6) \cdot \ln 3x;$ $\varkappa) y = \frac{x^2}{1-x} + \frac{9x+8}{x^3};$ $3) y = e^{3x} \cdot \cos 3x;$ $u) y = \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{x};$ $\kappa) y = (x+1)^{(x^2)}.$
17.	$a) y = 7x^2 + \frac{x^5}{5} - \sqrt[5]{x};$ $\bar{o}) y = \ln \operatorname{ctg}^3 x;$ $\wp) y = \frac{x^7}{x^5 - 2};$ $\varepsilon) y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x + 2);$ $\partial) y = 2^{\frac{x}{1+x}} + 7^{\cos 2x};$	$e) y = \sin^2 6x + 3x^2;$ $\varkappa) y = \sqrt{3x} \cdot \arcsin x^2;$ $3) y = \frac{1+e^{2x}}{1-e^{4x}};$ $u) y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2x + 3});$ $\kappa) y = (\sin \sqrt{x})^x.$
18.	$a) y = 3x^5 - \frac{5}{x^5} + \sqrt[5]{5x+2};$ $\bar{o}) y = \arcsin(3x^3 + 4);$ $\wp) y = (x+8) \cdot \operatorname{arctg} 4x^3;$ $\varepsilon) y = \frac{2x^3 + 3x^2}{3x};$ $\partial) y = 4x \cdot (1 - 3 \ln x);$	$e) y = \frac{5x + \sin 4x}{\cos 2x - 4};$ $\varkappa) y = \ln \cos(5x^3 + 4);$ $3) y = (\operatorname{ctg} 3x + 1)^5;$ $u) y = 5^{\sin 2x};$ $\kappa) y = (\cos x)^x.$
19.	$a) y = x^7 - \frac{x^6}{6} + \sqrt[6]{x};$ $\bar{o}) y = \sqrt{x} - \operatorname{arctg} \sqrt{x};$ $\wp) y = 3x \cdot \sin^3 x - \cos^3 x;$ $\varepsilon) y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1};$ $\partial) y = \ln^2 \sin 3x;$	$e) y = 2 \ln \operatorname{ctg} \frac{x}{2};$ $\varkappa) y = \frac{x}{6(x+1)};$ $3) y = \arcsin(e^{-4x});$ $u) y = 5^{1+x} + 3^{\cos 4x};$ $\kappa) y = (3x)^{e^x}.$

20.	$a) y = x^5 - \frac{1}{x^5} + \sqrt[5]{x};$ $б) y = \sqrt{x+2\sqrt{x}};$ $в) y = \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}} + 5^{\cos 4x};$ $г) y = \arctg(7\sin 3x);$ $д) y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1};$	$e) y = \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{2+6x}{x^3};$ $ж) y = \ln^2 \arctg x;$ $з) y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \ln\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right);$ $и) y = (\sqrt{x})^{\cos x};$ $к) y = \frac{x^2}{1+x^3}.$
21.	$a) y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} + 3;$ $б) y = \sqrt{2x - \sin 2x};$ $в) y = \sin^4 x + x^2 \cdot \cos^2 x;$ $г) y = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}};$ $д) y = 5^{\cos x^2};$	$e) y = e^{-x^2};$ $ж) y = 3 \operatorname{tg}^6 x + 7;$ $з) y = 4x \cdot \arctg(2x+9);$ $и) y = \frac{x^2}{(x-3)^2};$ $к) y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\arccos x}.$
22.	$a) y = 5x^{10} + \frac{5}{x^{10}} + \sqrt[10]{5x};$ $б) y = \sqrt{1+\cos^2 x^2};$ $в) y = x^2 \cdot \sqrt{1-x^2};$ $г) y = \arctg \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}};$ $д) y = 5^{\sin x^3};$	$e) y = \sin x \cdot \cos(7x+5);$ $ж) y = (e^{\cos x} + 3)^2;$ $з) y = \ln \sin(3x+5);$ $и) y = \frac{x^3}{x^2-1};$ $к) y = (x^3)^{\ln x}.$
23.	$a) y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^2} + 1;$ $б) y = \frac{1+\sin x}{1-\sin x};$ $в) y = \sqrt[3]{x} \cdot \arctg x;$ $г) y = (x^2 - x^3) \cdot e^{-x};$ $д) y = 15^{\ln^2 x};$	$e) y = \operatorname{tg}(x^2 + \cos x);$ $ж) y = \sqrt{\frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}};$ $з) y = \frac{1}{2}(\sqrt{1-x^2} + \arcsin x);$ $и) y = 3x^3 + \ln^3 x;$ $к) y = (\sqrt{x})^{\arctg x}.$
24.	$a) y = 3x^5 - \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^4} + 2;$	$e) y = \sqrt{1+x^2} + 5^{\cos 3x};$

	$б) y = tg x + \frac{2}{3} tg^3 x + \frac{1}{5} tg^5 x;$ $в) y = x^3 \cdot (x - 5 \cos x)^2$ $г) y = \frac{x + \sqrt{x}}{x - 2\sqrt[3]{x}};$ $д) y = 5^{\sin 3x};$	$ж) y = \ln^2 \sin x;$ $з) y = \arccos \frac{9 - x^2}{9 + x^2};$ $и) y = (1 + 9x) \cdot e^{-x^2};$ $к) y = (1 + x)^{\cos x}.$
25.	$а) y = 4x^2 - \frac{3}{2x^2} + \sqrt[3]{x};$ $б) y = \frac{2 + e^{3x}}{9 - e^{-4x}} \cdot x^2;$ $в) y = \arctg(x^2 + e^{3x});$ $г) y = \ln tg(5x + 1);$ $д) y = 3^{\ln 3x};$	$е) y = \ln(2x - 3);$ $ж) y = \frac{3 + \sin 4x}{8 - \cos 3x};$ $з) y = (2x^3 + 5)^4 \cdot x^3;$ $и) y = \sin 5x + \cos 3x^3;$ $к) y = x^{\frac{2}{x}}.$
26.	$а) y = 5x - \frac{1}{x^2} - \sqrt[5]{x};$ $б) y = \arctg \frac{1+x}{1-x};$ $в) y = \sqrt[3]{(4+3x)^2};$ $г) y = x^2 \cdot ctg 2x;$ $д) y = \cos^2 5x + 7x;$	$е) y = \cos^2 x - 2 \ln \cos x;$ $ж) y = \frac{1}{(1 + \sin 4x)^3};$ $з) y = \arcsin^2 \frac{1}{x};$ $и) y = 7^{-x^2};$ $к) y = (\cos x)^{\sin x}.$
27.	$а) y = \sqrt[4]{x^3} + \frac{5}{x^2} - \frac{3}{x^3} + 2;$ $б) y = tg(x^2 + 3);$ $в) y = x^{\cos^2 x};$ $г) y = \ln tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right);$ $д) y = x^2 \cdot \arcsin(9x + 2);$	$е) y = \frac{1 + 2 \cos 3x}{1 - \cos 2x};$ $ж) y = (0,9)^{\sqrt{x}};$ $з) y = \sin^3 \frac{x}{3} + \cos x;$ $и) y = 0,7^{(x^5)};$ $к) y = x\sqrt{x} \cdot (3 \ln x - 2).$
28.	$а) y = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} + \sqrt[3]{x};$ $б) y = \frac{2}{2x^2} + 2;$ $в) y = (x + 5)^7 \cdot \sin 3x;$	$е) y = \arctg \sqrt{4x^2 - 1};$ $ж) y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}};$ $з) y = (x+1) \cdot \arccos(x^2 + 1);$

	$з) y = \sin^3 x + \cos^3 x;$ $д) y = 52^{\operatorname{ctg} x};$	$и) y = \ln \frac{x^5}{x^5 - 2};$ $к) y = (\operatorname{tg} x)^x.$
29.	$а) y = 12x^7 - \frac{12}{x^7} + \sqrt[7]{x^2};$ $б) y = x^2 \cdot \arccos \frac{x}{2} - 4x;$ $в) y = \frac{x^5}{x^4 + 2};$ $з) y = \arctg^2 x + 6x^2;$ $д) y = 5^{\frac{1-x^2}{1+x^2}} + 7^{\cos 4x};$	$е) y = e^{\operatorname{ctg} 3x};$ $ж) y = \sqrt[4]{1 + \cos x^4};$ $з) y = \frac{4 + \cos 3x}{\sin(5x + 3)};$ $и) y = (x^3 + x^2) \cdot e^{-x};$ $к) y = x^{\arcsin^2 x}.$
30.	$а) y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + 3;$ $б) y = 3x \cdot \sin 5x + 8;$ $в) y = (3 + \sin x)^2 \cdot x;$ $з) y = \frac{3x + 2}{x^2 - 2x + 5};$ $д) y = \arcsin \sqrt[3]{x};$	$е) y = \left(\frac{\sin x}{1 + \cos 2x} \right)^2;$ $ж) y = x \cdot (\cos \ln x + \sin \ln x);$ $з) y = 2(e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{3}});$ $и) y = 0,92^{(x^3)};$ $к) y = (\sqrt{x})^{\operatorname{tg}^2 x}.$

Завдання 2. Знайти рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$, яка проходить паралельно прямій $y = kx + b$. Зробити креслення.

№ вар.	$y = f(x)$	$y = kx + b$	№ вар.	$y = f(x)$	$y = kx + b$
1.	$y = x^2 - 6x + 8,$	$y = 6x + 1$	2.	$y = -x^2 - 2x + 3,$	$y = -2x - 2$
3.	$y = x^2 - 6x + 8,$	$y = 2x + 3$	4.	$y = x^2 - 2x - 3,$	$y = -4x + 2$
5.	$y = x^2 - 2x - 3,$	$y = 6x + 3$	6.	$y = x^2 + 2x - 3,$	$y = 2x - 2$
7.	$y = x^2 + 8x - 9,$	$y = 2x + 1$	8.	$y = x^2 - 4x + 3,$	$y = 2x + 4$
9.	$y = x^2 - 5x + 4,$	$y = -x - 2$	10.	$y = x^2 + 2x - 3,$	$y = 4x - 1$
11.	$y = -x^2 - 2x + 3,$	$y = -6x + 4$	12.	$y = x^2 + 8x - 9,$	$y = 4x$
13.	$y = x^2 - 5x + 4,$	$y = x + 3$	14.	$y = x^2 - 2x - 3,$	$y = 4x - 1$
15.	$y = x^2 - 6x + 8,$	$y = -4x + 2$	16.	$y = -x^2 - 2x + 3,$	$y = 4x - 3$

17.	$y = x^2 + x,$	$y = x - 3$	18.	$y = -x^2 - 2x + 3,$	$y = 2x + 1$
19.	$y = x^2 + 8x - 9,$	$y = 6x$	20.	$y = x^2 - 8x - 9,$	$y = -6x$
21.	$y = -x^2 + 4x,$	$y = 2x$	22.	$y = x^2 - 5x + 4,$	$y = -3x - 1$
23.	$y = x^2 + 8x - 9,$	$y = -2x + 1$	24.	$y = x^2 - 4x + 3,$	$y = 4x + 4$
25.	$y = x^2 - 2x - 3,$	$y = 2x + 2$	26.	$y = x^2 + 2x - 3,$	$y = -4x + 2$
27.	$y = x^2 - 6x + 8,$	$y = 4x + 1$	28.	$y = x^2 - 5x + 4,$	$y = 3x + 1$
29.	$y = x^2 - 4x + 3,$	$y = 6x - 6$	30.	$y = x^2 - 4x + 3,$	$y = -4x - 4$

Завдання 3. Для функцій, заданих параметрично, знайти першу та другу похідні.

1. $\begin{cases} x = \arcsin(t^2 - 1), \\ y = \arccos t^2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = t - \sin t. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = \arcsin \sqrt{t}, \\ y = \sqrt{1-t}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = \arccos \sqrt{t}, \\ y = \sqrt{t^2 - t}. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = \arccos \sqrt{t}, \\ y = \sqrt{t^2 - 1}. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 4 \sin^2 t. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = \cos 3t, \\ y = t - \sin 3t. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = 2t - t^3, \\ y = 2t^2. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t + \ln t. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = t + \cos t, \\ y = t - \sin t. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = t^4 + 1, \\ y = t^2 + t. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = \ln 2t, \\ y = t + t^2. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = t + \ln \cos 2t, \\ y = t - \ln \sin 2t. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 + \cos t. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = e^t(t - \cos t), \\ y = e^t(\sin t - 1). \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = e^t \cos 2t, \\ y = e^t \sin 2t. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = t - \sin 2t. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = t^5 - t^3 + 1, \\ y = 4t^4 + t. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = \sin 3t, \\ y = \cos 3t. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = e^t(t+1), \\ y = e^t(t-1). \end{cases}$

$$9. \begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x = t^2 - \sin 2t, \\ y = t - \cos 2t. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} x = t^3 + 8t, \\ y = t^4 + 2t. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x = \ln \operatorname{ctg} t, \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x = 2t - \sin 2t, \\ y = 1 + \cos 2t. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} x = 5\sin t - \sin 5t, \\ y = 5\cos t + \cos 5t. \end{cases}$$

Завдання 4. Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ для функцій, заданих неявно.

1.	$5x^2 + 3xy - 2y^2 + 2 = 0$	16	$x^3 + x^2y + y^2 - 13 = 0$
2.	$x^3 - 2x^2 + y^2 = 0$	17	$x^3 + 5xy + y^3 - 7 = 0$
3.	$x^2 + xy + y^2 = 7$	18	$x^2 + 5xy + y^2 - 2x + y - 6 = 0$
4.	$2x^3 - xy + y - 2 = 0$	19	$3x^2 - xy + y^3 - x = 0$
5.	$x^3 + y^3 - 3xy + 1 = 0$	20	$x^6 + y^6 - 2xy = 0$
6.	$3x^2 - xy + y - 3 = 0$	21	$x^2 + x^2y - y^2 - y = 0$
7.	$x^2 + 2y^2 + 6x - 4y - 13 = 0$	22	$x^4 - 6x^2y^2 + 9y^2 - 5x^2 + 15y^2 + 4 = 0$
8.	$3x^2 - 5y^2 - 6x - 20y + 25 = 0$	23	$7x^2 + xy - y^3 + 3 = 0$
9.	$4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 3 = 0$	24	$x^2y^2 + xy + x^2 - 7 = 0$
10.	$x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0$	25	$2x^5 + y^5 - 2xy + 26 = 0$
11.	$2x^2 - 9y^2 + 4x + 18y + 11 = 0$	26	$x^5 + y^5 - 2xy = 0$
12.	$x^3 - xy + y + 7 = 0$	27	$3x^2 - xy + y^2 + x - 34 = 0$
13.	$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 19 = 0$	28	$x^2 + 2xy^2 + 3y^4 - 6 = 0$
14.	$x^4 - y^2 - y - 1 = 0$	29	$x^2 - x^2y + y^2 = 13$
15.	$x^3 + 2xy^2 + y + 11 = 0$	30	$x^2y^2 - 4y^3 - x = 4$

Завдання 5. Обчислити границі, використовуючи правило Лопіталя.

1.	a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x},$	б) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^2 - 3x + 2} \right).$
2.	a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^3},$	б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x}.$
3.	a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x},$	б) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{2}{x}.$
4.	a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{1 - 4^x},$	б) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} \right).$
5.	a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\arcsin x},$	б) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} x \right).$
6.	a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 5^x}{2^x - 1},$	б) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x.$
7.	a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}},$	б) $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \cdot \operatorname{ctg}(\pi(x-1)).$
8.	a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x},$	б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-2x}.$
9.	a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 4x}{\sin 4x},$	б) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x}}.$
10.	a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{\sqrt{x}-1},$	б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-\frac{x}{2}}.$
11.	a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{\sin 2x},$	б) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln^2 x.$
12.	a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2},$	б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x}.$
13.	a) $\lim_{x \rightarrow 100} \frac{\sqrt{x} - 10}{\sin(x-100)},$	б) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right).$
14.	a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin 2x},$	б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \right).$
15.	a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}},$	б) $\lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x}}.$

16.	a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin x}{\ln \sin 2x},$	b) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2 - x - 6} \right).$
17.	a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\sin 3x},$	b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x}.$
18.	a) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x} - 2},$	b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-3x}.$
19.	a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{5}}{\sqrt{x} - \sqrt{5}},$	b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}.$
20.	a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{3^x - 4^x},$	b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right).$
21.	a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln \cos 4x},$	b) $\lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - 1) \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$
22.	a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\operatorname{arctg} x},$	b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} - \operatorname{ctg} \frac{x}{3}.$
23.	a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos x},$	b) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{5}{x}.$
24.	a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sin(x-1)},$	b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right).$
25.	a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{5^x - 4^x},$	b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right).$
26.	a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\ln \sqrt{x}},$	b) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{4}{x^2 - 4x + 3} \right).$
27.	a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2},$	b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1}{\sin x}.$
28.	a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{\sqrt{x-2}},$	b) $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \ln(x-1).$
29.	a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)},$	b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x.$
30.	a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)},$	b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x} \right).$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1,2 – М.: Высш. шк., 1980. – 320 с.
2. Вища математика: Підручник: У 2 кн. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К.: Либідь, 2003. – Кн. 1. Основні розділи / Г.Й. Призва, В.В. Плахотник, Л.Д. Гординський та ін.; за ред. Г.Л. Кулініча. – 400 с.
3. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1966. – 269 с.
4. Берман Г.Е. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
5. Методичні вказівки та індивідуальні завдання з курсу «Вища математика» за темою «Диференціальне числення функцій однієї змінної» для студентів I курсу денної форми навчання / Укл.: О.А. Радуль, Т.Ю. Ускова, Д.Г. Зеленцов. – Дніпропетровськ: ДВНЗ УДХТУ, 2010. – 28 с.

