МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
“УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ХІМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ”

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ДИСЦИПЛІНИ “ВИЩА МАТЕМАТИКА”
ЗА РОЗДІЛОМ “ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ В ЗАДАЧАХ ГЕОМЕТРІЇ”
ДЛЯ СТУДЕНТІВ І КУРСУ ВСІХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ
ДЕННОЇ ТА ЗАОЧНОЇ ФОРМ НАВЧАННЯ

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики.
Протокол № 3 від 17.10.2016р.

Дніпро ДВНЗ УДХТУ 2017

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни “Вища математика” за розділом “Визначений інтеграл та його застосування в задачах геометрії” для студентів I курсу всіх спеціальностей денної та заочної форм навчання/ Укл.: Т.О. Гранкіна, Т.С. Науменко, А.В. Поліщук – Дніпро: ДВНЗ УДХТУ, 2017. – 47 с.

Укладачі: Т.О.Гранкіна
Т.С.Науменко
А.В.Поліщук, канд. техн. наук

Відповідальний за випуск В.І. Олевський, д-р техн. наук

Навчальне видання

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни “Вища математика” за розділом “Визначений інтеграл та його застосування в задачах геометрії” для студентів I курсу всіх спеціальностей денної та заочної форм навчання

Укладачі: ГРАНКІНА Тетяна Олександрівна
НАУМЕНКО Тетяна Станіславівна
ПОЛІЩУК Алла Вікторівна

Технічний редактор Т.М. Кіжло
Комп’ютерна верстка Т.М. Кіжло

Підписано до друку 19.05.17. Формат 60×84/16. Папір ксерокс. Друк різограф.
Умов. друк. арк. 2,14. Обл.-вид. арк. 2,19. Тираж 100 прим. Зам. № 587
Свідоцтво ДК № 5026 від 16.12.2015

ДВНЗ УДХТУ, просп. Гагаріна, 8, м. Дніпро, 49005

Редакційно-видавничий відділ

ЗМІСТ

ВСТУП

Розділ «Визначений інтеграл та його застосування в задачах геометрії» входить до програми курсу «Вища математика» всіх спеціальностей денної та заочної форм навчання.

Наступні методичні вказівки спрямовані, передусім, на практичну підготовку студента і розроблені у відповідності з навчальним планом.

Кожний розділ містить короткий довідковий матеріал, що є необхідним для розв'язання практичних завдань. Але слід мати на увазі, що це не є конспект лекцій. Тому приступати до практичних занять треба після проробки лекційного матеріалу.

В кожному розділі наведені приклади розв'язання типових задач.

Останній розділ містить варіанти індивідуальних завдань з даного розділу. Є також список підручників, що рекомендовані для використання в учбовому процесі.

РОЗДІЛ 1
Поняття інтегральної суми. Означення визначеного інтеграла

Якщо функція *f(x)* визначена на відрізку $\left[a;b\right]$ і $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ – довільне розбиття цього відрізку на n частин, то інтегральною сумою для функції *f(x)* на $\left[a;b\right]$ називається сума вигляду:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(S_k)\Delta x_k \ ,$$

де $x_{k-1} \le \varsigma_k \le x_k$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, ..., n$.

Якщо визначена на відрізку $\left[a;b\right]$ функція *f(x)* неперервна, то існує скінченна границя послідовності інтегральних сум S_n за умови, що найбільша з різниць Δx_k прямує до нуля. Причому ця границя не залежить ні від способу розбиття відрізку $\left[a;b\right]$на відрізки$\left[x_{k-1};x_k\right]$, ні від вибору точок ς_k на цих відрізках. Вона називається визначеним інтегралом від функції *f(x)* в межах від a до b і позначається символом $\int_a^в f(x)dx$, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_x)\Delta x_k$$

РОЗДІЛ 2
Основні властивості визначеного інтеграла

1) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^b f(y)dy$ (визначений інтеграл не залежить від змінної інтегрування);

2) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;

3) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$;

4) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, де c – довільне дійсне число і *f(x)* неперервна на $[a;c]$ і $[c;b]$;

5) $\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx$, де *c* – стала;

6) $\int\limits_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx$;

7) $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int\limits_0^a f(x)dx, якщо f(-x) = f(x), \\ 0, якщо f(-x) = -f(x) \end{cases}$

РОЗДІЛ 3
Формула Ньютона – Лейбніца

Якщо *F(x)* – одна із первісних неперервної на $[a;b]$ функції *f(x)*, то справедлива наступна формула Ньютона – Лейбніца:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Приклад 1. Обчислити $\int\limits_{-1}^{2} x^2 dx.$

Розв'язання. Оскільки $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c,$ то

$$\int\limits_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{2} = \frac{1}{3}\cdot 2^3 - \frac{1}{3}\cdot(-1)^3 = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3.$$

Приклад 2. Обчислити $\int\limits_{-5}^{5}\left(\frac{3x^5\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}+|x|\right)dx.$

Розв'язання.

$$I=\int\limits_{-5}^{5}\left(\frac{3x^5\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}+|x|\right)dx=\int\limits_{-5}^{5}\frac{3x^5\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}dx+\int\limits_{-5}^{5}|x|dx.$$

Функція $f(x)=\frac{3x^5\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}-$непарна (f (-x) = - f (x)), а функція f(x) = $|x|$ - парна ($|-x|=|x|=x$ для x>0)

тому (згідно з властивістю 7):

$$\int\limits_{-5}^{5}\frac{3x^5\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}dx=0;\quad \int\limits_{-5}^{5}|x|dx=2\int\limits_{0}^{5}|x|dx=2\int\limits_{0}^{5}xdx.$$

$$I=0+2\int\limits_{0}^{5}xdx=2\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^5=5^2-0^2=25.$$

РОЗДІЛ 4
Заміна змінної у визначеному інтегралі

Якщо функція *f(x)* неперервна на відрізку $[a;b]$, а функція $x=\varphi(t)$ неперервна диференційована на відрізку $[a;b]$, причому $\varphi(t)\in[a;b]$, якщо $t\in[t_1,t_2]$, а також $a=\varphi(t_1)$ і $в=\varphi(t_2)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (4.1)$$

Дуже часто заміна змінної у визначеному інтегралі здійснюється не за формулою $x=\varphi(t)$, а за формулою $\psi(x)=t$.

Тоді межі t_1 і t_2 визначаються за формулами $t_1=\psi(a)$ і $t_2=\psi(b)$. Функція $\psi(x)$ на $[a;b]$ повинна бути неперервною, монотонною і мати похідну, відмінну від нуля.

Приклад 3. Обчислити $\int\limits_0^8\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+1}$.

Розв'язання. В підінтегральному виразі необхідно позбутися ірраціональності. Для цього достатньо застосувати підстановку і виразити підінтегральний вираз через нову змінну, а також знайти межі інтегрування нової змінної. Отже,

$$x=t^3,\quad dx=\left(t^3\right)'dt=3t^2dt,\quad t=\sqrt[3]{x},$$
$$t_1=\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{0}=0;\quad t_2=\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{8}=2.$$

Тоді $$\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+1} = \int_0^2 \frac{3t^2dt}{t+1} = 3\int_0^2 \frac{(t^2-1)+1}{t+1}dt = 3\int_0^2 \left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= 3\int_0^2 (t-1)dt + 3\int_0^2 \frac{dt}{t+1} = 3\frac{(t-1)^2}{2}\Bigg|_0^2 + 3\ln|t+1|\Big\|_0^2 = \frac{3}{2}(1-1) + 3(\ln 3 - \ln 1) = 3\ln 3.$$

Приклад 4. Обчислити $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$.

Розв'язання. Для обчислення інтегралу застосуємо універсальну тригонометричну підстановку $t = tg\frac{x}{2}$ (на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ функція $tg\frac{x}{2}$ неперервна, монотонна і має похідну, відміну від нуля).

Із $tg\frac{x}{2} = t$ виходить: $x = 2arctgt, dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Визначаємо межі нової змінної інтегрування:

$t_1 = tg\frac{a}{2} = tg0 = 0; t_2 = tg\frac{b}{2} = tg\frac{\pi}{4} = 1.$

Маємо: $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x} = \int_0^1 \frac{2dt}{(1+t^2)\left(3+2\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = 2\int_0^1 \frac{dt}{5+t^2} = \frac{2}{\sqrt{5}} arctg\frac{t}{\sqrt{5}}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\left(actg\frac{1}{\sqrt{5}} - arctg0\right) = \frac{2}{\sqrt{5}} arctg\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Приклад 5. Обчислити $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx.$

Розв'язання. Згадаємо, що інколи знаходження інтегралів вигляду $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ здійснюється за допомогою підстановки $x = a\sin t$. У нашому випадку $a^2 = 4$, тому застосуємо підстановку $x = 2\sin t$. Тоді $dx = 2\cos tdt, 4 - x^2 = 4 - 4\sin^2 t = 4\cos^2 t$. Використавши рівність $x = 2\sin t$, знаходимо межі інтегрування нової змінної t, а саме: із $x = 0$ виходить, що $2\sin t = 0$, тобто $t_1 = 0$, а із $x = 2$ виходить, що $2\sin t = 2$, тобто $\sin t = 1$ і $t_2 = \frac{\pi}{2}$. Дістаємо

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx = \int_0^{\pi/2} (2\sin t)^2 \cdot \sqrt{4\cos^2 t} \cdot 2\cos tdt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} 16\sin^2 t \cdot \cos^2 tdt = \int_0^{\pi/2} 4(2\sin t \cdot \cos t)^2 dt =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = 4\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1-\cos 4t)dt =$$

$$2\int_0^{\pi/2} dt - 2\int_0^{\pi/2} \cos 4t dt = 2t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\sin 4t\Big|_0^{\pi/2} = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$

РОЗДІЛ 5
Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Припустимо, що $u = u(x), v = v(x)$ і їх похідні $u'(x)$ і $v'(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$. Для інтегрування виразу udv справедлива формула інтегрування частинами, а саме:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu \qquad (5.1)$$

Приклад 6. Обчислити $\int_0^1 (x+2)^3 \ln(x+2)dx.$

Розв'язання. Інтеграли такого вигляду обчислюються за допомогою формули (5.1). Приспускаючи, що $\ln(x+2) = u, (x+2)^3 dx = dv$,

маємо $du = \frac{1}{x+2}dx, v = \int (x+2)^3 dx = \frac{1}{4}(x+2)^4.$

$$\int_0^1 \ln(x+2)\cdot(x+2)^3 dx = \frac{1}{4}(x+2)^4 \cdot \ln(x+2)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{4}(x+2)^4 \cdot \frac{dx}{(x+2)} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 3^4 \cdot \ln 3 - \frac{1}{4}\cdot 2^4 \ln 2 - \frac{1}{4}\int_0^1 (x+2)^3 dx = = \frac{81}{4}\ln 3 - 4\ln 2 - \frac{(x+2)^4}{16}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{81}{4}\ln 3 - 4\ln 2 - \frac{3^4}{16} + \frac{2^4}{16} = \frac{81}{4}\ln 3 - 4\ln 2 - 4\frac{1}{16}.$$

Приклад 7. Обчислити $\int_{-3}^0 (6-5x)e^{-\frac{x}{3}}dx.$

Розв'язання. Застосуємо формулу (5.1), припускаючи, що $u = 6-5x, dv = e^{-\frac{x}{3}}dx$,

звідки $du = -5dx, v = \int e^{-\frac{x}{3}}dx = -3e^{-\frac{x}{3}}.$

Тоді: $\int_{-3}^0 (6-5x)e^{-\frac{x}{3}}dx = (6-5x)\cdot\left(-3e^{-\frac{x}{3}}\right)\Bigg|_{-3}^0 - \int_{-3}^0 \left(-3e^{-\frac{x}{3}}\right)(-5)dx =$

$$=-18+63e+45e^{-\frac{x}{3}}\Bigg|_{-3}^{0}=63e-18+45-45e=9(2e+3).$$

РОЗДІЛ 6
Невласні інтеграли

6.1 Інтеграли з нескінченними межами (невласні інтеграли І роду)

Якщо функція $f(x)$ неперервна в будь-якій точці на півпрямій $x \geq 0$, то за означенням

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx \tag{6.1}$$

Якщо існує скінчена границя в правій частині, то невласний інтеграл $\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ називається збіжним, якщо ця границя не існує, то інтеграл називається розбіжним. Аналогічно визначається інтеграл $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$. А інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx.$$

6.2 Інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли ІІ роду)

Якщо функція $f(x)$ неперервна для $a \leq x < в$ і $\lim\limits_{x\to b} f(x)=\infty$, то за означенням

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx \quad , (\varepsilon > 0) \tag{6.2}$$

Якщо існує скінчена границя в правій частині, то невласний інтеграл $\int_{a}^{b} f(x)dx$ називається збіжним, в протилежному випадку – розбіжним.

Аналогічно визначається інтеграл у випадку, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$. У випадку, коли $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$ і $c\in(a;b)$, а на множині $[a;c)\cup(c;b]$ $f(x)$ – неперервна, то

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{a}^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx.$$

Приклад 8. Обчислити або встановити розбіжність інтегралів:

а) $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$, б) $\int\limits_1^{e}\frac{dx}{x\ln^4 x}$.

Розв'язання.

а) за означенням

$$\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\lim_{в\to+\infty}\int\limits_2^{b}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\lim_{в\to+\infty}I(в).$$

Позбудемось ірраціональності в підінтегральному виразі , застосовуючи підстановку $t=\sqrt{x^2-1}$.

Тоді:

$$x=\sqrt{t^2+1},\quad dx=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt,\quad t_1=\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3},\quad t_2=\sqrt{b^2-1}$$

Одержимо: $I(b)=\int\limits_2^{b}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{b^2-1}}\frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}\cdot t\sqrt{t^2+1}}=$

$$=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{b^2-1}}\frac{dt}{t^2+1}=\operatorname{arctg}t\Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{b^2-1}}=\operatorname{arctg}\sqrt{b^2-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{3}.$$

Тоді, пам'ятаючи, що $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}$, отримаємо

$$\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\lim_{b\to\infty}I(b)=\lim_{в\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{b^2-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}.$$

Інтеграл збіжний.

б) Підінтегральна функція $\frac{1}{x\ln^4 x}$ має розрив у точці $x=1(\ln 1=0)$, тобто

$\int\limits_1^{e}\frac{dx}{x\ln^4 x}$ є невласний інтеграл II роду.

За означенням

$$\int\limits_1^{e}\frac{dx}{x\ln^4 x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{1+\varepsilon}^{e}\frac{dx}{x\ln^4 x}=\lim_{\varepsilon\to 0}I(\varepsilon),$$

Інтеграл $I(\varepsilon)=\int\limits_{1+\varepsilon}^{e}\frac{dx}{x\ln^4 x}$ знаходимо, використовуючи підстановку $\ln x=t$, тоді:

$$d(\ln x)=\frac{dx}{x}=dt,\quad t_1=\ln(1+\varepsilon,),\quad t_2=\ln e=1.$$

$$I(\varepsilon)=\int\limits_{\ln(1+\varepsilon)}^{1}\frac{dt}{t^4}=\int\limits_{\ln(1+\varepsilon)}^{1}t^{-4}dt=-\frac{1}{3t^3}\Bigg|_{\ln(1+\varepsilon)}^{1}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3\ln^3(1+\varepsilon)}.$$

Так, як $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln(1+\varepsilon)=0$, то

$$\int\limits_1^e \frac{dx}{x\ln^4 x}=\lim_{\varepsilon\to 0} I(\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3\ln^3(1+\varepsilon)}\right)=\infty$$

Отже, інтеграл є розбіжним.

РОЗДІЛ 7
Обчислення площ плоских фігур

а) Площа криволінійної трапеції $AaвB$ (рис.1) (фігури обмеженої зверху (по y) графіком неперервної функції $V=f(x)$, зліва і справа (по x) відповідно прямими $x=a$ і $x=в$, знизу (по y) – віссю ox, що має рівняння $y=0$), обчислюється за формулою

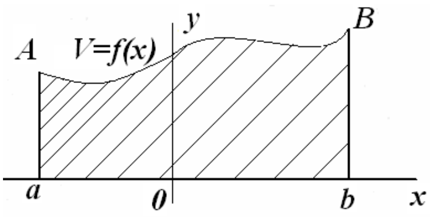

Рис.1

$$S=\int\limits_a^b f(x)dx \tag{7.1}$$

б) Якщо крива $y=f(x)$ задана параметрично рівняннями $x=x(t), y=y(t)$, то

$$S=\int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt \tag{7.2}$$

Межі інтегрування t_1 і t_2 визначаються з рівнянь $a=x(t_1)$, $b=x(t_2)$. Припускаємо, що функція $y(t)$ неперервна на $[t_1;t_2]$, а $x(t)$ неперервно диференційована (див. розділ 4).

в) Площа криволінійної фігури $A_1A_2B_2B_1$ (рис. 2), обмеженої знизу і зверху (по осі ОУ) відповідно кривими:

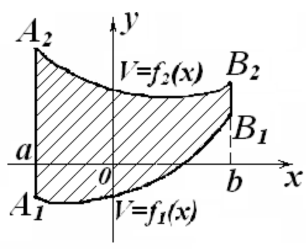

Рис.2

$V=f_2(x)$ і $V=f_1(x)$ $\left(f_2(x)\geq f_1(x)\right)$ для будь-якого $(x\in[a;b])$, зліва і справа (по X) прямими $x=a$ і $x=в$, визначається за формулою

$$S=\int\limits_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx \tag{7.3}$$

Якщо на рис. 1 і 2 в позначеннях поміняти місцями x і y, то формула площі фігури набуде вигляду:

$$S=\int\limits_a^b\left[f_2(y)-f_1(y)\right]dy \tag{7.4}$$

г) Площа криволінійного сектора, обмеженого графіком неперервної функції $\rho=\rho(\varphi)$ і двома променями $\varphi=\alpha$ і $\varphi=\beta$, де ρ і φ – полярні координати, обчислюється за формулою

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi \tag{7.5}$$

Приклад 9. Знайти площу фігури, обмеженої лініями

$$y=x-x^2, y=1-x^2, x=-\frac{1}{2}.$$

Розв'язання. Лінії $y=x-x^2$ і $y=1-x^2$ – параболи. Для побудови фігури на площині XOY спочатку знайдемо точки перетину ліній:

1). $\begin{cases} y=x-x^2 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$; 2). $\begin{cases} y=x-x^2 \\ y=1-x^2 \end{cases}$ 3). $\begin{cases} y=1-x^2 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$;

$A_1\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{4}\right)$; $B(1;0)$; $A_2\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$

Фігура зображена на рис. 3.
Для обчислювання площі застосуємо формулу (7.3):

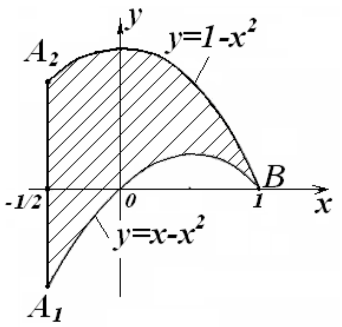

Рис.3

$$S=\int_a^b[f_1(x)-f_2(x)]dx$$

У цьому випадку $a=-\frac{1}{2}, в=1$,

$$f_1(x)=1-x^2, f_2(x)=x-x^2.$$

$$S=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left[\left(1-x^2\right)-\left(x-x^2\right)\right]dx=$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(1-x)dx=\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{1}=\frac{9}{8}(\text{кв.од.}).$$

Приклад 10. Знайти площу фігури, обмеженої параболою $(y-2)^2=(x-1)$, прямою $2y-x-4=0$ і віссю $OX(y=0)$ (рис. 4)

Розв'язання. Знаходимо точки перетину ліній:

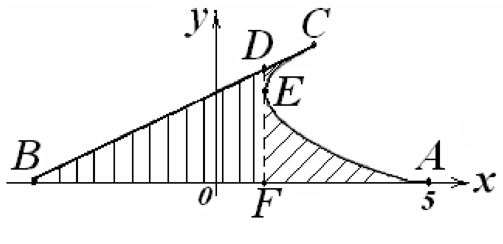

Рис.4

1). $\begin{cases}(y-2)^2 = x-1 \\ y=0\end{cases}$; $\quad A(5;0)$

2). $\begin{cases}2y-x-4=0 \\ y=0\end{cases}$; $\quad B(-4;0)$

3). $\begin{cases}(y-2)^2 = x-1 \\ 2y-x-4=0\end{cases}$; $\quad C(2;3)$

Пряма $2y-x-4=0$ - дотична до параболи $(y-2)^2=(x-1)$, із рис. 4 ясно, що формулу (7.1) або (7.3) застосувати неможна. Площу всієї фігури потрібно шукати в цьому випадку як суму площ фігур BDF, EDC і AFE. Зручно використати формулу (7.4):

$$S=\int_a^в [f_1(y)-f_2(y)]dy.$$

Розв'яжемо рівняння ліній, які обмежують фігуру, відносно змінної x (y – незалежна змінна): $x=y^2-4y-5$ (для точок параболи) і $x=2y-4$ (для точок прямої). Із рис. 4 випливає, що $a=0, b=3,$ $f_1(x)=y^2-4y+5,$ $f_2(y)=2y-4.$

Отже, $S=\int_0^3 [(y^2-4y+5)-(2y-4)]dy=$

$$=\int_0^3 (y^2-6y+9)dy=\int_0^3 (y-3)^2 dy=\frac{1}{3}(y-3)^3\Big|_0^3=9 \text{ (кв.од.)}.$$

Приклад 11. Обчислити площу петлі кривої $x=t^2, y=\frac{1}{3}t(t^2-3)$.

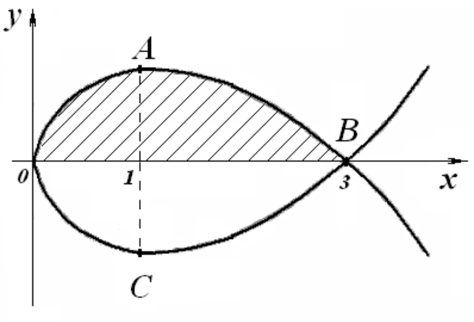

Рис.5

Розв'язання. Знайдемо точки перетину кривої з координатними осями.

Маємо $x=0$, якщо $, t=0, y=0$, якщо $t=0$ і $t=\pm\sqrt{3}.$ Параметру $t=0$ відповідає точка O(0,0), $t=\pm\sqrt{3}.$ - точка $B(3;0)$. $t=-1$ - точка $A\left(1;\frac{2}{3}\right)$, $t=1$ - точка $C\left(1;-\frac{2}{3}\right)$.

Фігура складається з двох симетричних відносно осі *ох* частин S_1(заштрихована на рисунку) і S_2 (рис.5). Верхня частина петлі відповідає зміні t від 0 до $-\sqrt{3}$. Площу S_1 обчислюємо за формулою

$$S_1 = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt = \int_0^{-\sqrt{3}} \frac{1}{3}t\left(t^2-3\right)\cdot 2tdt =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{-\sqrt{3}}\left(t^4-3t^2\right)dt = \frac{2}{3}\left(\frac{t^5}{5}-t^3\right)\Bigg|_0^{-\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\left(\frac{-9\sqrt{3}}{5}+3\sqrt{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{5}$$

Площа всієї фігури $S = 2S_1 = \frac{8\sqrt{3}}{5}$ (кв.од.).

Приклад 12. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою

$$\rho = a\cos 3\varphi$$

Розв'язання. Фігура складається з шести симетричних частин (рис.6). Заштрихована частина S_1 обмежена променями $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{6}$ і кривою $\rho(\varphi) = a\cos 3\varphi$. Тому

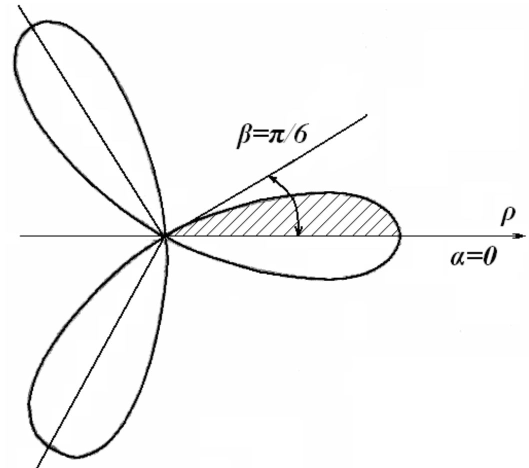

Рис.6

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(a\cos 3\phi\right)^2 d\phi = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 6\phi}{2}d\phi =$$

$$= \frac{a^2}{4}\left(\phi + \frac{1}{6}\sin 6\phi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{6}+0\right) = \frac{\pi a^2}{24}$$

$$S = 6S_1 = \frac{\pi a^2}{4}\left(од.^2\right).$$

РОЗДІЛ 8
Довжина дуги кривої

а) Якщо гладка крива задана рівнянням $y = f(x)$ або $x = \varphi(y)$, то довжина L її дуги між точками $A(a;c)$ і $C(b;d)$ при $a < b$ (або $c < d$) обчислюється за формулою

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(y'_x\right)^2}dx, \quad \text{або} \quad L = \int_c^d \sqrt{1+\left(x'_y\right)^2}dy \tag{8.1}$$

б) Якщо крива задана параметрично рівнянням $x = x(t), y = y(t)$ $\left(t_1 \le t \le t_2\right)$, то

$$L = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(x'_t\right)^2+\left(y'_t\right)^2}dt \tag{8.2}$$

в) Якщо крива задана у полярних координатах рівняннями

$\rho=\rho(\varphi), \alpha\le\varphi\le\beta$, то

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi \tag{8.3}$$

Приклад 13. Обчислити довжину дуги кривої $y=1-\ln\cos x$ від точки $M(0;1)$ до точки $N\left(\frac{\pi}{4};\ln\left(\sqrt{2}e\right)\right)$.

Розв'язання. Використаємо першу із формул (8.1). Через те, що $y=1-\ln\cos x$, $y'=\frac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tg}x$, $0\le x\le\frac{\pi}{4}$, то

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}=-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}.$$

Приклад 14. Знайти довжину дуги кривої $x=a(t\sin t+\cos t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$, від точки $A(t=0)$ до точки $B(t=2\pi)$.

Розв'язання. Використаємо формулу (8.11): $L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}\,dt$

Маємо:

$$t_1=0, t_2=2\pi, x_t'=at\cos t, y_t'=at\sin t,$$

$$(x_t')^2+(y_t')^2=a^2t^2,$$

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2t^2}\,dt=a\int_0^{2\pi}t\,dt=\frac{at^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=2\pi^2a\,(\text{од.дов.}).$$

Приклад 15. Знайти довжину кривої $\rho=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

Розв'язання. Замкнена крива описується точкою при зміненні φ від 0 до 3π.
Маємо:

$$\alpha=0, \beta=3\pi, \rho=a\sin^3\frac{\varphi}{3},$$

$$\rho_\varphi'=a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}, \qquad \rho^2+(\rho')^2=a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}.$$

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\phi=\int_0^{3\pi}\sqrt{a^2\sin^4\frac{\phi}{3}}\,d\phi=a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\phi}{3}\,d\phi=$$

$$=a\int_0^{3\pi}\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2}{3}\phi\right)d\phi=\frac{a}{2}\left(\phi-\frac{3}{2}\sin\frac{2}{3}\phi\right)\Bigg|_0^{3\pi}=\frac{3}{2}\pi a(\text{од.дов.}).$$

РОЗДІЛ 9
Об'єм тіла обертання.

Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі ОХ криволінійної трапеції, обмеженої неперервною кривою $y = f(x)(a \le x \le в)$, обчислюється за формулою:

$$V_x = \pi\int_a^b y^2(x)dx \tag{9.1}$$

Об'єм тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції, обмеженої кривою $x = \varphi(y)(c \le y \le d)$, навколо осі ОУ, обчислюється за формулою:

$$V_y = \pi\int_c^d x^2(y)dy \tag{9.2}$$

Приклад 16. Обчислити об'єм тіл, утворених обертанням навколо осей ОХ і ОУ сегмента АОВ параболи $y^2 = 2px$, відтятого хордою $x = \frac{p}{2}$.

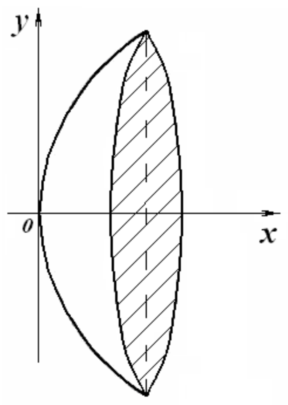

Рис.7

Розв'язання. а) Обчислимо об'єм тіла, утвореного обертанням сегмента навколо осі ОХ (рис.7). Використаємо формулу (9.1)

$$V_x = \pi\int_a^b y^2(x)dx$$

$$a = 0, b = \frac{p}{2}, y(x) = \sqrt{2px}, y^2(x) = 2px$$

$$V_x = \pi\int_0^{\frac{p}{2}} 2pxdx = \pi px^2\Big|_0^{\frac{p}{2}} = \frac{1}{4}\pi p^3 \text{ (од. об.)}.$$

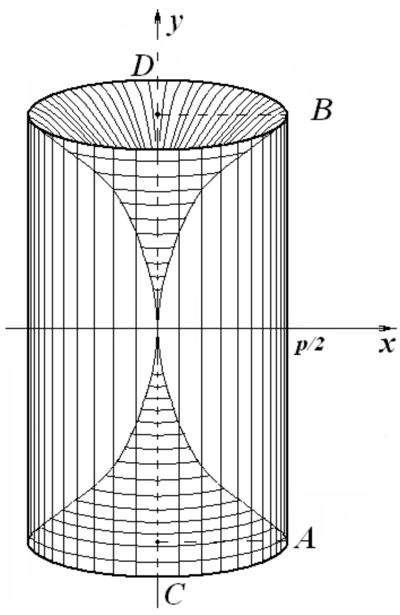

Рис.8

б) При обертанні сегмента навколо осі ОУ маємо тіло (рис.8). Для обчислення його об'єму формулу (9.2) використати неможна, тому що сегмент АОВ по відношенню до осі ОУ обмежений двома лініями: $x_1 = \frac{p}{2}, x_2 = \frac{y^2}{2p}$. Об'єм будемо шукати як різницю об'ємів тіл, утворених обертанням навколо осі прямокутника CABD (V_1) і криволінійної трапеції CAOBD (V_2). Ординати точок C і D (тобто c і d у формулі (9.14)) знайдемо, розв'язуючи систему:

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ x = \frac{p}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \frac{p}{2} \\ y = \pm p \end{cases}.$$

Маємо координати точок $B\left(\frac{p}{2}, p\right)$ і $A\left(\frac{p}{2}, -p\right)$, тоді $d = y_d = p, c = y_c = -p$.

Таким чином,

$$V_{1y} = \pi \int_{-p}^{p} x_1^2 dy = 2\pi \int_0^p \left(\frac{p}{2}\right)^2 dy = \pi \frac{p^2}{2} y \Big|_0^p = \frac{1}{2}\pi p^3.$$

$$V_{2y} = \pi \int_{-p}^{p} x_2^2 dy = 2\pi \int_0^p \left(\frac{y^2}{2p}\right)^2 dy = 2\pi \int_0^p \frac{y^4}{4p^2} dy = \frac{\pi}{2p^2} \cdot \frac{y^5}{5}\Big|_0^p = \frac{\pi p^3}{10}.$$

$$V_y = V_{1y} - V_{2y} = \frac{1}{2}\pi p^3 - \frac{1}{10}\pi p^3 = \frac{2}{5}\pi p^3 (\text{куб.од.}).$$

Іноді об’єм тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю OX і двома вертикальними прямими $x = x_1$ і $x = x_2$, навколо осі OY, зручніше обчислювати за формулою

$$V_y = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} xy(x) dx \tag{9.3}$$

Приклад 17. Обчисли об’єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої параболою $y = 2x - x^3$ і віссю абсцис, навколо осі ординат (рис. 9). Для обчислення об’єму утвореного тіла скористаємось формулою (9.3):

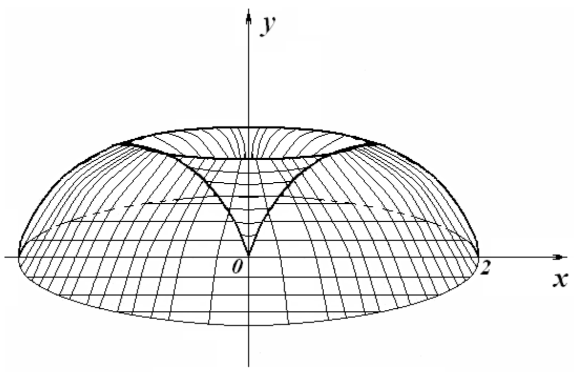

Рис.9

$x_1 = 0, x_2 = 2, y = 2x - x^2,$

$$V_y = 2\pi \int_0^2 x(2x - x^2) dx = 2\pi \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{8}{3}\pi \ (\text{од}^3.)$$

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

ЗАВДАННЯ 1

Варіант 1.

Обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_1^8 \frac{2+5\sqrt[3]{x}}{x^3}dx.$

2. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}.$

3. $\int\limits_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}.$

4. $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^2+3x+2}.$

5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} tgx \ln\cos x dx.$

6. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\cos^2 x}.$

7. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}.$

8. $\int\limits_0^1 x^3 arctgx dx.$

9. $\int\limits_0^{arctg\frac{2}{3}} \frac{6+tgx}{9\sin^2 x+4\cos^2 x}dx.$

10. $\int\limits_0^4 x^2\sqrt{16-x^2}dx.$

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

11. $\int\limits_{-2}^{\infty} \sin 3x dx.$

12. $\int\limits_0^{\infty} x^3 e^{-x^2}dx.$

13. $\int\limits_{-1}^{3} \frac{dx}{x^3}.$

14. $\int\limits_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}.$

Варіант 2.

Обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_0^{-1} \frac{t^4-4}{2-t^2}dt.$

2. $\int\limits_{-1}^{0} 2x\left(x^2-1\right)^{15}dx.$

3. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$.

4. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

5. $\int\limits_{0}^{1} \frac{4arctgx - x}{1+x^2} dx.$

6. $\int\limits_{0}^{1} xe^{-x} dx.$

7. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2+6\right)\cos 2x dx.$

8. $\int\limits_{1}^{5} \frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}$.

9. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{2arctg2} \frac{dx}{\sin^2 x(1-\cos x)}$.

10. $\int\limits_{0}^{16} \sqrt{256-x^2} dx.$

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

11. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{4+x^2}$.

12. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx.$

13. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-4x+4x^2}$.

14. $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{2-\sqrt{x}}$.

<u>Варіант 3.</u>

Обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_{1}^{2} \left(3x^2-2x+1\right) dx.$

2. $\int\limits_{a}^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2+x^2}$.

3. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx.$

4. $\int\limits_{3}^{4} \frac{dx}{x^2-3x+2}$.

5. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{tg(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx.$

6. $\int\limits_{1}^{e} x \ln x dx.$

7. $\int\limits_{-2}^{0}\left(x^2-4\right)\cos 3x dx.$

8. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x\sqrt[4]{2x-1}dx.$

9. $\int\limits_{0}^{arctg 3}\frac{4+tgx}{2\sin^2 x+18\cos^2 x}dx.$

10. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4}dx.$

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

11. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x-2}{x^2+1}dx.$

12. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^2+1}{\left(x^2+3x+1\right)^2}dx.$

13. $\int\limits_{0}^{e} x\ln^2 xdx.$

14. $\int\limits_{-4}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x+3}}.$

Варіант 4.

Обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_{0}^{8}\left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx.$

2. $\int\limits_{2}^{3}\frac{dx}{x^2-1}.$

3. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{x^3dx}{\left(\frac{5}{8}-x^4\right)\sqrt{\frac{5}{8}-x^4}}.$

4. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{2x+4}{x^2-x+1}.$

5. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^2}.$

6. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} arctg 2xdx.$

7. $\int\limits_{0}^{\pi}\left(x^3+1\right)\sin 2xdx.$

8. $\int\limits_{-2}^{0}\frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt{(x+3)^3}}.$

9. $\int\limits_{0}^{2arctg\frac{1}{3}}\frac{\cos xdx}{(1+\cos x)(1-\sin x)}.$

10. $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{\left(16-x^2\right)^3}}.$

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

11. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{arctg^2 x}{1+x^2} dx.$

12. $\int_{0}^{\infty} x \sin 2x dx.$

13. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$

14. $\int_{0}^{\frac{1}{9}} \frac{9dx}{3\sqrt{x}-1}.$

Варіант 5.

Обчислити інтеграли:

1. $\int_{1}^{2} \left(x^2 - 2x + 3\right) dx.$

2. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}.$

3. $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$

4. $\int_{2}^{3} \frac{dx}{2x^2 + 3x - 2}.$

5. $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{8x - arctg 2x}{1+4x^2} dx.$

6. $\int_{0}^{e-1} \ln(x+1) dx.$

7. $\int_{-1}^{0} \left(x^2 + 3\right) \cos x dx.$

8. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x \cdot \sqrt[4]{2x-1} dx.$

9. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos x dx}{(1+\cos x - \sin x)^2}$

10. $\int_{-3}^{3} x^2 \cdot \sqrt{9-x^2} dx.$

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

11. $\int_{0}^{\infty} \sin 3x dx.$

12. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 dx}{1+4x^4}.$

13. $\int_{0}^{e} x \ln x dx.$

14. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^3 - 5x^2}.$

Варіант 6.

Обчислити інтеграли:

1. $\int_0^4 \left(t^2+3\right)^2 dt.$

2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

3. $\int_0^2 \left(e^x-1\right)^{10} e^x dx.$

4. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}.$

5. $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\arccos^2 x-1}{\sqrt{1-x^2}}.$

6. $\int_1^e x\ln x dx.$

7. $\int_{-2}^0 (x+2)^2 \cos 3x dx.$

8. $\int_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x\sqrt{e^x-2}}{e^x+2} dx.$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{tg^2 x}{4+3\cos 2x} dx.$

10. $\int_0^{5/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}}.$

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

11. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

12. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[5]{(4-2x)^3}}.$

13. $\int_1^\infty \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{(x-\sin x)^2} dx.$

14. $\int_0^\infty xe^{-2x} dx.$

Варіант 7.

Обчислити інтеграли:

1. $\int_1^4 \frac{9x-1}{3\sqrt{x}+1}.$

2. $\int_0^{2\pi} \sin 2x dx.$

3. $\int_2^9 \sqrt{x-1} dx.$

4. $\int_{-0.5}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$

5. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x - arctg^4 x}{1 + x^2} dx.$

6. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$

7. $\int\limits_{-4}^{0} \left(x^2 + 7x\right)\cos xdx.$

8. $\int\limits_{0}^{-\ln 2} \sqrt{1 - e^{2x}} dx$

9. $\int\limits_{-2\pi/3}^{0} \frac{\cos xdx}{1 + 2\cos x - \sin x}$

10. $\int\limits_{0}^{2\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{16 - x^2}}$

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

11. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x \ln^5 x}$

12. $\int\limits_{5}^{\infty} \frac{xdx}{x^4 + 4}$

13. $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{x}$

14. $\int\limits_{0}^{4} \frac{dy}{2 - \sqrt{y}}$

Варіант 8.

Обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_{-2}^{0} \left(\frac{x}{2} + 1\right)^3 dx$

2. $\int\limits_{-1}^{2} \left(e^{-x} - x^2\right) dx$

3. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1 + 5tgx}{\cos^2 x} dx$

4. $\int\limits_{2}^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}$

5. $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx$

6. $\int\limits_{0}^{1} xarctg 2xdx$

7. $\int\limits_{0}^{\pi} \left(2x^2 + 7\right)\cos 2xdx$

8. $\int\limits_{0}^{\ln 2} \sqrt{1 - e^{2x}} dx$

9. $\int\limits_{\pi/4}^{arctg 3} \frac{4tgx - 5}{1 - \sin 2x + 4\cos^2 x}$

10. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{\left(9 + x^2\right)^3}}$

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

11. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-kx}dx$

12. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{arctgx + arctg\,{}^{\pi}\!/_{4}}{1+x^2}dx$

13. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln x}$

14. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$

Варіант 9.

Обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_{1}^{4} \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}dy$

2. $\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)}d\varphi$

3. $\int\limits_{0}^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$

4. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dy}{y^2-2y-8}$

5. $\int\limits_{0}^{\sin 1} \frac{\arcsin^2 x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

6. $\int\limits_{0}^{1} \arcsin x dx$

7. $\int\limits_{1}^{e} \ln^3 x dx$

8. $\int\limits_{{}^{3}\!/_{4}}^{{}^{4}\!/_{3}} \frac{dz}{z\sqrt{z^2+1}}$

9. $\int\limits_{0}^{2arctg\frac{1}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x(1+\cos x)}dx$

10. $\int\limits_{0}^{3} \sqrt{9-x^2}dx$

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

11. $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^4 x}$

12. $\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-x}dx$

13. $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$

14. $\int\limits_{{}^{1}\!/_{2}}^{1} \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x-1}}$

Варіант 10.

Обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_{100}^{101}\left(\frac{u-1}{\sqrt{u}+1}-\sqrt{u}+2\right)du$

2. $\int\limits_{0}^{\ln 3}\left(e^{2t}-e^{-t/2}\right)dt$

3. $\int\limits_{2}^{6}\sqrt{x-2}dx$

4. $\int\limits_{3/4}^{2}\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$

5. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\frac{arctgx+x}{1+x^2}dx$

6. $\int\limits_{0}^{3}\ln(x+3)dx$

7. $\int\limits_{0}^{2\pi}\left(3x^2+5\right)\cos 2xdx$

8. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 6}\frac{e^x\sqrt{e^x+2}}{e^x+2}dx$

9. $\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{4-7tgx}{2+3tgx}dx$

10. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

11. $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$

12. $\int\limits_{-\infty}^{0}xe^{2x}dx$

13. $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$

14. $\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{(x-1)^3}$

Варіант 11.

Обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_{4}^{9}\left(\frac{2x}{5}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$

2. $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{4x^2-9}$

3. $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{(7-3x)^2}$

4. $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{2}\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$

5. $\int\limits_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx$

6. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{xdx}{\cos^2 x}$

7. $\int\limits_{0}^{2\pi} \left(2x^2 - 15\right)\cos 3xdx$

8. $\int\limits_{0}^{5} x\sqrt{x+4}dx$

9. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin xdx}{1+\cos x + \sin x}$

10. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^4 dx}{\sqrt{\left(8 - x^2\right)^3}}$

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

11. $\int\limits_{0}^{\infty} \sin 3xdx$

12. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{4xdx}{x^4 + 1}$

13. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{(x-3)^3}$

14. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{xdx}{\sin^2 x}$

Варіант 12.

Обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_{4}^{9} \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

2. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{tgx}{\sin 2x}dx$

3. $\int\limits_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 3}} xe^{x^2} dx$

4. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dy}{y^2 - 2y - 8}$

5. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx$

6. $\int\limits_{0}^{2\pi} (2x+1)\cos 3xdx$

7. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$

8. $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$

9. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2tg^2x-11tgx-22}{4-tgx}dx$

10. $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

11. $\int\limits_e^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

12. $\int\limits_{-\infty}^0 x^3e^{x^2}dx$

13. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

14. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}}$

Варіант 13.

Обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_1^4 \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{2x}}{x}dx$

2. $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

3. $\int\limits_{-\sqrt[3]{3}}^0 x^2e^{\frac{1}{3}x^3+1}dx$

4. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{4x^2+4x+5}$

5. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{2\cos x+3\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^3}dx$

6. $\int\limits_0^3 \ln(x+3)dx$

7. $\int\limits_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$

8. $\int\limits_0^{\pi} (3-7x^2)\cos 2x dx$

9. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{5tgx+2}{2\sin 2x+5}dx$

10. $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

11. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{4+x^2}$

12. $\int\limits_0^{\infty} e^{\sqrt{x}}dx$

13. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

14. $\int\limits_0^3 (x-2)^{-3}dx$

Варіант 14.

Обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_{-2}^{-1}\left(x+\frac{1}{3x^5}+\frac{1}{2}\right)dx$

2. $\int\limits_{-\pi/12}^{\pi/4}\cos\left(4\varphi+\frac{\pi}{3}\right)d\varphi$

3. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$

4. $\int\limits_{-5}^{-2}\frac{dx}{x^2+4x-21}$

5. $\int\limits_{1}^{3}\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx$

6. $\int\limits_{0}^{\pi/2}x\sin 2xdx$

7. $\int\limits_{0}^{1}\arcsin^2 xdx$

8. $\int\limits_{0}^{\ln 2}\sqrt{5-e^{2x}}dx$

9. $\int\limits_{0}^{arctg2}\frac{12+tgx}{3\sin^2 x+12\cos^2 x}dx$

10. $\int\limits_{0}^{5}\frac{dx}{(25-x^2)\sqrt{25-x^2}}$

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

11. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{2\ell^x}{\ell^{2x}+1}dx$

12. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{arctgx}{x^2+1}dx$

13. $\int\limits_{0}^{1}x\ln xdx$

14. $\int\limits_{0}^{1}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$

Варіант 15.

Обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_{0}^{1}\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx$

2. $\int\limits_{0}^{1}\frac{e^x+e^{-x}}{e^{x-1}}dx$

3. $\int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0}\frac{xdx}{5\sqrt{1-x^4}}$

4. $\int\limits_{-2}^{-1}\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$

5. $\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$

6. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$

7. $\int\limits_{-1}^0 \left(x^2+2x\right)\sin 3xdx$

8. $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$

9. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{6\sin^2 x}{3\cos 2x-4}$

10. $\int\limits_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

11. $\int\limits_{10}^{\infty} \frac{dx}{(x-3)^4}$

12. $\int\limits_{-\infty}^0 xe^{-3x}dx$

13. $\int\limits_{1/e}^{e} \frac{1-\ln x}{x^2}dx$

14. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-\sqrt{x}}$

Варіант 16.

Обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_1^8 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-3x+5\right)dx$

2. $\int\limits_{-1}^1 \frac{2^x-3^x}{6^x}dx$

3. $\int\limits_{\sqrt{\pi}/2}^{\sqrt{\pi}/4} \frac{1}{2}x\sin x^2dx$

4. $\int\limits_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}$

5. $\int\limits_1^e \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx$

6. $\int\limits_1^{16} arctg\sqrt{\sqrt{x}-1}dx$

7. $\int\limits_0^{\pi/4} x^2\cos 2xdx$

8. $\int\limits_1^6 \frac{xdx}{\sqrt{x+3}}$

9. $\int\limits_{\pi/4}^{arctg 3} \frac{1+ctgx}{(\sin x+2\cos x)^2}dx$

10. $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^4dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

11. $\int\limits_{-\infty}^{e} xe^{-x}dx$

12. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$

13. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$

14. $\int\limits_{0}^{9} \frac{dy}{2-\sqrt{y}}$

Варіант 17.

Обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_{-2}^{2} (x^2+x+1)dx$

2. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$

3. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\sin\ln x}{x}dx$

4. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{4x^2+4x+5}$

5. $\int\limits_{1}^{4} \frac{xdx}{\sqrt{2+4x}}$

6. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$

7. $\int\limits_{0}^{1} x^2e^{-x}dx$

8. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}dx$

9. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{5-3\cos x}$

10. $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}} \frac{x^4dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

11. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$

12. $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^{3x}dx$

13. $\int\limits_{0}^{1} e^{-\frac{4}{x}}\frac{dx}{x^2}$

14. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{(x-2)^3}$

Варіант 18.

Обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_{2}^{5}\left(\frac{1}{x}+2^{x}-x\right)dx$

2. $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{4x^{2}+9}$

3. $\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{1+x^{4}}$

4. $\int\limits_{2}^{3,5}\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^{2}}}$

5. $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{\sin x+1}{3+\sin^{2}x}\cos xdx$

6. $\int\limits_{-1}^{1}xarctgxdx$

7. $\int\limits_{0}^{2\pi}\left(1-8x^{2}\right)\cos 4xdx$

8. $\int\limits_{2}^{3}\frac{\sqrt{x^{2}-4}}{x^{4}}dx$

9. $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{dt}{3+2\cos t}$

10. $\int\limits_{2}^{4}\frac{\sqrt{x^{2}-4}}{x^{4}}dx$

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

11. $\int\limits_{e}^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x+2)^{2}}$

12. $\int\limits_{0}^{\infty}xe^{-2x}dx$

13. $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{3-x}}$

14. $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{(1-x)^{2}}$

Варіант 19.

Обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_{3}^{5}\left(\frac{1}{x^{2}}+e^{2x}-x\right)dx$

2. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{tgx}{3\sin 2x}dx$

3. $\int\limits_{-2}^{0}\frac{dx}{(5+2x)^{5}}$

4. $\int\limits_{2}^{3}\frac{dt}{t^{2}-2t-8}$

5. $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{1-\cos\varphi}{(\varphi-\sin\varphi)^2}d\varphi$

6. $\int\limits_{0}^{1} arctg6xdx$

7. $\int\limits_{0}^{2\pi} \left(3x^2-8\right)\cos 5xdx$

8. $\int\limits_{1}^{3} x^3\sqrt{x^2-1}dx$

9. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{2+7\cos x}$

10. $\int\limits_{0}^{3/2} \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

11. $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^7 x}$

12. $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^{5x}dx$

13. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^3+1}{\sqrt{x}}dx$

14. $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{(x-1)^3}$

Варіант 20.

Обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_{0}^{1} \left(t\sqrt{t}-2t+1\right)dt$

2. $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{1+\cos x}$

3. $\int\limits_{1}^{2} e^{1/x}\frac{dx}{x^2}$

4. $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x+x^2}$

5. $\int\limits_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$

6. $\int\limits_{0}^{3} \ln(x+11)dx$

7. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \left(1-5x^2\right)\sin xdx$

8. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dy}{2+\sqrt{y}}$

9. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{3+11\cos x}$

10. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^2dx}{\sqrt{\left(8-x^2\right)^3}}$

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

11. $\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$

12. $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt[5]{\ln x}}$

13. $\int\limits_{0}^{\pi/2} tgx\,dx$

14. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{(x+1)^3}$

Варіант 21.

Обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_{-1}^{2} \left(x^3 + \sqrt[3]{x}\right)dx$

2. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{(2x-1)^2}$

3. $\int\limits_{1}^{e} \cos\ln x \frac{dx}{x}$

4. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+4x+29}$

5. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{4+\cos x}{1+\cos^2 x}\sin x\,dx$

6. $\int\limits_{0}^{1} \arcsin 7x\,dx$

7. $\int\limits_{0}^{3} \left(x^2-3x\right)\sin 9x\,dx$

8. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x\sqrt{e^x-2}}{e^x+2}\,dx$

9. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{dt}{7+5\cos t}$

10. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}$

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

11. $\int\limits_{0}^{\infty} x\sin\frac{7}{3}x$

12. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{36+x^2}$

13. $\int\limits_{0}^{1} \frac{t^3-1}{\sqrt{t}}\,dt$

14. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

Варіант 22.

Обчислити інтеграли:

1. $\int_1^{27}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\sqrt[3]{x}\right)dx$

2. $\int_0^{\pi}\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right)dx$

3. $\int_0^{\ln 2}\frac{e^x dx}{3\left(1-2e^x\right)}$

4. $\int_{-1/2}^{1}\frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$

5. $\int_1^3 x^3\sqrt{x^2-1}dx$

6. $\int_0^{\pi/6}\left(x^2+6\right)\sin 3xdx$

7. $\int_0^{\pi/2} xarctg2xdx$

8. $\int_0^1\frac{9x-1}{\sqrt{3x+1}}dx$

9. $\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{6-5\sin\varphi+2\cos\varphi}$

10. $\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

11. $\int_e^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{2+\ln x}}$

12. $\int_2^{\infty} x\sin xdx$

13. $\int_0^1\frac{dx}{(1-x)^4}$

14. $\int_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

Варіант 23.

Обчислити інтеграли:

1. $\int_{-1}^{2}\left(3x^2+4x-1\right)dx$

2. $\int_{\pi/8}^{\pi/6}\frac{dx}{\cos^2 2x}$

3. $\int_{1/\pi}^{2/\pi}\sin\frac{1}{x}\frac{dx}{x^2}$

4. $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$

5. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^3 x \cos^2 x dx$

6. $\int\limits_{0}^{3} x \ln(x+17) dx$

7. $\int\limits_{-3}^{0} (x^2+9) \sin 2x dx$

8. $\int\limits_{0}^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$

9. $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1 + \sin x - \cos x}$

10. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{16 - x^2}}$

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

11. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4x^2 + 11}$

12. $\int\limits_{0}^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx$

13. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{(x-1)^{11}}$

14. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x dx}{\sqrt[3]{2x-1}}$

<u>Варіант 24.</u>

Обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_{-1}^{3} (2 + x - 3x^2) dx$

2. $\int\limits_{0}^{3} e^{x/3} dx$

3. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2 dx}{1 + x^6}$

4. $\int\limits_{3}^{4} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$

5. $\int\limits_{0}^{4} x^3 \sqrt{x^2 + 9} dx$

6. $\int\limits_{1}^{e} \ln 7x dx$

7. $\int\limits_{0}^{\pi} x^3 \sin x dx$

8. $\int\limits_{4}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x} - 1}$

9. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} ctg^4 x dx$

10. $\int\limits_{0}^{3/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

11. $\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$

12. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

13. $\int\limits_0^{e} x \ln 5x dx$

14. $\int\limits_{-3}^{-1} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2-4}}$

<u>Варіант 25</u>.

Обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_{-1}^{8} \left(\sqrt[3]{x} - x + 3x^2\right) dx$

2. $\int\limits_0^{\pi/4} \sin 4x dx$

3. $\int\limits_0^{1} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$

4. $\int\limits_0^{1} \frac{xdx}{x^2+3x+2}$

5. $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$

6. $\int\limits_1^{e} \sqrt{x} \ln^2 x dx$

7. $\int\limits_0^{1} \arcsin x dx$

8. $\int\limits_0^{5} \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$

9. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$

10. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

11. $\int\limits_0^{\infty} xe^{-2x} dx$

12. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4+2x^2}$

13. $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln x}$

14. $\int\limits_0^{9} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$

Варіант 26.

Обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_1^4 \frac{4+3\sqrt{x}}{x^2}dx.$

2. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}.$

3. $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}dx}{1+e^{2x}}.$

4. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}.$

5. $\int\limits_0^{\pi/8} tg2x \ln\cos 2x dx.$

6. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{xdx}{\sin^2 x}.$

7. $\int\limits_1^5 \frac{dx}{1+\sqrt{x-1}}.$

8. $\int\limits_0^1 x^2 arctgxdx.$

9. $\int\limits_0^{arctg2} \frac{2-tgx}{\sin^2 x+9\cos^2 x}dx.$

10. $\int\limits_0^6 x^2\sqrt{36-x^2}dx.$

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

11. $\int\limits_1^{\infty} x\sin 5xdx.$

12. $\int\limits_0^{\infty} x^5 e^{-x^6}dx.$

13. $\int\limits_{-1}^3 \frac{dx}{x^3}.$

14. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}.$

Варіант 27.

Обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_0^{-2} \frac{x^4-4}{2+x^2}dt.$

2. $\int\limits_{-1}^0 3x^2\left(x^3+6\right)^{11}dx.$

3. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2}.$

4. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}.$

5. $\int\limits_0^2 \frac{arctg\frac{x}{2}-2x}{4+x^2}dx.$

6. $\int\limits_0^1 xe^{-2x}dx.$

7. $\int\limits_0^{\pi/2} \left(x^2-3\right)\cos x dx.$

8. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{3x+\sqrt{x+1}}.$

9. $\int\limits_{\pi/2}^{2arctg3} \frac{dx}{\sin^2 x(1+\cos x)}.$

10. $\int\limits_0^9 \sqrt{81-x^2}dx.$

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

11. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{4+9x^2}.$

12. $\int\limits_0^{-\infty} e^{\sqrt{x}}dx.$

13. $\int\limits_0^{1/3} \frac{dx}{1-6x+9x^2}.$

14. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}.$

Варіант 28.

Обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_1^2 \left(4x^3+3x^2\right)dx.$

2. $\int\limits_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{1+4x^2}.$

3. $\int\limits_1^e \frac{\sqrt{3+\ln x}}{x}dx.$

4. $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x^2-4x+8}.$

5. $\int\limits_1^2 \frac{tg(2x-1)}{\cos^2(2x-1)}dx.$

6. $\int\limits_1^e x^3\ln x dx.$

7. $\int\limits_{-2}^0 \left(x^2-1\right)\cos 2x dx.$

8. $\int\limits_{2/3}^2 x\sqrt[3]{3x-2}dx.$

9. $\int\limits_{0}^{arctg3} \frac{2+tgx}{4\sin^2 x+16\cos^2 x}dx.$

10. $\int\limits_{1}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}dx.$

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

11. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x+3}{x^2+1}dx.$

12. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2+1}{\left(x^3+3x+1\right)^2}dx.$

13. $\int\limits_{0}^{e} x^2 \ln^2 x dx.$

14. $\int\limits_{-3}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+3}}.$

Варіант 29.

Обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_{0}^{16} \left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}\right)dx.$

2. $\int\limits_{2}^{3} \frac{xdx}{x^4-4}.$

3. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt[3]{2}}{2}} \frac{x^2dx}{\left(\frac{3}{8}-x^3\right)\sqrt{\frac{3}{8}-x^3}}.$

4. $\int\limits_{0}^{1} \frac{2x+3}{x^2-x+1}.$

. $\int\limits_{5}^{\infty} \sin 0{,}5xdx.$

12. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{4+x^4}.$

13. $\int\limits_{0}^{e} x^3 \ln xdx.$

14. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2-3x}.$

ЗАВДАННЯ 2

1. Обчислити площі фігур, обмежених лініями:

1.1.

а) $y=\sqrt{x}, \quad x=9,$
$y=0;$

б) $y=(x+1)^2, \quad y^2=x,$
$y=1, \quad y=0;$

1.2.

а) $y=x^2+2x+2,$
$y=0, x=0, x=-3;$

б) $y=0;$
$y=x\sqrt{1-x^2};$

в) $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t \\ y = 1 - \cos 2t \end{cases}$ $(0 \le t \le \pi)$

в) $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin t; \end{cases}$

1.3.

а) $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = x$, $x = 3$;

б) $y = \arccos x$, $x \ge 0$, $y \ge 0$;

в) $\rho = 4\sin 2\varphi$;

1.4.

а) $y = x^2$, $4x - y = 0$;

б) $y = \dfrac{1}{x}$, $y = 1$, $x = 0, x = e, y = 0$;

в) $\rho = a\sin^3 \dfrac{\varphi}{3}$.

1.5.

а) $y = -\dfrac{1}{x}$, $y = 0$,

в) $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$;

$x = -1, x = -2$;

б) $y = \sin x$, $y = \dfrac{3}{\pi}x$;

в) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t); \end{cases}$

1.6.

а) $y = \ln x$, $x = 0$,

в) $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t), \\ y = a(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $(0 \le t \le \pi)$;

$y = 1, y = -1$;

б) $y = (x+1)^2$, $y = 4$;

в) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$;

1.7.

а) $y = \sin x$, $x = \pi$, $y = -x$;

б) $y = 4 - x^{2,}$ $y = 2x + 1$;

в) $\rho = 3(1 + \cos\varphi)$;

1.8.

а) $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 3x - 1$, $x = 0$;

б) $y = tgx$, $y = 0$, $x = \dfrac{\pi}{3}$;

в) $\rho = 3\sin 2\varphi$;

1.9.

а) $y = 4 - x^2$, $y = 0$;

б) $y = e^{2x}$, $y = e^{-2x}$, $y = 2$;

1.10.

а) $y = 1 + e^x$, $x = 0$, $x = -4$, $y = 0$;

б) $y = x^2 + 1$, $x = 0$, $y = 2x + 9$, $y = 0$;

в) $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t), \\ y = a(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$; в) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t; \end{cases}$

1.11.

а) $y = 4x^2$,
$y = x^2 + 3$;

б) $xy = 1$, $y = x^2$,
$y = 4, x > 0$;

в) $\rho = 2 + \cos\varphi$;

1.12.

а) $y = x^2 - 3x$,
$y = x$;

б) $y = x\sqrt{9 - x^2}$,
$y = 0, 0 \le x \le 3$;

в) $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$;

1.13.

а) $y = e^x, y = e$,
$x = -1$;

б) $y = 4x - x^2$,
$y = -3$;

1.14.

а) $y = -x, y = 2 - x$,
$y = -4, y = 3$;

б) $y = x\sqrt{3 - x}$,

1.15.

а) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$,
$x = 0, y = 0, x = \frac{\pi}{4}$;

б) $y = x, y = 4 - x$,
$y = 0, x = 3$;

в) $\rho = 4(1 - \cos\varphi)$;

1.16.

а) $y = -x^2 - 7x + 10$,
$y = 0$;

б) $y = e^{2x}$,
$x + y = 1, y = 2$;

в) $\rho = 2\cos 3\varphi$;

1.17.

а) $y = 4 - x^2$,
$2x - y + 1 = 0$;

б) $y = \frac{27}{x^2 + 9}$;

1.18.

а) $y = 6 - x^2$,
$y = 0$;

б) $y = \arccos x$,

1.25.

а) $y = x, y = 1$,
$y = 4, x = 0$;

б) $\rho = 2a\cos\gamma$

поза кругом $\rho = a$;

1.26.

а) $y = -\frac{1}{x}$,
$y = 0, x = 1, x = 2$

б) $y = \sin x$,
$y = \frac{2}{\pi}x$;

в) $x=0, x=\frac{5}{4}x.$

$y=-1, y=-2;$

в) $y=\sin x, y=2\sin x,$

$x=\frac{\pi}{4}, x=\frac{3\pi}{4}$

1.27.

а) $y=2\sqrt{x} \quad y=x;$

б) $y=x^4, \quad y=x;$

в) $\begin{cases} x=3t-\sin 3t \\ y=3-\cos 3t \end{cases}$

$\left(0\le t\le \frac{\pi}{3}\right)$

1.28.

а) $y=x^2-1,$

$y=7x-7;$

б) $y=0;$

$y=x\sqrt{1-2x^2};$

в) $\begin{cases} x=5\cos t, \\ y=12\sin t; \end{cases}$

1.29.

а) $y=\frac{1}{x^2}, \quad y=x,$

$x=3;$

б) $y=\arccos 2x, \qquad x\ge 0,$

$y\ge 0;$

в) $\rho=2\sin 3\varphi;$

1.30.

а) $y=x^3,$

$4x-y=0;$

б) $y=\frac{1}{x}, \qquad y=x,$

$x=e;$

в) $\rho=a\sin^3\frac{\varphi}{2}.$

2. Обчислити довжину дуги кривої:

2.1. $\rho=5(1+\sin\gamma);$

2.2. $\rho=a(1-\sin\phi);$

2.3. $\begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(1-\cos t), \end{cases}$

$(0\le t\le 2\pi);$

2.4. $y=1+\arcsin x-\sqrt{1-x^2},$

$(0\le x\le 3/4);$

2.5. $\rho=2\cos^2\frac{\gamma}{2};$

2.6. $\rho=2\sin^2\frac{\gamma}{2};$

2.7. $\begin{cases} x=2t-\sin 2t, \\ y=1-\cos 2t, \end{cases}$

$(0\le t\le \pi);$

2.8. $y=\sqrt{(x-2)^3}$

від т. А (2;0) до т. В (6;8)

2.11. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le \pi)$;

2.10. $\rho = \sqrt{2}e^{\gamma}$, $(0 \le \gamma \le \pi/3)$;

2.13. $\rho = 2\sin\gamma$, $(0 \le \gamma \le \pi/6)$;

2.14. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$, $x_1 = 1, x_2 = e$;

2.15. $\begin{cases} x = R(\cos t + t\sin t), \\ y = R(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $(0 \le t \le \pi)$;

2.16. $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t; \end{cases}$

2.17. $\rho = 3(1 + \sin\gamma)$;

2.18. $\rho = a\ell^{\gamma}$, $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 2\pi$;

2.19. $\begin{cases} x = 8\sin t - 6\cos t, \\ y = 6\sin t + 8\cos t, \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$;

2.20. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$ $(0 \le t \le \pi)$;

2.21. $\rho = 4\gamma$, $0 \le \gamma \le \frac{3}{4}\pi$

2.22. $y = \ln x$, $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{15}$;

2.23. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$;

2.24. $\begin{cases} x = e^t\sin t, \\ y = e^t\cos t, \end{cases}$ $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$;

2.25. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$, $(1 \le x \le 2)$.

2.26. $\begin{cases} x = 2t + \cos 2t, \\ y = 1 + \sin 2t, \end{cases}$

2.27. $\rho = 3(1 + \cos\varphi)$;

2.28. $\rho = 5(1 - \sin\varphi)$;

2.29. $\begin{cases} x = 2(t + \cos t), \\ y = 2(1 - \sin t), \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$;

2.30. $y = \sqrt{1 - x^2} - 1 - \arcsin x$, $(0 \le x \le 2\sqrt{2}/3)$;

3. Обчислити об'єм тіл, утворених обертанням навколо осі OX фігур, обмежених вказаними лініями:

3.1. $y = 2\sin x, y = \sin x,$
$x = 0, x = \pi;$

3.2. $y = 2\cos x, y = \cos x,$
$x = 0, x = \pi/2;$

3.3. $y = -x^2 + 3,$
$y = x^2 + 1;$

3.4. $y = e^x, y = 0,$
$x = -1, x + y = 1;$

3.5. $y = tgx,$
$y = 0, x = \pm\pi/4;$

3.6. $y^2 = x^3,$
$x = 2;$

3.7. $y = -x^2 + 5x - 6,$
$y = 0;$

3.8. $y = e^{2x}, x = -4,$
$x = 0, y = 0;$

3.9. $y = \cos x, y = 0,$
$y \le x + 1, \quad (-1 \le x \le \pi/2);$

3.10. $y = x^2, y = 4,$
$xy = 1, \quad (0 \le x \le 1);$

3.11. $y = \sqrt{x}, x + y = 2,$
$x = 0;$

3.12. $y = \ln x, x = 0,$
$y = 1, y = 0;$

3.13. $y = e^{2x},$
$y = e^{-2x}, y = 2;$

3.14. $y = x^2, x = 2,$
$y = 0;$

3.15. $y = (x+1)^2, y^2 = x,$
$y = 0, y = 1;$

3.16. $y = e^{1-x}, y = 0,$
$x = 0, x = 1;$

3.17. $y = e^x, x + y = 2,$
$x = 0, y = 0;$

3.18. $x^2 + y^2 = 1,$
$y \le \sqrt{\frac{3}{2}x};$

3.19. $y = x^2, y = \frac{1}{x^2},$
$y = 0, x = 2;$

3.20. $y = e^{-2x}, y = e^{2x},$
$x = 1;$

3.21. $y = 2\sin x, y = 1,$
$\left(\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{5\pi}{6}\right);$

3.22. $y = 2x - x^2,$
$y = -x + 2, x = 0;$

3.23. $y=e^{x}, y=e^{-x}$,
$x=1$;

3.24. $2y=3\sqrt{4-x^{2}}$,
$4y \geq 4-x^{2}$;

3.25. $y=2\sin x, y=2\cos x$,
$x=0, x=\frac{\pi}{4}$

3.26. $y=2x-x^{2}$,
$y=0$.

3.27. $y=tgx, y=0$,
$(-\pi/4 \leq x \leq \pi/4)$;

3.28. $y=x^{2}, y=x^{4}$,

3.29. $y=\frac{1}{x}, x+y=2$,

3.30. $y=\lg_{2} x, x=0$,
$y=1, y=0$;

4. Обчислити об’єми тіл, утворених обертанням навколо осі ОУ фігур, обмежених вказаними лініями:

4.1. $y=\frac{1}{x}, y=1, y=0$,
$x=0, x=2$;

4.2. $x+y=1, y=\ln x$,
$x=e$;

4.3. $y=x^{2}$,
$y=\sqrt{x}$;

4.4. $y=x^{2}$,
$4x-y=0$;

4.5. $y=e^{2x}$,
$y=e^{-2x}, x=\frac{1}{2}$;

4.6. $y=(x-1)^{2}$,
$x=2, y=0$;

4.7. $y=x^{3}$,
$y=\sqrt{x}$;

4.8. $y=x^{2}$,
$y=8-x^{2}$;

4.9. $x=y^{2}, x=0$,
$y=3$;

4.10. $y=\sqrt{x}, x=0$,
$y+x=4$;

4.11. $y=e^{1-x}, y=0$,
$x=0, x=1$;

4.12. $x+y=2, x=2$,
$y=x^{2}+2$;

4.13. $y=x^{3}, y=x-1$,
$y=0, y=1$;

4.14. $y=x^{2}, x=2$,
$y=0, y=1$;

4.15. $y=\sqrt{x-1}, y=0,$
$y=1, x=0.5;$

4.16. $y=e^x, x=1,$
$x+y=1;$

4.17. $y=\sqrt{2x},$
$x^2=2y;$

4.18. $xy=4,$
$2x+y-6=0;$

4.19. $y=\ln x, x=2,$
$y=0;$

4.20. $y=x^2, y=0,$
$x=2;$

4.21. $y=\dfrac{2}{1+x^2},$
$y=x^2;$

4.22. $y^2=x^3, x=4,$
$y\geq 0;$

4.23. $y=e^{-x}, x=0,$
$x=\ln\dfrac{1}{2}, y=0;$

4.24. $y=x, y=-x,$
$x=1;$

4.25. $y=x^2+1, y=x,$
$x=0, x=1.$

4.26. $y=\sqrt{4-x^2},$
$x=0, y=0.$

4.27. $y=x\sqrt{1-x^3},$
$y=0; x=0;$

4.28. $y=arctgx,$
$y=0, x=1;$

4.29. $x=y^3, y=x,$

4.30. $y=x\sqrt{x}, x=0,$
$y+x=1;$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовик, В. П., І. І. Юрик. Вища математика. У трьох частинах. Частини 1, 2, 3 : Навчальний посібник. Харків : Веста, 2008.
2. В.С.Герасимчук, Г.С.Васильченко, В.І.Кравцов Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах.. Книги 1, 2, 3. К.: Книги України ЛТД, 2009.
3. Г.Й.Призва, В.В.Плахотник, Л.Д.Гординський та ін. Вища математика: **:** Підручник. У 2-х книгах Кн.1 ,2. К. : Либідь, 2003.
4. БубнякТ. І. Вища математика : Навчальний посібник К. : Новий світ–2000, 2004.

5. Овчинников, П. П., В. М. Михайленко Вища математика: У двох частинах. Частина 2 : Підручник К. : Техніка, 2004. –

6. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1994. – 443 с.