

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ХІМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ
З ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА МАТЕМАТИКА»
ЗА РОЗДІЛОМ «ЛІНІЙНА ТА ВЕКТОРНА АЛГЕБРА.
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ»
ДЛЯ СТУДЕНТІВ УСІХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ
ДЕННОЇ ТА ЗАОЧНОЇ ФОРМ НАВЧАННЯ

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики.
Протокол № 3 від 17.10.2016.

Дніпро ДВНЗ УДХТУ 2017

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Вища математика» за розділом: «Лінійна та векторна алгебра. Аналітична геометрія» для студентів усіх спеціальностей денної та заочної форм навчання / Укл.: Л.О. Купріна, Т.О. Гранкіна, С.С. Насонова. – Дніпро: ДВНЗ УДХТУ, 2017. – 49 с.

Укладачі: Л.О. Купріна
Т.О. Гранкіна
С.С. Насонова, канд. техн. наук

Відповідальний за випуск В.І. Олевський, д-р техн. наук

Навчальне видання

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Вища математика» за розділом: «Лінійна та векторна алгебра. Аналітична геометрія» для студентів усіх спеціальностей денної та заочної форм навчання

Укладачі: КУПРІНА Лариса Олександрівна
ГРАНКІНА Тетяна Олександрівна
НАСОНОВА Світлана Сергіївна

Технічний редактор Л.Я. Гоцуцова
Комп'ютерна верстка Л.Я. Гоцуцова

Підписано до друку 05.05.17. Формат 60×84/16. Папір ксерокс. Друк різнограф. Умов. друк. арк. 2,38. Обл.-вид. арк. 2,43. Тираж 100 прим. Зам. № 539. Свідоцтво ДК № 5026 від 16.12.2015.

ДВНЗ УДХТУ, 49005, Дніпро-5, просп. Гагаріна, 8.

Редакційно-видавничий відділ

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА	4
1.1. Матриці та операції над ними	4
1.2. Визначники та їх властивості	6
1.3. Обернена матриця	9
1.4 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь	10
1.5 Індивідуальні завдання за темою „Лінійна алгебра”	14
2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА	19
2.1 Поняття вектора та лінійні операції над векторами	19
2.2 Вектори у декартовій системі координат	23
2.3 Скалярний добуток векторів	26
2.4 Векторний добуток векторів	27
2.5 Змішаний добуток векторів	29
2.6 Індивідуальні завдання за темою „Векторна алгебра”.....	31
3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ	32
3.1 Пряма лінія на площині	32
3.2 Криві другого порядку.....	38
3.3 Індивідуальні завдання за темою „Аналітична геометрія на площині”	42
4. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ	44
4.1 Площина у просторі	44
4.2 Пряма лінія у просторі	45
4.3 Індивідуальні завдання за темою „Аналітична геометрія у просторі”	47
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	49

ВСТУП

Методичні вказівки розроблені згідно з програмою дисципліни «Вища математика» для студентів всіх спеціальностей денної та заочної форм навчання з метою допомоги при виконанні індивідуального завдання та підготовці до тестування або контрольної роботи.

Кожен розділ вказівок містить теоретичну частину, приклади розв'язання задач та варіанти індивідуальних завдань.

1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1.1. Матриці та операції над ними

Означення. Матрицею порядку (розміру) $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел, що містить m рядків і n стовпців. Матриці позначаються великими літерами, наприклад: A, B , а елементи матриць – малими літерами з двома індексами: a_{ij}, b_{ij} . Перший індекс указує номер рядка, другий – номер стовпця. Записується матриця за однією із форм:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\| \quad (1.1)$$

Використовуються і скорочені позначення: $A_{m \times n}, [a_{ij}]$,
 $\|a_{ij}\| \quad (i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n})$

Матриця порядку $n \times n$ називається **квадратною** матрицею n -го порядку. Елементи квадратної матриці a_{ii} , в яких номер рядка дорівнює номеру стовпця, називаються **діагональними** та утворюють **головну діагональ**.

Діагональною називається квадратна матриця, в якій всі елементи, що не належать головній діагоналі, дорівнюють нулю.

Діагональна матриця, в якій всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, називається **одиничною матрицею** і позначається літерою E .

Матриця будь-якого розміру називається **нульовою**, якщо всі її елементи дорівнюють нулю.

Матриця, що складається з одного рядка, називається **матрицею-рядком (вектором)**, а з одного стовпця – **матрицею-стовпцем (вектором)**.

Квадратна матриця, в якій всі елементи під (над) головною діагоналлю, дорівнюють нулю, називається **верхньою (нижньою) трикутною матрицею**.

Наприклад:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 5 & 0 & 4 & 9 \\ 6 & 8 & 9 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad - \text{квадратна матриця}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad - \text{єдинична матриця}$$

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad - \text{нульова матриця}$$

Операції над матрицями:

1. **Рівність матриць.** Дві матриці A і B однакового розміру називаються рівними ($A = B$), якщо $a_{ij} = b_{ij}$ для будь-яких i, j .
2. **Множення матриці на число.** Добутком матриці $A_{m \times n}$ на число λ називається матриця $B_{m \times n} = \lambda A$, кожний елемент якої дорівнює добутку відповідного елемента матриці A на число λ ($b_{ij} = \lambda a_{ij}$).
3. **Додавання (віднімання) матриць.** Сумою (різницею) матриць A і B однакового розміру $m \times n$ називається матриця $C_{m \times n} = A \pm B$, елементи якої $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ дорівнюють сумах (різницям) відповідних елементів матриць A і B . Наприклад:

$$\begin{aligned} A \pm B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Властивості операцій додавання та віднімання матриць:

$A + B = B + A$ (комутативність);

$(A + B) + C = A + (B + C)$ (асоціативність);

$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ (дистрибутивність);

$A + O = A$ (нейтральність нульової матриці).

4. **Множення матриць.** Операція множення матриць A і B визначена тільки тоді, коли кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої. Добутком матриць $A_{m \times k}$ і $B_{k \times n}$ називається матриця $C_{m \times n} = A \times B$, кожний елемент якої C_{ij} , що стоїть на перетині i -го рядка та j -го стовпця, дорівнює сумі добутків елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи j -го стовпця матриці B :

$$C_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il} b_{lj} \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}).$$

Кількість рядків матриці $C = AB$ дорівнює кількості рядків матриці A , а кількість стовпців – кількості стовпців матриці B .

Приклад 1.1. Знайти AB і BA , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 8 & -1 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 2} = C_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 9 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 7 \\ 4 \cdot (-2) + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 9 & 4 \cdot 0 + 5 \cdot (-1) + 6 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 19 \\ 86 & 37 \end{pmatrix},$$

$$B_{3 \times 2} \cdot A_{2 \times 3} = D_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 & -2 \cdot 2 + 0 \cdot 5 & -2 \cdot 3 + 0 \cdot 6 \\ 8 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 & 8 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 & 8 \cdot 3 + (-1) \cdot 6 \\ 9 \cdot 1 + 7 \cdot 4 & 9 \cdot 2 + 7 \cdot 5 & 9 \cdot 3 + 7 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 4 & 11 & 18 \\ 37 & 53 & 69 \end{pmatrix}.$$

Властивості добутку матриць:

$$\begin{aligned} A \cdot B &\neq B \cdot A; \\ (A \cdot B) \cdot C &= A \cdot (B \cdot C); \\ A(B + C) &= A \cdot B + A \cdot C; \\ (A \cdot B)^T &= B^T \cdot A^T; \\ O \cdot A &= A \cdot O = O; \\ E \cdot A &= A \cdot E = A. \end{aligned}$$

5. **Транспонування матриці** – перехід від матриці $A_{m \times n}$ до матриці $A^T_{n \times m}$, в якій рядки і стовпці міняються місцями, наприклад, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 9 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{то} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & 9 & 4 \\ 3 & 7 & 1 & 5 \\ 4 & 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.2. Визначники та їх властивості

Квадратній матриці можна поставити у відповідність число, що обчислюється за певним правилом і називається **визначником**. Його позначають символом ΔA або $\det A$. Правило, за яким обчислюється визначник, залежить від порядку матриці.

Визначник другого порядку дорівнює різниці добутків елементів головної та побічної діагоналі :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Визначником третього порядку називається число, що обчислюється за таким правилом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21} \quad (1.1)$$

Мінором M_{ik} елемента a_{ik} називається визначник $(n-1)$ -го порядку, отриманий з даного визначника n -го порядку $\Delta(A)$ викреслюванням i -го рядка та k -го стовпця.

Величина $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$ називається **алгебраїчним доповненням** до елемента a_{ik} .

Приклад 1.2. Для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

маємо:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}, M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix},$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}.$$

Теорема Лапласа: визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка чи стовпця на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\Delta(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} \text{ — розклад визначника за елементами } i\text{-го рядка;}$$

$$\Delta(A) = \sum_{i=1}^m a_{ij} A_{ij} \text{ — розклад визначника за елементами } j\text{-го стовпця.}$$

Визначник першого порядку:

$$\Delta_1(A) = |a_{11}| = a_{11}.$$

Визначник другого порядку:

$$\Delta_2(A) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}|a_{22}| + a_{12}(-1)^{1+2}|a_{21}| =$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Властивості визначників

1. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють 0, то $\det(A) = 0$.
2. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника помножити на одне і те саме число λ , то і весь визначник помножиться на це число.
3. При транспонуванні матриці її визначник не змінюється.
4. При перестановці двох рядків (стовпців) визначник змінює знак.
5. Визначник, що має однакові рядки (стовпці), дорівнює 0.
6. Визначник, що має пропорційні рядки (стовпці), дорівнює 0.
7. Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює 0:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = 0 \quad (i \neq j).$$

8. Визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне і те саме число.
9. Визначник добутку двох квадратних матриць дорівнює добуткові їх визначників $C = A \cdot B \rightarrow |C| = |A| \cdot |B|$.
10. Визначник діагональної чи трикутної матриці дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

Зауваження. При обчисленні визначника доцільно перетворити його так, щоб одержати в рядку чи стовпці значну кількість нулів, а потім розкласти визначник за елементами цього рядка (стовпця) або привести визначник до трикутного вигляду і застосувати властивість 10.

Приклад 1.3. Обчислити визначник 3-го порядку трьома способами.

Для полегшення розуміння виду перетворень визначника скористаємося наступними позначеннями: e_i – i -й рядок, d_j – j -й стовпець визначника. Тоді запис $e_2 / 2$ означає ділення кожного елемента другого рядка на 2 (при цьому за знак визначника виноситься множник 2), запис $e_2 - 2e_1$ означає, що з кожного елемента 2-го рядка необхідно відняти відповідні елементи 1-го рядка, помножені на 2.

1) за формулою (1.1) (за правилом трикутника):

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot 8 + 4 \cdot 4 \cdot (-2) + 8 \cdot 2 \cdot 6 -$$

$$- (6 \cdot 0 \cdot (-2) + 4 \cdot 8 \cdot 8 + 4 \cdot 2 \cdot 2) = 64 - 272 = -208,$$

2) розкладом за елементами 2-го стовпця, що містить 0:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = \\ = -4(64 + 8) - 2(8 - 48) = -208,$$

3) розкладом за елементами 1-го стовпця з одержанням у ньому нулів:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1/2 \\ e_2/4 \\ e_3/2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_2 - 2e_1 \\ e_3 + e_1 \end{vmatrix} = \\ = 16 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 16 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 16(-28 + 15) = 16(-13) = -208,$$

Зауваження. Правило трикутника (1.1) застосовується лише для обчислення визначників третього порядку, а способи 2-3 – для обчислення визначників будь-якого порядку.

1.3. Обернена матриця

Означення. Матриця A називається **виродженою**, якщо $\det(A) = 0$. У випадку $\det(A) \neq 0$ матриця A називається **невиродженою**.

Означення. Матриця A^{-1} називається **оберненою** до матриці A , якщо

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

Якщо $\Delta(A) \neq 0$, то обернену матрицю можна обчислити за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (\Delta(A) \neq 0) \quad (1.2)$$

де A_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A .

Зауваження. Зверніть увагу на порядок розташування алгебраїчних доповнень у матриці (1.2). Наприклад, алгебраїчне доповнення A_{12} елемента a_{12} , розташованого в матриці A на перетині 1-го рядка і 2-го стовпця, в оберненій матриці розташовується на перетині 2-го рядка і 1-го стовпця.

Приклад 1.4. Обчислити матрицю, обернену до матриці .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Обчислимо визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 2 -$$
$$- (2 \cdot 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 \cdot 1) = 1.$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення A_{ik} елементів a_{ik} матриці A :

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0, & A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2, & A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1, \\ A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 + 3) = 1, & A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8, & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5, \\ A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1, & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5, & A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3. \end{aligned}$$

За формулою (1.2) знайдемо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -8 & 5 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Перевірка:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -8 & 5 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0+4-3 & 0+2-2 & 0-2+2 \\ 1-16+15 & -1-8+10 & 2+8-10 \\ 1-10+9 & -1-5+6 & 2+5-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

1.4 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Система m лінійних алгебраїчних рівнянь із n невідомими $x_1, x_2, \dots, x_n$ має вигляд:

[illegible]

Систему (1.3) можна записати у матричній формі

$$AX = B, \quad (1.4)$$

де A – матриця коефіцієнтів при невідомих, X матриця-стовпець невідомих, B – матриця-стовпець вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Означення

1. **Розв'язком системи (1.3)** називається впорядкована сукупність чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, які перетворюють у правильну рівність кожне рівняння системи.
2. Система називається **сумісною**, якщо вона має хоча б один розв'язок, і **несумісною**, якщо вона не має жодного розв'язку.
3. Сумісна система називається **визначеною**, якщо вона має лише один розв'язок, і **невизначеною**, якщо вона має безліч розв'язків.
4. Якщо права частина системи (1.3) дорівнює нулю $b_i = 0$, ($i=1,2, \dots, m$) то систему рівнянь називають **однорідною**, та **неоднорідною** - якщо $b_i \neq 0$.

Розглянемо деякі методи розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера.

Теорема Крамера. Нехай для системи (1.3) $m = n$, Δ – визначник матриці A , а Δ_j – визначник, отриманий з визначника Δ заміною j -го стовпця стовпцем вільних членів. Тоді при $\Delta \neq 0$ система має єдиний розв'язок:

$$x_j = \Delta_j / \Delta \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (1.5)$$

Приклад 1.5 . Розв'язати за формулами Крамера систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Визначник $\Delta \neq 0$, тому система має єдиний розв'язок.

Обчислимо визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ і знайдемо розв'язок за формулами (1.5):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -10 + 1 + 4 - (2 - 10 + 2) = 1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 15 + 4 - (6 - 1 - 20) = 2,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 + 20 - (15 + 2 - 2) = 3, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 3.$$

Метод Гаусса розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Метод Гаусса – це метод послідовного виключення змінних, коли з допомогою елементарних перетворень система рівнянь приводиться до рівносильної системи трикутного вигляду, з якою послідовно, починаючи з останніх (за номером), знаходяться всі змінні системи. Метод складається з прямого і зворотного ходу. Розглянемо на прикладі.

Приклад 1.6. Розв'язати систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Прямий хід. Шляхом елементарних перетворень над рядками систему призводять до ступінчастої або трикутної форми, або встановлюють, що система несумісна. Перетворюється розширена матриця системи (включаючи стовпець вільних членів).

Змінна x_1 виключається з усіх рівнянь, крім першого. Для цього отримуються нульові коефіцієнти при x_1 у другому і третьому рядках. Потім отримуються нульові коефіцієнти при x_2 у третьому рядку:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{pmatrix} e_1 & \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} & e_2 - 2e_1 \\ e_2 & \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} & \sim \\ e_3 & \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} & e_3 - 3e_1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -9 \\ 0 & 5 & -8 & -14 \end{pmatrix} e_2 / 3 \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -5/3 & -3 \\ 0 & 5 & -8 & -14 \end{pmatrix} e_3 - 5e_2 \end{pmatrix} \sim \end{aligned}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -5/3 & -3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -5/3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim$$

Матриця зведена до трикутного вигляду. Прямий хід завершений. Система має єдиний розв'язок, який знаходимо в результаті зворотного ходу.

Зворотний хід. З останнього рівняння системи визначається x_3 і підставляється в перше і друге рівняння. Потім із другого рівняння визначається x_2 і підставляється в перше рівняння:

$$\begin{array}{l} e_1 - 2e_3 \\ \sim \\ e_2 + (5/3)e_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} e_1 + e_2 \\ \sim \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Матричний метод розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь (метод оберненої матриці)

Розглянемо систему (1.3) при $m = n$. Нехай матриця A не вироджена ($\det A \neq 0$), тоді існує єдина обернена матриця A^{-1} . Домножимо ліву і праву частини рівняння (1.4) зліва на обернену матрицю: $(A^{-1}A)X = A^{-1}B \Leftrightarrow EX = A^{-1}B$. Оскільки $EX = X$, то розв'язок системи (1.4) має вигляд:

$$X = A^{-1}B. \quad (1.6)$$

Приклад 1.7. Методом оберненої матриці розв'язати систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Позначимо:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для матриці A обернена матриця знайдена в прикладі 1.4:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -8 & 5 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

За формулою (1.6) знаходимо розв'язок системи:

$$X = A^{-1}B, \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -8 & 5 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 5 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 5 - 8 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \\ 1 \cdot 5 - 5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь

Система (1.3) називається **однорідною**, якщо усі вільні члени дорівнюють нулю:

[illegible]

Однорідні системи завжди сумісні, оскільки завжди існує, так званий, **тривіальний** розв'язок $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \dots = \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$. Якщо в однорідній системі кількість рівнянь менше кількості невідомих ($m < n$), то така система, крім тривіального розв'язку, має безліч нетривіальних розв'язків.

Однорідні системи можна розв'язувати методами Гаусса.

Приклад 1.8

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}, \Leftrightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_2 + 2e_1 \\ e_3 + e_1 \\ e_3 - e_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_2 / 7 \\ e_1 - 2e_2 \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 - 2e_2 \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/7 & 0 \\ 0 & 1 & 4/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{7}x_3 \\ x_2 = -\frac{4}{7}x_3 \end{cases}$$

Велике практичне значення мають однорідні системи розміру $n \times n$.

Теорема. Для того щоб існував нетривіальний розв'язок системи (1.7) при $m = n$, необхідно і достатньо, щоб її визначник $\Delta(A) = 0$.

1.5 Індивідуальні завдання за темою „Лінійна алгебра”

Завдання І. Задані матриці A і B . Необхідно:

1. Знайти величину визначника матриці A трьома способами:
 - а) використавши правило трикутника;
 - б) одержавши два нулі в будь-якому рядку або стовпцю і розклавши визначник по елементах цього рядка або стовпця.
2. Знайти добуток матриць A і B .
3. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A .

Варіант 1	$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 6 & -1 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 5 & -3 & 9 \end{pmatrix}$
Варіант 2	$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

Варіант 3	$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 5 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$
Варіант 4	$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 7 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
Варіант 5	$A = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 8 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
Варіант 6	$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 8 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
Варіант 7	$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 8 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -3 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$
Варіант 8	$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 7 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
Варіант 9	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 8 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
Варіант 10	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ 7 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
Варіант 11	$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$
Варіант 12	$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 4 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$
Варіант 13	$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 8 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$
Варіант 14	$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -3 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$
Варіант 15	$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
Варіант 16	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Варіант 17	$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 7 & -3 & 11 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 6 & -5 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
Варіант 18	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 8 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
Варіант 19	$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -1 & -4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
Варіант 20	$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$
Варіант 21	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \\ 7 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
Варіант 22	$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 7 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
Варіант 23	$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ 1 & -6 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
Варіант 24	$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 7 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
Варіант 25	$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 8 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$
Варіант 26	$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$
Варіант 27	$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
Варіант 28	$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 5 & -10 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
Варіант 29	$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 10 \\ 4 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$
Варіант 30	$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 6 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & -2 & 9 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Завдання II. Знайти величину визначника четвертого порядку, скориставшись його властивостями та одержавши три нулі в будь-якому рядку.

Варіант 1 $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & -3 & 0 \end{vmatrix}$	Варіант 2 $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 15 & 3 \\ 0 & 6 & -15 & -2 \\ -1 & -8 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 6 & 0 \end{vmatrix}$	Варіант 3 $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 & 1 \\ -3 & 12 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 4 & -2 & 8 & -6 \end{vmatrix}$
Варіант 4 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & -6 & 6 \\ 10 & 3 & 8 & 7 \end{vmatrix}$	Варіант 5 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 4 & 6 & -8 & -2 \\ 3 & -15 & 9 & -6 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$	Варіант 6 $\begin{vmatrix} 1 & 18 & -2 & 6 \\ 0 & 12 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & -3 & 8 \\ -3 & -9 & 5 & -6 \end{vmatrix}$
Варіант 7 $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 & -6 \\ -3 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 11 & -4 \end{vmatrix}$	Варіант 8 $\begin{vmatrix} 7 & -4 & 6 & 13 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & -3 & 6 & 7 \end{vmatrix}$	Варіант 9 $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & -15 & -2 \\ -5 & -8 & 9 & 3 \\ 12 & 12 & 6 & 0 \end{vmatrix}$
Варіант 10 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ -3 & 12 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$	Варіант 11 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 7 \\ -6 & 0 & 2 & -4 \\ 12 & -2 & -6 & 6 \\ 18 & 3 & 8 & 26 \end{vmatrix}$	Варіант 12 $\begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 & 5 \\ 4 & 16 & -8 & 12 \\ 3 & 9 & 9 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$
Варіант 13 $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 6 & -3 & -2 \\ -3 & -9 & 5 & 2 \end{vmatrix}$	Варіант 14 $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 8 & -6 \\ -3 & 0 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & 18 & 12 \end{vmatrix}$	Варіант 15 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -6 & 8 \\ 5 & 2 & -8 & 11 \end{vmatrix}$
Варіант 16 $\begin{vmatrix} 6 & 16 & 9 & 1 \\ 0 & 6 & -15 & -2 \\ -1 & -8 & 9 & 3 \\ -1 & -2 & -6 & 1 \end{vmatrix}$	Варіант 17 $\begin{vmatrix} 1 & 10 & 14 & -15 \\ -3 & 12 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 4 & -2 & 8 & -6 \end{vmatrix}$	Варіант 18 $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 & 0 \\ -6 & 2 & 2 & -3 \\ 12 & -8 & -6 & 6 \\ 18 & 11 & 8 & 7 \end{vmatrix}$
Варіант 19 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 5 \\ -4 & 14 & -8 & 12 \\ 12 & 24 & 9 & 6 \\ 4 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$	Варіант 20 $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & 4 \\ 1 & 12 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & -3 & 8 \\ 2 & -9 & 5 & -6 \end{vmatrix}$	Варіант 21 $\begin{vmatrix} -4 & 4 & 8 & -6 \\ 3 & 0 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 18 & 12 \end{vmatrix}$

Варіант 22 $\begin{vmatrix} 3 & -6 & 12 & 18 \\ 6 & 2 & -10 & 14 \\ 5 & 2 & -8 & 11 \\ 0 & -3 & 6 & 7 \end{vmatrix}$	Варіант 23 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 18 & -9 & -2 \\ -1 & -8 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 6 & 0 \end{vmatrix}$	Варіант 24 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 12 & 6 & -9 \\ -3 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 8 & -6 \end{vmatrix}$
Варіант 25 $\begin{vmatrix} 15 & -1 & -2 & 6 \\ -6 & 0 & 2 & -3 \\ 12 & -2 & -6 & 6 \\ 12 & 3 & 10 & 4 \end{vmatrix}$	Варіант 26 $\begin{vmatrix} 5 & 6 & -9 & 17 \\ 4 & 6 & -8 & 12 \\ 3 & -15 & 9 & 6 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$	Варіант 27 $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & 1 & 10 \\ 1 & 6 & -3 & 14 \\ -3 & -9 & 5 & -14 \end{vmatrix}$
Варіант 28 $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 & -6 \\ 3 & -3 & -11 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ -6 & 3 & 18 & 12 \end{vmatrix}$	Варіант 29 $\begin{vmatrix} 3 & -6 & 12 & 18 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -6 & 8 \\ 0 & -3 & 6 & 7 \end{vmatrix}$	Варіант 30 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & -15 & -2 \\ -1 & -8 & 9 & 3 \\ 4 & 4 & 15 & 3 \end{vmatrix}$

Завдання III. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь трьома способами:

- за формулами Крамера;
- методом Гаусса;
- методом оберненої матриці.

Варіант 1 $\begin{cases} 3x + 5y - 7z = 18 \\ 6x + 7y + 2z = 17 \\ -2x - y + 4z = -9 \end{cases}$	Варіант 2 $\begin{cases} 3x + 5y - 7z = 18 \\ -x + 6y + 2z = 2 \\ 5x - y + 4z = 5 \end{cases}$	Варіант 3 $\begin{cases} -3x + 5y + 8z = 7 \\ -x + 6y + 2z = 16 \\ 5x - y + 10z = -13 \end{cases}$
Варіант 4 $\begin{cases} -3x + 5y + 8z = -8 \\ -x - 4y + 2z = -19 \\ 5x - y + 9z = 13 \end{cases}$	Варіант 5 $\begin{cases} -3x + 2y + 7z = -28 \\ -x - 3y + 2z = -1 \\ x + 2y + 4z = -15 \end{cases}$	Варіант 6 $\begin{cases} -3x + 2y - z = 8 \\ 3x - 3y + 2z = -15 \\ -5x + 2y + 4z = -9 \end{cases}$
Варіант 7 $\begin{cases} 4x + 2y - z = 15 \\ x - 3y + 2z = 16 \\ -5x + 2y + 4z = 1 \end{cases}$	Варіант 8 $\begin{cases} 4x + 3y - z = 5 \\ x - 2y + 2z = -1 \\ 3x + 2y - z = 4 \end{cases}$	Варіант 9 $\begin{cases} 7x + 3y - z = 29 \\ x - 2y + z = -14 \\ -4x + 2y - z = 11 \end{cases}$
Варіант 10 $\begin{cases} 7x - 2y - z = -4 \\ x + 4y + z = 26 \\ -4x + 5y + 6z = 13 \end{cases}$	Варіант 11 $\begin{cases} 7x - 2y - z = 14 \\ x + 4y - 3z = 2 \\ -4x + 10y - 2z = -18 \end{cases}$	Варіант 12 $\begin{cases} 6x - 2y - z = 15 \\ x + 4y - 3z = -9 \\ 3x + 10y - 2z = -16 \end{cases}$
Варіант 13 $\begin{cases} 6x + 5y - z = -13 \\ x + 4y + 5z = 5 \\ 2x + 8y + z = -8 \end{cases}$	Варіант 14 $\begin{cases} 2x + 5y - z = 3 \\ x + 5y - 3z = 14 \\ -3x + 4y + z = -2 \end{cases}$	Варіант 15 $\begin{cases} 2x + 5y - z = 5 \\ -2x + 5y + 9z = -13 \\ -3x + 4y + 7z = -13 \end{cases}$

Варіант 16 $\begin{cases} x + 5y - z = -12 \\ -2x + 6y + 9z = 20 \\ -3x + 4y + 3z = -2 \end{cases}$	Варіант 17 $\begin{cases} x + 5y - z = -9 \\ -2x - y + 4z = 2 \\ 2x + 4y + 3z = -1 \end{cases}$	Варіант 18 $\begin{cases} 4x + 5y - z = 21 \\ -2x - y + 4z = -4 \\ 2x + 3y + 3z = 15 \end{cases}$
Варіант 19 $\begin{cases} 4x + 3y - z = 17 \\ -2x - y + 4z = -4 \\ 2x + y - 6z = 2 \end{cases}$	Варіант 20 $\begin{cases} 4x + 3y - z = 14 \\ -2x - y + 4z = -3 \\ 5x + 3y - 2z = 16 \end{cases}$	Варіант 21 $\begin{cases} 2x + y + 2z = 5 \\ 3x + 2y + 3z = 8 \\ -2x + 3y + 6z = 7 \end{cases}$
Варіант 22 $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \\ -2x - 2y - z = -9 \end{cases}$	Варіант 23 $\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ 3x - 2y + 4z = -1 \\ -2x - 2y - z = -6 \end{cases}$	Варіант 24 $\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 3x + 7y + 4z = 32 \\ -2x + 4y - z = 8 \end{cases}$
Варіант 25 $\begin{cases} 5x + y - 2z = -16 \\ 3x + 7y + 2z = 16 \\ -2x + 4y - 3z = 12 \end{cases}$	Варіант 26 $\begin{cases} 5x + y - 2z = -11 \\ 3x + y + z = -8 \\ -2x + 4y - 3z = 17 \end{cases}$	Варіант 27 $\begin{cases} 5x + y - 2z = 4 \\ 3x + 12y + z = 23 \\ -2x + 4y - 3z = 11 \end{cases}$
Варіант 28 $\begin{cases} 4x + 5y - 2z = 24 \\ 3x + 12y + z = 32 \\ -2x + 4y - 3z = 5 \end{cases}$	Варіант 29 $\begin{cases} 4x + 5y - 2z = 35 \\ 3x + 12y + z = 80 \\ -2x + 4y - 3z = -5 \end{cases}$	Варіант 30 $\begin{cases} 4x + 5y - 2z = 25 \\ 3x + 13y + z = 49 \\ -2x + 4y - 3z = 3 \end{cases}$

2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

2.1 Поняття вектора та лінійні операції над векторами

Вектор $\overrightarrow{AB}$ – це напрямлений відрізок із початком у точці A і кінцем у точці B , який можна переміщати паралельно самому собі. Вектори можуть позначатися як двома великими літерами, так і однією малою зі стрілкою, наприклад $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ (рис. 1).

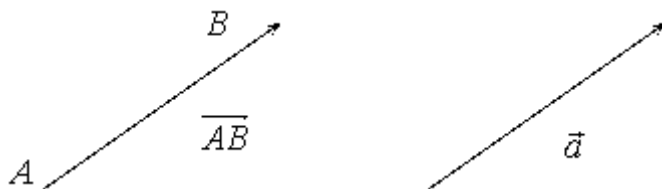


Рис. 1. Зображення і позначення векторів

Довжиною (модулем) вектора $\overrightarrow{AB}$ називається невід'ємне число, яке дорівнює довжині відрізка AB . Довжина вектора позначається $|\overrightarrow{AB}|$.

Якщо початок вектора співпадає з його кінцем, то вектор називається **нульовим** і позначається $\vec{0}$. Напрямок нульового вектора невизначений.

Вектор одиничної довжини називається **одиничним** вектором або **ортом**.

Вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називаються **колінеарними**. Колінеарність позначають символом « $\parallel$ »:

$\vec{a} \parallel \vec{b}$. Нульовий вектор колінеарний до будь-якого вектора.

Вектори, які паралельні одній площині, називаються **компланарними**.

Вектори називаються **рівними**, якщо вони колінеарні, мають однакові довжини та однакові напрями (рис. 2).

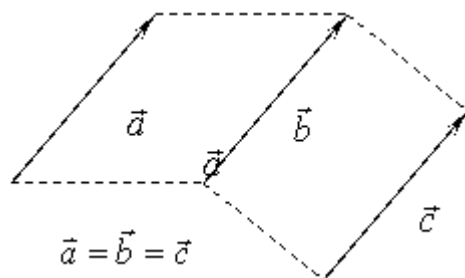


Рис. 2. Рівні вектори

Під лінійними операціями над векторами розуміють операцію множення вектора на число і операції додавання та віднімання векторів.

Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається вектор $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, довжина якого дорівнює $|\vec{b}| = |\lambda| |\vec{a}|$, а напрям співпадає з напрямом вектора $\vec{a}$ при $\lambda > 0$, і протилежний $\vec{a}$ при $\lambda < 0$ (рис. 3).

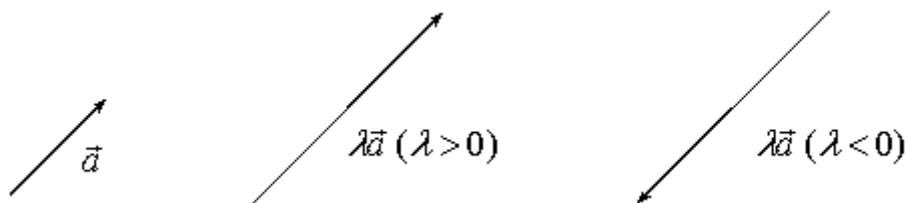


Рис. 3. Множення вектора на скаляр

Властивості операції множення вектора на число

- 1) $(\lambda + \beta) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \beta \vec{a}$ (дистрибутивна властивість);
- 2) $\lambda(\beta \vec{a}) = (\lambda \beta) \vec{a}$ (асоціативна властивість).

Сумою двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець збігається з кінцем вектора $\vec{b}$ за умови, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$ (правило

трикутника, рис. 4). Вектор $\vec{c}$ у цьому випадку являє собою діагональ паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (правило паралелограма).

Правило паралелограма

Правило трикутника

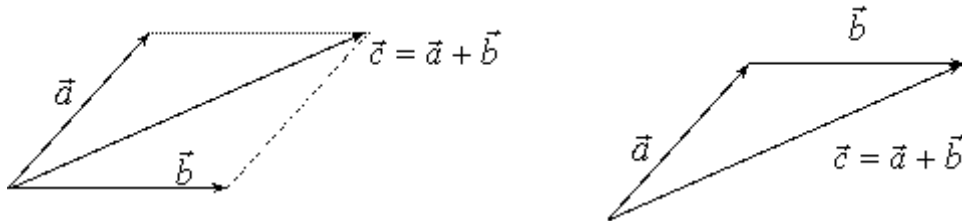


Рис. 4. Додавання двох векторів

Додавання кількох векторів здійснюється за правилом замикання ланцюжка векторів (правило многокутника – рис. 5).

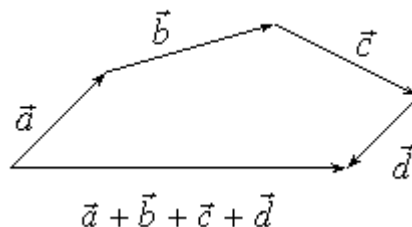


Рис. 5. Додавання кількох векторів за правилом многокутника

Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається сума вектора $\vec{a}$ і вектора $(-\vec{b})$, протилежного вектору $\vec{b}$:

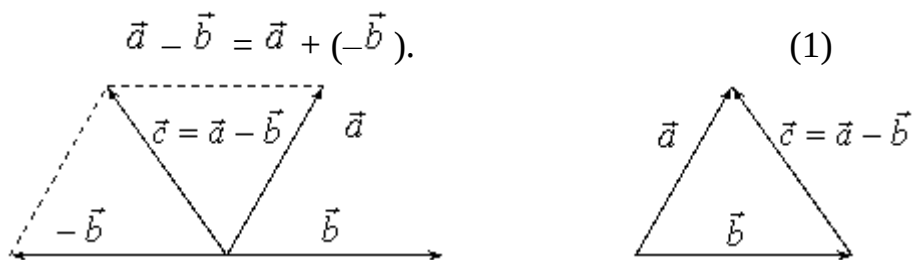


Рис. 6. Віднімання двох векторів

Властивості операції додавання векторів

- 1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (комутативна властивість);
- 2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (асоціативна властивість);
- 3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;
- 4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Нехай маємо n векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$ та n скалярних величин $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$.

Запишемо лінійну комбінацію цих векторів, використовуючи скаляри, тобто розглянемо суму векторів $\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{a}_3 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n$.

Складемо рівність:

$$\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{a}_3 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n = 0. \quad (2.1)$$

Якщо виконується рівність (2.1) при умові $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$, то вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$ називаються **лінійно незалежними**.

Якщо рівність (2.1) виконується і хоча б частина скалярів λ_i не дорівнює нулеві, то ці вектори називаються **лінійно залежними**.

Іншими словами, вектори називаються лінійно залежними, якщо будь-який з них можна виразити через лінійну комбінацію інших.

Проекція вектор на вісь

Проекцією точки A на напрямлену пряму L (вісь L) називається основа перпендикуляра (точка A_1), опущеного з точки A на дану вісь.

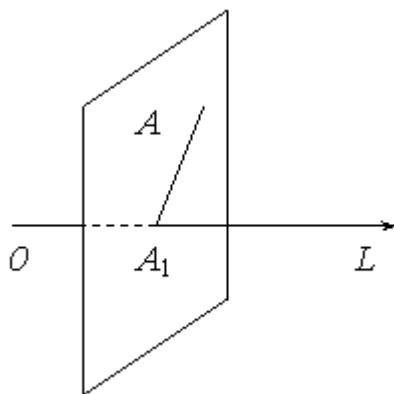


Рис. 7. Точка A_1 - проекція точки A на вісь L

Проекцією вектора $\vec{AB}$ на вісь L називається число, яке дорівнює різниці координат ($x_B - x_A$) проекцій на вісь L кінця і початку вектора $\vec{AB}$ (рис. 8).

Проекція вектора $\vec{AB}$ на вісь L дорівнює добутку довжини цього вектора на косинус кута φ між вектором $\vec{AB}$ та віссю, тобто:

$$\text{Пр}_L \vec{AB} = x_B - x_A = |\vec{AB}| \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

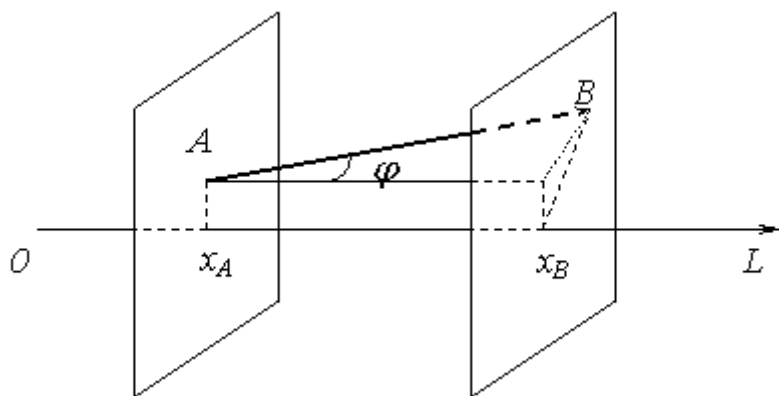


Рис. 8. Проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь L

Властивості проекції на вісь:

- 1) $\text{Pr}_L(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \text{Pr}_L \vec{a} + \text{Pr}_L \vec{b} + \text{Pr}_L \vec{c}$;
- 2) $\text{Pr}_L \lambda \vec{a} = \lambda \text{Pr}_L \vec{a}$.

Складовою вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь L називається вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$, де A_1 – проекція точки A на вісь L , B_1 – проекція точки B на вісь L .

2.2 Вектори у декартовій системі координат

У прямокутній декартовій системі координат розглянемо довільний вектор $\overrightarrow{OM}$ (рис. 9).

Вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ називають полярним **радіусом-вектором** точки M . Спроектуємо цей вектор на координатні осі. Інакше кажучи, розкладемо вектор $\vec{r}$ на складові вектори за координатними осями. Як показано на рис. 9 точки M_1, M_2, M_3 – проекції точки M на відповідні координатні осі.

Вектори $\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_3}$ – складові вектора $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ за відповідними координатними осями.

Вектор $\overrightarrow{OM}$ є сумою векторів $\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_3}$, тобто

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}. \quad (2.2)$$

Кожний з цих складових векторів можна надати у вигляді: $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OM_2} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OM_3} = z\vec{k}$, де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – базисні вектори декартової системи координат у просторі. Підставляючи ці значення в (2.2), одержуємо:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

де x, y, z – скалярні величини, які називаються координатами радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$ у заданому базисі.

Точка M має координати свого радіус-вектора $\vec{r}$, тобто $M(x, y, z)$. Координати точки у просторі або її радіус-вектор $\vec{r}$ однозначно вказують на її положення в просторі відносно вибраної системи координат.

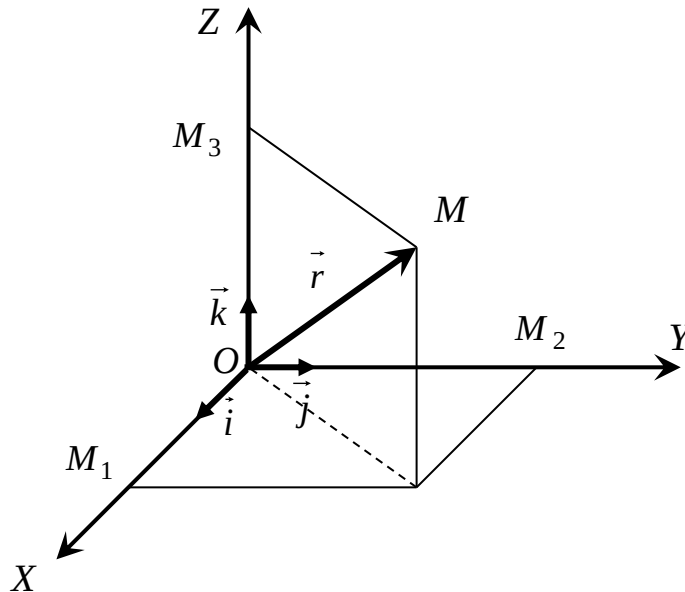


Рис. 9

Довільний вектор $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ можна надати у вигляді у вигляді:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \quad (2.3)$$

Подання вектора у вигляді суми компонентів (2.3) називається **розкладанням вектора за координатним базисом** (рис. 9).

Довжина (модуль) вектора визначається за формулою

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

На рисунку 10 вектор $\vec{a}$ утворює з координатними осями Ox, Oy, Oz кути α, β, γ відповідно. Тоді $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ називаються **напрямними косинусами** вектора $\vec{a}$. Очевидно, напрямні косинуси та модуль вектора повністю визначають положення вектора у просторі.

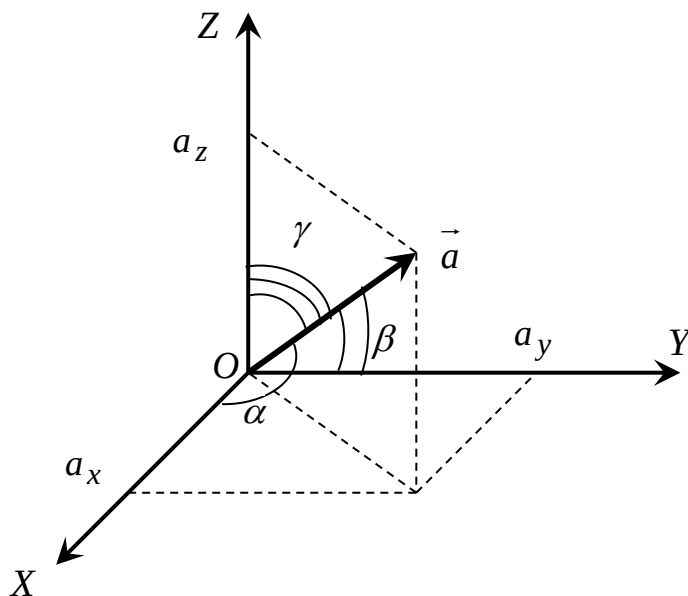


Рис. 10

Враховуючи властивості проєкції вектора на вісь, маємо:

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos \alpha, \quad a_y = |\vec{a}| \cdot \cos \beta, \quad a_z = |\vec{a}| \cdot \cos \gamma;$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Лінійні операції над векторами у координатній формі:

Дано вектори $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ та $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$:

1) додавання та віднімання

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z);$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z);$$

2) множення вектора на скаляр

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

Умови колінеарності двох векторів $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ та $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$ визначаються співвідношенням

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

2.3 Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком $\vec{a} \cdot \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, що дорівнює добутку їхніх довжин на косинус кута φ між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi.$$

Властивості скалярного добутку векторів

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (комутативна властивість);

2) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (дистрибутивна властивість);

3) $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$ (асоціативна властивість);

4) $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$, причому $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ тільки при $|\vec{a}| = 0$;

5) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ – скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату довжини вектора.

Геометричні властивості скалярного добутку векторів

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ (необхідна і достатня умова перпендикулярності двох векторів);

2) $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow \varphi$ – гострий кут;

3) $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow \varphi$ – тупий кут.

Якщо вектори задані в координатній формі:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} = (b_x, b_y, b_z),$$

то скалярний добуток векторів дорівнює сумі добутків їх відповідних координат:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Приклад 2.1

$$\vec{a} = (1, 2, 3), \quad \vec{b} = (-2, 0, 4) \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 10.$$

Деякі важливі формули

Довжина вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Відстань між двома точками $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$:

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \Rightarrow$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

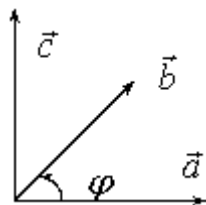
Необхідна і достатня умова перпендикулярності двох векторів:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

2.4 Векторний добуток векторів

Упорядкована трійка некомпланарних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається **правою (лівою)**, якщо після зведення до спільного початку найкоротший поворот вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$, що спостерігається з кінця вектора $\vec{c}$, відбувається проти обертання годинникової стрілки (за годинниковою стрілкою, рис. 11).

Права трійка



Ліва трійка

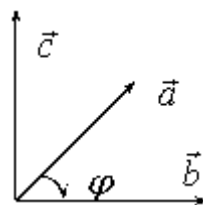


Рис. 11. Права і ліва трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

Декартова система координат, яка зв'язана з трійкою $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, є правою.

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, що задовольняє наступним вимогам:

- 1) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює добутку довжин векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на синус кута між ними, тобто $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$;
- 2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний кожному із векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;
- 3) вектор $\vec{c}$ напрямлений так, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку (рис. 12).

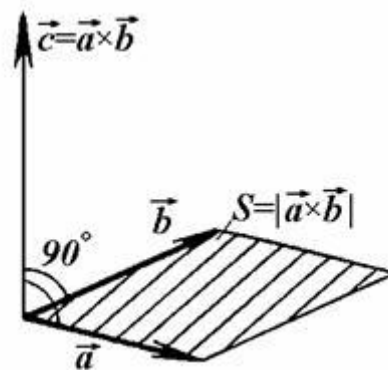


Рис. 12. Векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$

Алгебраїчні властивості векторного добутку

- 1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (антикомутативна властивість);
- 2) $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$ (асоціативна властивість);
- 3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (дистрибутивна властивість);
- 4) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

Геометричні властивості векторного добутку

1. Необхідною і достатньою умовою колінеарності двох ненульових векторів є рівність нулю їхнього векторного добутку.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

2. **Модуль векторного добутку** векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах (рис. 12):

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

3. Площа трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Якщо вектори задані в координатній формі $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ та $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$, то векторний добуток векторів можна записати у вигляді (2.21)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}.$$

Наслідок. Вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх координати пропорційні, тобто:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Приклад 2.2. Знайти площу трикутника з координатами вершин:

$A(1, 1, 2)$, $B(0, 2, 3)$, $C(-1, 2, 1)$.

$$\vec{AB} = (-1, 1, 1), \quad \vec{AC} = (-2, 1, -1), \quad \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k},$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 9 + 1} = \frac{\sqrt{14}}{2} \quad (\text{кв. од.}).$$

2.5 Змішаний добуток векторів

Змішаним добутком трьох векторів називається число, яке дорівнює векторному добутку $\vec{a} \times \vec{b}$, помноженому скалярно на вектор $\vec{c}$: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Геометричні властивості мішаного добутку

1. Змішаний добуток некопланарних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, взятому із знаком плюс, якщо трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ права і зі знаком мінус, якщо трійка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ліва. Об'єм

паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (рис. 13) дорівнює $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

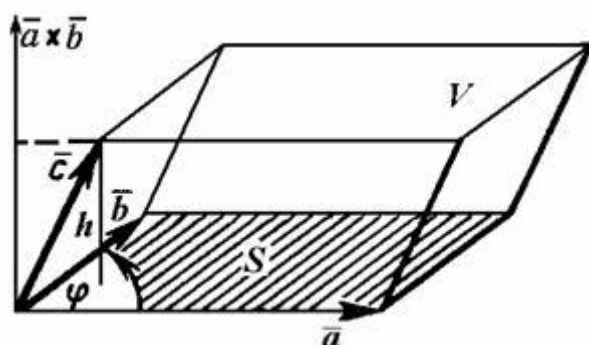


Рис. 13. Паралелепіпед, побудований на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

2. Об'єм чотирикутної піраміди (рис. 14):

$$V = \frac{1}{3} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

3. Об'єм трикутної піраміди (рис. 15):

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

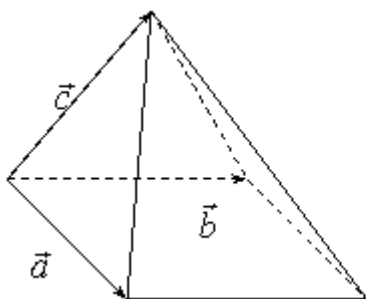


Рис. 14. Чотирикутна піраміда

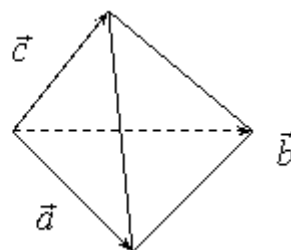


Рис. 15. Трикутна піраміда

4. Необхідною й достатньою умовою компланарності трьох векторів є рівність нулю їх змішаного добутку:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \text{вектори } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ компланарні.}$$

Основна алгебраїчна властивість мішаного добутку

Колова перестановка трьох множників мішаного добутку не змінює його значення; перестановка двох сусідніх множників змінює знак добутку:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = \\ &= -(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

Якщо вектори задані в координатній формі $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$, то змішаний добуток трьох векторів дорівнює визначнику, складеному з координат цих векторів:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) e_x + (a_z b_x - a_x b_z) e_y + (a_x b_y - a_y b_x) e_z. \end{aligned}$$

Необхідна і достатня умова компланарності трьох векторів в ортонормованому базисі:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Приклад 2.3

Чи є компланарними вектори $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (0, 1, 2)$, $\vec{c} = (3, 2, 1)$?
Три вектори компланарні, якщо їх мішаний добуток дорівнює нулю:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \{e_3 - 3e_1\} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Тобто, вектори компланарні.

Приклад 2.4. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах

$$\vec{a} = (1, 1, 1), \vec{b} = (0, 1, 2), \vec{c} = (3, 2, 2).$$

Об'єм паралелепіпеда дорівнює абсолютній величині мішаного добутку векторів, на яких він побудований.

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \right| = \{e_3 - 3e_1\} = \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \right| = 1 \quad (\text{куб. од.}).$$

2.6 Індивідуальні завдання за темою „Векторна алгебра”

I. У декартовій прямокутній системі координат задано п'ять точок:

$$A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), A_3(x_3, y_3, z_3), A_4(x_4, y_4, z_4), A_5(x_5, y_5, z_5).$$

Необхідно:

1. Знайти проекцію вектора $\vec{A_1A_2}$ на вектор $\vec{A_1A_4}$.
2. Знайти кут між векторами $\vec{A_1A_2}$ та $\vec{A_1A_4}$.
3. Обчислити площу трикутника $A_1A_2A_3$.
4. Обчислити об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$.

Варіант 1	$A_1(1, 4, 1)$	$A_2(3, 2, 1)$	$A_3(1, -1, -3)$	$A_4(10, 7, 4)$
Варіант 2	$A_1(-2, 3, -2)$	$A_2(-3, 5, 4)$	$A_3(6, 5, 3)$	$A_4(2, -3, 4)$
Варіант 3	$A_1(-3, -5, 6)$	$A_2(2, 7, -2)$	$A_3(9, 6, 3)$	$A_4(7, 5, 3)$
Варіант 4	$A_1(6, -3, 2)$	$A_2(4, 8, -3)$	$A_3(3, 6, -4)$	$A_4(5, 3, 3)$
Варіант 5	$A_1(4, 6, 3)$	$A_2(-6, 2, 6)$	$A_3(3, -2, 3)$	$A_4(-5, 6, 4)$
Варіант 6	$A_1(6, 6, 4)$	$A_2(5, -4, 1)$	$A_3(7, 8, 3)$	$A_4(-4, 6, 2)$
Варіант 7	$A_1(-2, 3, 4)$	$A_2(5, 5, 6)$	$A_3(2, 3, 40)$	$A_4(4, -3, 2)$
Варіант 8	$A_1(8, 7, 5)$	$A_2(4, -3, 2)$	$A_3(6, 4, 1)$	$A_4(-2, 5, 8)$
Варіант 9	$A_1(-5, 6, 4)$	$A_2(8, 9, 10)$	$A_3(4, 8, 7)$	$A_4(-2, 1, 5)$
Варіант 10	$A_1(2, -1, 2)$	$A_2(3, 2, -2)$	$A_3(-3, 6, -2)$	$A_4(4, -1, -3)$
Варіант 11	$A_1(1, -1, 3)$	$A_2(8, 5, 3)$	$A_3(9, 6, 3)$	$A_4(3, 6, -4)$
Варіант 12	$A_1(-5, 6, 1)$	$A_2(-1, 3, 0)$	$A_3(1, -2, 2)$	$A_4(-1, 1, 3)$
Варіант 13	$A_1(1, -7, 5)$	$A_2(0, -9, 7)$	$A_3(2, 3, -2)$	$A_4(-3, 1, -1)$
Варіант 14	$A_1(5, 2, 3)$	$A_2(7, 5, -6)$	$A_3(-2, -5, -1)$	$A_4(-1, -1, -1)$
Варіант 15	$A_1(-2, 4, 2)$	$A_2(3, 7, 0)$	$A_3(5, 4, 3)$	$A_4(-1, -3, 2)$
Варіант 16	$A_1(6, 5, 4)$	$A_2(9, -2, 7)$	$A_3(6, 4, 1)$	$A_4(8, 3, 2)$
Варіант 17	$A_1(3, 4, -1)$	$A_2(5, -1, 1)$	$A_3(-2, 0, 3)$	$A_4(-3, -5, 5)$
Варіант 18	$A_1(2, 3, 4)$	$A_2(11, 4, 7)$	$A_3(6, 10, 12)$	$A_4(4, -1, 5)$
Варіант 19	$A_1(1, 8, -3)$	$A_2(9, -2, 4)$	$A_3(12, 5, 4)$	$A_4(8, -2, 4)$
Варіант 20	$A_1(4, -3, 5)$	$A_2(6, 9, 0)$	$A_3(7, 3, 4)$	$A_4(2, 3, 5)$
Варіант 21	$A_1(1, 1, 1)$	$A_2(2, -1, 1)$	$A_3(4, -2, 3)$	$A_4(8, -4, 5)$
Варіант 22	$A_1(6, -3, 2)$	$A_2(5, 1, 4)$	$A_3(2, 1, 1)$	$A_4(4, 0, -2)$
Варіант 23	$A_1(0, -2, 1)$	$A_2(4, -2, 1)$	$A_3(-2, 0, -2)$	$A_4(-10, 2, -3)$
Варіант 24	$A_1(9, 7, 4)$	$A_2(3, -2, -5)$	$A_3(4, 7, 6)$	$A_4(8, 0, -4)$
Варіант 25	$A_1(1, 1, -3)$	$A_2(-2, -1, 1)$	$A_3(3, 1, -2)$	$A_4(8, 2, -3)$
Варіант 26	$A_1(6, 4, -1)$	$A_2(-2, 5, -2)$	$A_3(3, 3, 5)$	$A_4(4, -4, 3)$
Варіант 27	$A_1(4, -3, 3)$	$A_2(5, 2, 6)$	$A_3(2, 3, 2)$	$A_4(5, 0, -2)$
Варіант 28	$A_1(5, 2, -4)$	$A_2(8, -1, 7)$	$A_3(5, 6, 3)$	$A_4(-1, 4, 2)$
Варіант 29	$A_1(-1, 4, 4)$	$A_2(7, 6, 3)$	$A_3(2, 4, 7)$	$A_4(7, -5, 3)$
Варіант 30	$A_1(6, 6, 4)$	$A_2(5, -4, 1)$	$A_3(7, 8, 3)$	$A_4(-4, 6, 2)$

3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

3.1 Пряма лінія на площині

Рівняння $F(x, y) = 0$ називається **рівнянням лінії**, якщо його задовольняють усі точки, що лежать на даній лінії, і не задовольняє жодна точка, що не лежить на даній лінії. Найпростішою лінією є пряма.

Задавши на площини систему координат, положення будь-якої прямої можна визначати різними способами, тобто за допомогою різних параметрів. В залежності від вибору цих параметрів розрізняють наступні види рівнянь прямої:

1. Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ та перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B)$:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0. \quad (3.1)$$

Орієнтацію прямої L (рис. 3.1) на площині можна задати за допомогою нормального вектора $\vec{n} = (A, B)$ (довільного вектора, перпендикулярного до L).

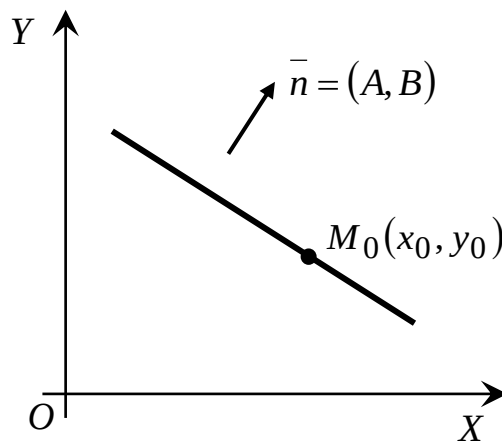


Рис. 3.1

2. Загальне рівняння прямої:

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0. \quad (3.2)$$

Дослідимо рівняння (3.2):

– при $C = 0$ рівняння (3.2) має вид $A \cdot x + B \cdot y = 0$, тобто пряма проходить через початок координат;

– при $B = 0$ рівняння (3.2) має вид $A \cdot x + C = 0$, тобто пряма паралельна осі Ox ;

– при $A = 0$ рівняння (3.2) має вид $B \cdot y + C = 0$, тобто пряма паралельна осі Oy ;

– при $B = 0, C = 0$ рівняння (3.2) має вид $A \cdot x = 0$, тобто отримаємо рівняння осі Oy ;

– при $A=0$, $C=0$ рівняння (3.2) має вид $B \cdot y = 0$, тобто отримаємо рівняння осі Ox .

3. Канонічне рівняння прямої (3.3) та параметричне рівняння прямої (3.4):

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}; \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot l \\ y = y_0 + t \cdot m \end{cases}. \quad (3.4)$$

Пряма лінія (рис. 3.2), що задана рівняннями виду (3.3) або (3.4), проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ з напрямляючим вектором $\vec{s} = (l, m)$, який паралельний даній прямій.

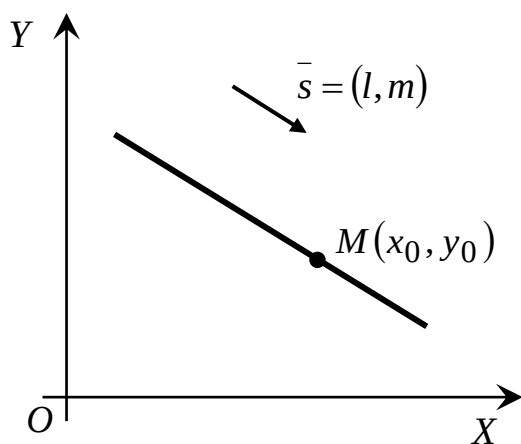


Рис. 3.2

4. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$

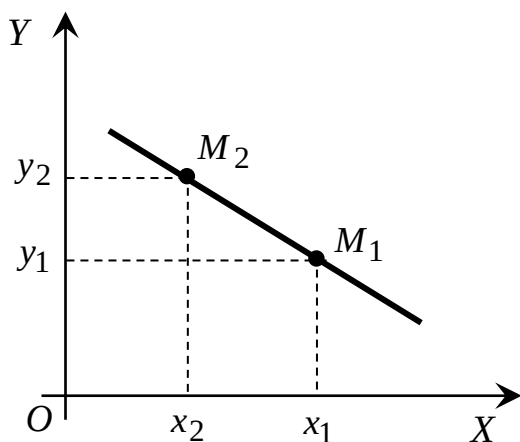


Рис. 3.3

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (3.5)$$

5. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом (рис. 3.4)

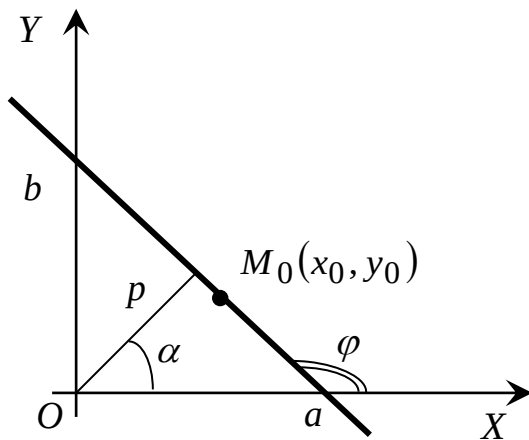
$$y = k \cdot x + b, \quad (3.7)$$

де $k = \operatorname{tg} \varphi$ – кутовий коефіцієнт прямої, b – відрізок, який відсікає пряма від координатної осі.

6. Рівняння прямої, яка проходить у заданому напрямку через задану точку (рівняння в'язки) (рис. 3.4):

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0). \quad (3.8)$$

7. Рівняння прямої у відрізках на осях



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (3.6)$$

де a та b – відрізки, які відсікає пряма від координатних осей OX та OY відповідно.

Рис. 3.4

8. Нормальне рівняння прямої (рис.3.4):

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha - p = 0, \quad (3.9)$$

де p – відстань від початку координат до прямої; α, β – кути, які створює нормаль проведена з початку координат з осями Ox, Oy .

9. Відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої:

– якщо пряма задана рівнянням виду (3.9)

$$d_M = |x_0 \cdot \cos \alpha + y_0 \cdot \sin \alpha - p|, \quad (3.10)$$

– якщо пряма задана рівнянням виду (3.2)

$$d_M = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (3.11)$$

Приклад 3.1. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(2; 3)$ і $M_2(3; 5)$.

Розв'язання. Скористаємося формулою (3.5):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \quad \frac{x-2}{-3-2} = \frac{y-3}{5-3} \Rightarrow 2(x-2) = -5(y-3).$$

В результаті перетворень отримаємо:

$2x + 5y - 19 = 0$ – загальне рівняння прямої, звідки вектор нормалі $n = (2; 5)$;

Тоді: $\frac{x}{19/2} + \frac{y}{19/5} = 1$ – рівняння прямої у відрізках на осях
($a = 19/2; b = 19/5$);

$y = -\frac{2}{5}x + \frac{19}{5}$ – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом ($k = -2/5; b = 19/5$).

Приклад 3.2. Дані вершини трикутника $A(1; 0)$, $B(5; 4)$, $C(-1; 3)$. Скласти рівняння сторін трикутника, медіани й висоти, проведених із вершини A (рис. 3.5).

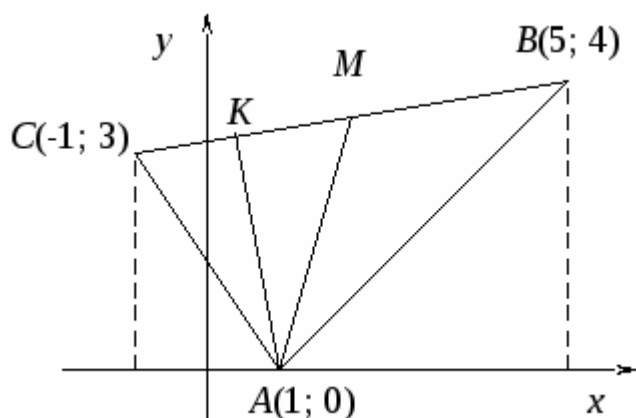


Рис. 3.5

Розв'язання

а) рівняння сторін знайдемо як рівняння прямих, що проходять через дві точки:

$$AB: \frac{x-1}{5-1} = \frac{y-0}{4-0} \Rightarrow x-1=y \Rightarrow x-y-1=0;$$

$$BC: \frac{x-5}{-1-5} = \frac{y-4}{3-4} \Rightarrow x-5=6(y-4) \Rightarrow x-6-y+19=0;$$

$$CA: \frac{x+1}{1+1} = \frac{y-3}{0-3} \Rightarrow -3(x+1)=2(y-3) \Rightarrow 3x+2y-3=0.$$

б) медіану, опущену з вершини A на сторону BC , позначимо AM . Точка M поділяє сторону BC навпіл, тому її координати

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = 2, \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{7}{2}.$$

$$\text{Рівняння медіани } AM: \frac{x-1}{2-1} = \frac{y-0}{7/2} \Rightarrow 7x-2y-7=0.$$

в) висоту, опущену з вершини A на сторону BC , позначимо AK . Пряма AK проходить через точку $A(1; 0)$ перпендикулярно прямій BC , тобто паралельно вектору $a_{AK} = n_{BC} = (1; -6)$. Отже, її рівняння:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{-6} \Rightarrow 6x+y+6=0.$$

Взаємне розташування двох прямих на площині:

Прямі задані загальним рівнянням:	Прямі задані рівнянням з кутовим коефіцієнтом:
$L_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0; \quad \overline{n_1} = (A_1; B_1)$	$L_1 : y = k_1x + b$
$L_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0; \quad \overline{n_2} = (A_2; B_2)$	$L_2 : y = k_2x + b$
1. Умова паралельності прямих:	
$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$	$k_1 = k_2$
2. Умова перпендикулярності прямих	
$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$	$k_1 \cdot k_2 = -1$
3. Кут між прямими	

$$\cos \varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|$$

Приклад 3.3. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2; -3)$ перпендикулярно до прямої $x + 2y + 3 = 0$.

Розв'язання

1-й спосіб. Дану пряму представимо у вигляді (з рівняння виразимо y):

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}, \quad \text{де згідно з (3.7) } k_1 = -1/2.$$

Згідно з (3.8) рівнянням шуканої прямої є:

$$y + 3 = k_2(x - 2).$$

З умови перпендикулярності прямих маємо $k_2 = 2$. Звідси

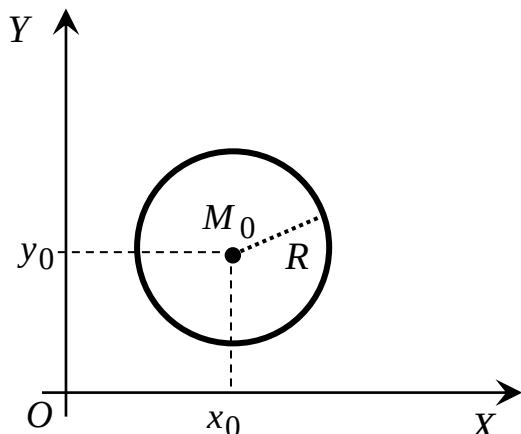
$$y + 3 = 2(x - 2) \quad \Rightarrow \quad 2x - y - 7 = 0.$$

2-й спосіб. Вектор нормалі до даної прямої має координати $n = (1; 2)$. Цей вектор паралельний шуканій прямій. Рівняння прямої, що проходить через точку паралельно вектору нормалі $a = n = (1; 2)$ має вигляд:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \quad \frac{x - 2}{1} = \frac{y + 3}{2}, \quad 2x - y - 7 = 0.$$

3.2 Криві другого порядку

Коло – це геометричне місце точок площини, рівновіддалених від даної точки $M_0(x_0, y_0)$, яку називають центром кола; R – радіус кола. Рівняння кола має вид (3.12). Якщо центр кола співпадає з початком координат, то рівняння кола має вид (3.13)



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2; \quad (3.12)$$

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (3.13)$$

Рис. 3.6

Еліпсом називається геометричне місце точок площини, сума відстаней яких від двох заданих точок $F_1(c;0)$ та $F_2(-c;0)$, що називаються фокусами, є величина стала $2a$, причому ця величина більша за відстань між фокусами (рис. 3.7).

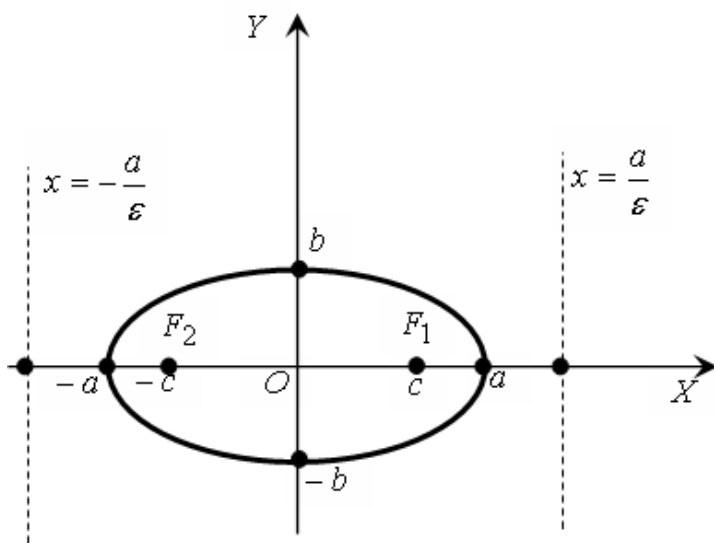


Рис. 3.7

F_1 та F_2 – фокуси еліпса;

a – велика піввісь;

b – мала піввісь;

$F_1F_2 = 2c$ – фокусна відстань;

ε – ексцентриситет;

$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} \left(x = \pm \frac{a^2}{c} \right)$ – рівняння

директрис.

Канонічне рівняння еліпса з фокусами на осі Ox має вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.14)$$

Основна властивість еліпса полягає у співвідношенні

$$c^2 = a^2 - b^2. \quad (3.15)$$

Форма еліпса характеризується *ексцентриситетом*. Значення ексцентриситету ε оцінює «сплюсненість» еліпса.

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad 0 < \varepsilon < 1. \quad (3.16)$$

Якщо $a = b$, то при $\varepsilon = 0$ маємо коло, при $b = 0$, $\varepsilon = 1$ – відрізок. Це випадки виродженого еліпса.

Відстань деякої точки еліпса $M(x_M, y_M)$ до його фокусів називаються фокальними радіусами:

$$r_1 = F_1M = a - \varepsilon \cdot x_M \text{ — правий,} \quad (3.17)$$

$$r_2 = F_2M = a + \varepsilon \cdot x_M \text{ — лівий,}$$

$$r_1 + r_2 = 2a. \quad (3.18)$$

Приклад 3.1. Звести до канонічного вигляду рівняння

$9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y = 164$. Визначити тип кривої, зробити креслення.

Розв'язання. Виділимо в рівнянні лінії повні квадрати:

$$9(x^2 - 4x + 4) - 36 + 25(y^2 + 2y + 1) - 25 = 164 \quad 9(x-2)^2 + 25(y+1)^2 = 225$$

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1 \quad \frac{x'^2}{5^2} + \frac{y'^2}{3^2} = 1 \quad \text{де } \begin{cases} x' = x-2, \\ y' = y+1. \end{cases}$$

В системі координат $x'O'y'$ отримане канонічне рівняння еліпса. Центр еліпса має координати $O(2, -1)$. Піввісь еліпса $a = 5$, $b = 3$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$, $\varepsilon = c/a = 4/5$ (рис. 3.8).

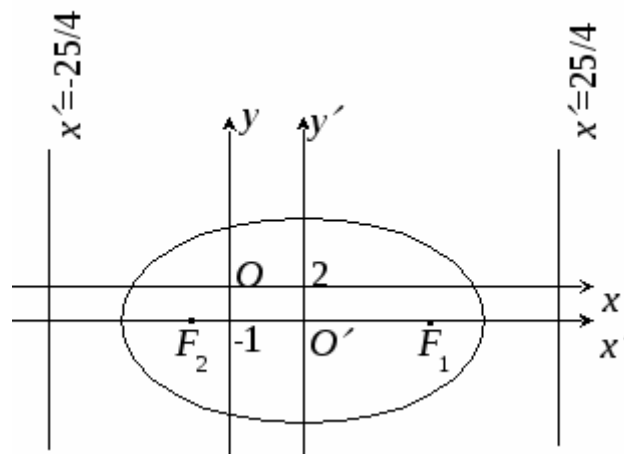


Рис. 3.8

Гіперболою називається геометричне місце точок, різниця відстаней яких від двох заданих точок $F_1(c; 0)$ та $F_2(-c; 0)$, що називаються *фокусами*, є величина стала $2a$, причому ця величина менша за відстань між фокусами.

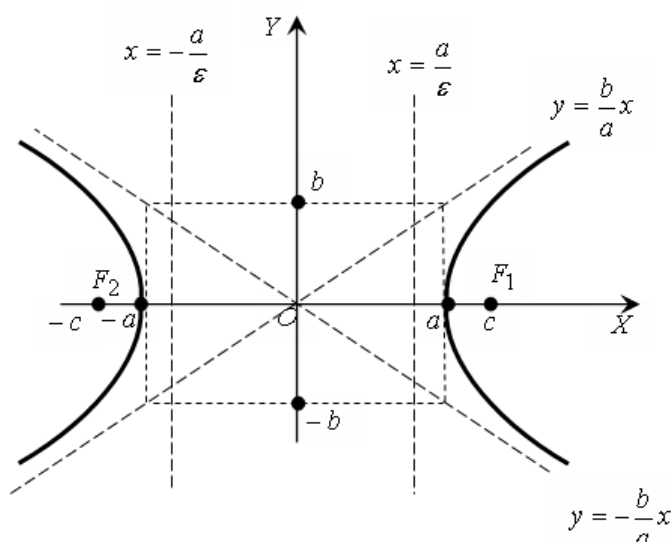


Рис. 3.9

Канонічне рівняння гіперболи з фокусами на осі Ox має вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.19)$$

Основна властивість гіперболи полягає у співвідношенні

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (3.20)$$

Значення ексцентриситету ε гіперболи

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad \varepsilon > 1. \quad (3.21)$$

Відстань деякої точки гіперболи $M(x_M, y_M)$ до його фокусів називаються фокальними радіусами:

$$r_1 = F_1M = |a - \varepsilon \cdot x_M| - \text{правий}, \quad (3.22)$$

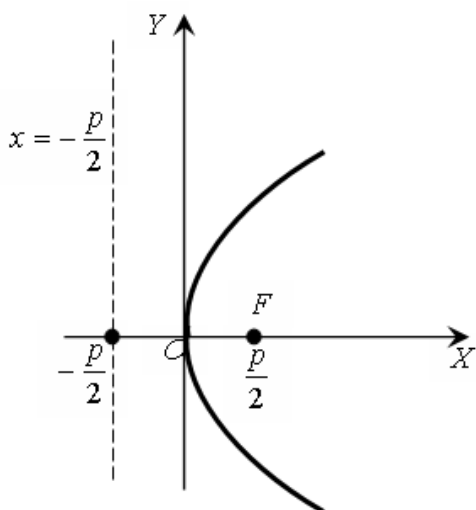
$$r_2 = F_2M = |a + \varepsilon \cdot x_M| - \text{лівий},$$

$$r_1 - r_2 = 2a. \quad (3.23)$$

Параболою називається геометричне місце точок площини, рівновіддалених від заданої точки $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, яка називається фокусом, і від

заданої прямої $x = -\frac{p}{2}$, яка називається директрисою.

F_1 та F_2 – фокуси гіперболи;
 a – дійсна піввісь;
 b – уявна піввісь;
 $F_1F_2 = 2c$ – фокусна відстань;
 ε – ексцентриситет;
 $x = \pm \frac{a}{\varepsilon} \left(x = \pm \frac{a^2}{c} \right)$ – рівняння директрис;
 $y = \pm \frac{b}{a}x$ – рівняння асимптот.



F – фокус параболи;

$x = -\frac{p}{2}$ – рівняння директриси.

Рис. 3.10

Канонічне рівняння параболи, симетричної відносно осі Ox має вид

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x. \quad (3.24)$$

Якщо $p > 0$, то вітки параболи розташовані праворуч, а якщо $p < 0$ – ліворуч.

Парабола $x^2 = 2 \cdot p \cdot y$ симетрична відносно осі Oy : якщо $p > 0$, то вітки даної параболи розташовані догори, а якщо $p < 0$ – донизу.

3.3. Індивідуальні завдання за темою „Аналітична геометрія на площині”

Завдання І. Задані координати вершин трикутника ABC . Знайти:

- 1) рівняння сторони AB , записати його у вигляді рівняння у відрізках;
- 2) рівняння прямої BK , що проходить через точку B паралельно стороні AC ;
- 3) рівняння висоти CD та її довжини;

Варіант 1.	A (1,-3)	B (0,7)	C (-2,4)
Варіант 2.	A (7,0)	B (1,4)	C (-8,-4)
Варіант 3.	A (0,2)	B (-7,-4)	C (3,2)
Варіант 4.	A (3,-1)	B (11,3)	C (-6,2)
Варіант 5.	A (-2,-3)	B (0,7)	C (8,3)
Варіант 6.	A (1,2)	B (3,12)	C (11,8)
Варіант 7.	A (-4,-1)	B (-2,9)	C (6,5)
Варіант 8.	A (5,4)	B (7,11)	C (15,10)
Варіант 9.	A (-8,-3)	B (4,-12)	C (8,10)
Варіант 10.	A (1,0)	B (13,-9)	C (17,13)
Варіант 11.	A (6;2)	B (30;-5)	C (12;19)
Варіант 12.	A (4;3)	B (-12;-9)	C (-5;15)

Варіант 13.	A (-1;7)	B (11;2)	C (17;10)
Варіант 14.	A (1;1)	B (-15;11)	C (-8;13)
Варіант 15.	A (-14;10)	B (10;3)	C (-8;27)
Варіант 16.	A (7;1)	B (-5;-4)	C (-9;-1)
Варіант 17.	A (-2;1)	B (-18;-11)	C (-6;-3)
Варіант 18.	A (10;-1)	B (-2;-6)	C (-6;23)
Варіант 19.	A (-12;6)	B (12;-1)	C (-6;23)
Варіант 20.	A (8;0)	B (-4;-5)	C (-8;-2)
Варіант 21.	A (11;0)	B (-5;4)	C (-1;-1)
Варіант 22.	A (10;2)	B (-6;6)	C (-2;1)
Варіант 23.	A (14;0)	B (-2;4)	C (2;-1)
Варіант 24.	A (13;2)	B (-3;6)	C (1;1)
Варіант 25.	A (11;3)	B (-5;7)	C (-1;2)
Варіант 26.	A (13;-1)	B (-3;3)	C (1;-2)
Варіант 27.	A (11;-2)	B (-5;6)	C (-1;1)
Варіант 28.	A (13;0)	B (-3;4)	C (1;-1)
Варіант 29.	A (11;-1)	B (-5;3)	C (-1;-2)
Варіант 30.	A (13;3)	B (-3;7)	C (1;2)

Завдання II. Звести до канонічного вигляду рівняння кривої другого порядку, визначити її вид та знайти всі її параметри. Побудувати криву другого порядку.

Варіант 1	$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$
Варіант 2	$25x^2 - 100x + 9y^2 + 54y - 44 = 0$
Варіант 3	$4x^2 - 8x - y^2 + 2y - 1 = 0$
Варіант 4	$x^2 - 6x - 4y + 29 = 0$
Варіант 5	$x^2 + y^2 - 2x + 10y + 25 = 0$
Варіант 6	$4x^2 - 8x + 9y^2 + 36y + 4 = 0$
Варіант 7	$4x^2 - y^2 - 16x + 6y + 23 = 0$
Варіант 8	$y = x^2 - 8x + 15$
Варіант 9	$x^2 - 4x + y^2 = 0$
Варіант 10	$x^2 - 2x + 4y^2 + 8y + 1 = 0$
Варіант 11	$4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y - 68 = 0$
Варіант 12	$y^2 - 6x + 14y + 49 = 0$
Варіант 13	$x^2 + y^2 - 8x - 8y + 7 = 0$
Варіант 14	$x^2 + 4y^2 + 4x - 16y - 16 = 0$

Варіант 15	$x^2 - 4y^2 + 6x + 8 = 0$
Варіант 16	$-x^2 - 6x - 6y - 15 = 0$
Варіант 17	$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$
Варіант 18	$4x^2 + 9y^2 + 32x - 54y + 109 = 0$
Варіант 19	$9x^2 + 90x - 16y^2 + 81 = 0$
Варіант 20	$y = -x^2 + 4x + 1$
Варіант 21	$x^2 + y^2 - 10x + 24y - 56 = 0$
Варіант 22	$16x^2 + 9y^2 + 32x - 54y - 47 = 0$
Варіант 23	$x^2 - 4y^2 + 2x - 8y - 7 = 0$
Варіант 24	$y = 4x^2 + 8x + 3$
Варіант 25	$x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$
Варіант 26	$4x^2 + y^2 + 24x - 2y + 21 = 0$
Варіант 27	$9x^2 - 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0$
Варіант 28	$y^2 - 10x - 2y - 19 = 0$
Варіант 29	$x^2 + y^2 - 6x = 0$
Варіант 30	$25x^2 + 16y^2 + 200x + 32y + 16 = 0$

4. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРИ

4.1 Площина у просторі

Площина у просторі задається рівнянням першого порядку. Будь-яке лінійне рівняння зі змінними x, y, z можна розглядати як рівняння у декартових координатах площини у просторі. Існують різні форми рівняння площини:

1. Рівняння площини, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ та перпендикулярно вектору $\vec{N} = (A, B, C)$:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0. \quad (4.1)$$

2. Загальне рівняння площини:

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0. \quad (4.2)$$

Якщо у рівнянні (4.2) відсутній доданок з якою-небудь змінною, то площина паралельна відповідній координатній осі.

Якщо у рівнянні (4.2) відсутні доданки з двома змінними, то площина паралельна відповідній координатній площині.

Якщо у загальному рівнянні площини відсутній вільний член, тобто рівняння має вигляд $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z = 0$, то площина проходить через початок координат.

3. Рівняння площини, яка проходить через три задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ та $M_3(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.3)$$

4. Рівняння площини у відрізках на осях:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (4.4)$$

де a, b, c – координати точок перетину площини з осями Ox, Oy, Oz відповідно.

5. Нормальне рівняння площини:

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma - p = 0, \quad (4.5)$$

де p – відстань від початку координат до площини; α, β, γ – кути, які створює нормаль проведена з початку координат з осями Ox, Oy, Oz .

6. Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини, заданої рівнянням виду (4.2):

$$d_M = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (4.6)$$

Умовою паралельності двох площин є колінеарність їх нормалей $\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (4.7)$$

Умовою перпендикулярності двох площин є перпендикулярність їх нормалей $\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0. \quad (4.8)$$

Кут між площинами дорівнює гострому куту між їх нормальними $\vec{N}_1$ та $\vec{N}_2$

$$\cos \varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (4.9)$$

4.2 Пряма лінія у просторі

Пряму у просторі можна розглядати як лінію перетину двох площин; лінію, будь-які точки якої задають вектор, колінеарний заданому, або траєкторію руху зі сталою швидкістю заданої точки. Різні форми рівнянь прямої у просторі:

1. Загальне рівняння прямої, яка задається як лінія перетину двох площин з нормальними $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ та $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$

$$\begin{cases} A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0 \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

2. Канонічне та параметричне рівняння прямої

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \quad (4.11)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + l \cdot t \\ y = y_0 + m \cdot t \\ z = z_0 + n \cdot t \end{cases} \quad (4.12)$$

Пряма, що задана рівняннями виду (4.11) або (4.12), проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ з напрямним вектором $\vec{s} = (l, m, n)$, який паралельний даній прямій.

3. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (4.13)$$

Кут між двома прямими – це гострий кут, який створено напрямними векторами цих прямих

$$\cos(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|}. \quad (4.14)$$

Умовою паралельності двох прямих є колінеарність їх напрямних векторів $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (4.15)$$

Умовою перпендикулярності двох прямих є перпендикулярність їх напрямних векторів $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$

$$l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 = 0. \quad (4.16)$$

Гострий кут φ , який створений нормаллю до площини, заданої рівняння $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$, та напрямним вектором прямої, доповнює кут θ між прямою та площиною до 90°

$$\sin \theta = \cos \varphi = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{s}|}{|\vec{N}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{|A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \quad (4.17)$$

Умовою перпендикулярності прямої та площини є колінеарність нормалі до площини та напрямного вектора прямої $\vec{s} \parallel \vec{N}$

$$\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}. \quad (4.18)$$

Умовою паралельності прямої та площини є перпендикулярність нормалі до площини та напрямного вектора прямої $\vec{s} \perp \vec{N}$:

$$l \cdot A + m \cdot B + n \cdot C = 0. \quad (4.19)$$

4.3 Індивідуальні завдання за темою „Аналітична геометрія у просторі”

Завдання І. Дано рівняння площини. Знайти:

1) нормальний вектор площини;

- 2) записати рівняння площини у відрізках;
- 3) записати рівняння площини в нормальному вигляді;
- 4) перевірити, чи лежить точка M на площині;

Варіант 1	$2x + 3y + z - 1 = 0$	$M (0; 1; -2)$
Варіант 2	$x - 2y + z + 1 = 0$	$M (2; 1; 2)$
Варіант 3	$5x - y + z - 4 = 0$	$M (1; 1; 0)$
Варіант 4	$x - 3y + z - 2 = 0$	$M (-2; 4; 1)$
Варіант 5	$x - 2y + 3z - 6 = 0$	$M (0; 0; 2)$
Варіант 6	$2x + y + 2z + 2 = 0$	$M (1; 2; 3)$
Варіант 7	$3x + y + z - 3 = 0$	$M (1; 1; -1)$
Варіант 8	$x + y - z + 7 = 0$	$M (3; 2; 1)$
Варіант 9	$7x - y + z - 14 = 0$	$M (2; 1; 1)$
Варіант 10	$x - 2y + 6z - 12 = 0$	$M (1; 3; 1)$
Варіант 11	$x + y + z - 5 = 0$	$M (1; 5; -1)$
Варіант 12	$x + 2y + z - 2 = 0$	$M (2; 1; 1)$
Варіант 13	$x + y + 3z - 6 = 0$	$M (1; -1; 2)$
Варіант 14	$x - y - z - 1 = 0$	$M (1; 0; 2)$
Варіант 15	$3x - y + 5z - 6 = 0$	$M (1; 3; 2)$
Варіант 16	$2x - y + 3z - 6 = 0$	$M (1; 2; 2)$
Варіант 17	$4x + 2y - z - 8 = 0$	$M (2; 1; 2)$
Варіант 18	$7x - 6y + z - 5 = 0$	$M (0; 3; 1)$
Варіант 19	$x + 4y - z + 4 = 0$	$M (1; -1; 1)$
Варіант 20	$2x - y + 3z - 2 = 0$	$M (0; 0; -5)$
Варіант 21	$2x + 3y + 4z + 5 = 0$	$M (5; 3; 1)$
Варіант 22	$x + 2z + 4 = 0$	$M (0; 5; -2)$
Варіант 23	$4x + 3y + z - 12 = 0$	$M (5; 3; 0)$
Варіант 24	$3x + 2y - z + 1 = 0$	$M (1; 1; 1)$
Варіант 25	$x - 3y + z + 2 = 0$	$M (1; 0; -1)$
Варіант 26	$5x + y + z - 5 = 0$	$M (0; 0; 1)$
Варіант 27	$3x + y + 3z + 3 = 0$	$M (0; 0; -1)$
Варіант 28	$x + 2y + 2z - 4 = 0$	$M (4; 1; -1)$
Варіант 29	$x + 7y - 14 = 0$	$M (0; 2; 2)$
Варіант 30	$x + y + z + 1 = 0$	$M (1; -1; -1)$

Завдання II. Знайти рівняння площини, що проходить через точки M_1, M_2, M_3 і відстань від точки M_4 до цієї площини.

Варіант 1	$M_1 (1; 1; -1)$	$M_2 (2; 3; 1)$	$M_3 (3; 2; 1)$	$M_4 (-3; -7; 6)$
Варіант 2	$M_1 (1; 5; -7)$	$M_2 (-3; 6; 3)$	$M_3 (-2; 7; 3)$	$M_4 (1; -1; 2)$
Варіант 3	$M_1 (2; 3; 1)$	$M_2 (4; 1; -2)$	$M_3 (6; 3; 7)$	$M_4 (-5; -4; 8)$

Варіант 4	$M_1 (1; 1; 2)$	$M_2 (-1; 1; 3)$	$M_3 (2; -2; 4)$	$M_4 (2; 3; 8)$
Варіант 5	$M_1 (2; -1; 2)$	$M_2 (1; 2; -1)$	$M_3 (5; 2; 6)$	$M_4 (-13; -8; -16)$
Варіант 6	$M_1 (14; 4; 5)$	$M_2 (-5; -3; 2)$	$M_3 (-2; -6; -3)$	$M_4 (-1; -8; 7)$
Варіант 7	$M_1 (-2; 0; -4)$	$M_2 (-1; 7; 1)$	$M_3 (4; -8; -4)$	$M_4 (-6; 5; 5)$
Варіант 8	$M_1 (2; -1; -2)$	$M_2 (1; 2; 1)$	$M_3 (5; 0; -6)$	$M_4 (14; -3; 7)$
Варіант 9	$M_1 (5; 2; 0)$	$M_2 (2; 5; 0)$	$M_3 (1; 2; 4)$	$M_4 (-3; -6; -8)$
Варіант 10	$M_1 (0; -1; -1)$	$M_2 (-2; 3; 5)$	$M_3 (1; -5; -9)$	$M_4 (-4; -13; 6)$
Варіант 11	$M_1 (-1; -5; 2)$	$M_2 (-6; 0; -3)$	$M_3 (3; 6; -3)$	$M_4 (10; -8; -7)$
Варіант 12	$M_1 (-3; 4; -7)$	$M_2 (1; 5; -4)$	$M_3 (-5; -2; 0)$	$M_4 (-12; 7; -1)$
Варіант 13	$M_1 (-1; 2; -3)$	$M_2 (4; -1; 0)$	$M_3 (2; 1; -6)$	$M_4 (1; -6; -5)$
Варіант 14	$M_1 (-3; -1; 1)$	$M_2 (-9; 1; -2)$	$M_3 (3; -5; 4)$	$M_4 (-7; 0; -1)$
Варіант 15	$M_1 (1; -1; 1)$	$M_2 (-2; 0; 3)$	$M_3 (2; 1; -1)$	$M_4 (-2; 4; 2)$
Варіант 16	$M_1 (1; 2; 0)$	$M_2 (1; -1; 2)$	$M_3 (0; 1; -1)$	$M_4 (2; -1; 4)$
Варіант 17	$M_1 (1; 0; 2)$	$M_2 (1; 2; -1)$	$M_3 (2; -2; 1)$	$M_4 (-5; -9; 1)$
Варіант 18	$M_1 (1; 0; 1)$	$M_2 (-2; -1; 6)$	$M_3 (1; 2; -3)$	$M_4 (3; -2; 9)$
Варіант 19	$M_1 (-2; 3; -5)$	$M_2 (-6; 0; -3)$	$M_3 (3; 10; -1)$	$M_4 (-6; 7; -10)$
Варіант 20	$M_1 (-1; -2; -4)$	$M_2 (-1; 2; 4)$	$M_3 (3; 0; -1)$	$M_4 (-2; 3; 5)$
Варіант 21	$M_1 (-4; 1; 2)$	$M_2 (0; -3; 1)$	$M_3 (2; -1; 5)$	$M_4 (-3; 4; 5)$
Варіант 22	$M_1 (-4; 1; 2)$	$M_2 (0; -3; 1)$	$M_3 (2; -1; 5)$	$M_4 (-3; 4; 5)$
Варіант 23	$M_1 (0; 3; 2)$	$M_2 (-2; -1; -1)$	$M_3 (3; 1; -4)$	$M_4 (-11; 10; 6)$
Варіант 24	$M_1 (-3; -5; 6)$	$M_2 (2; 1; -4)$	$M_3 (0; -3; -1)$	$M_4 (3; 6; 8)$
Варіант 25	$M_1 (2; -4; -3)$	$M_2 (5; -6; 0)$	$M_3 (-1; 3; -3)$	$M_4 (2; -10; 8)$
Варіант 26	$M_1 (1; -1; 2)$	$M_2 (2; 1; 2)$	$M_3 (1; 1; 4)$	$M_4 (-3; 2; 7)$
Варіант 27	$M_1 (1; 3; 6)$	$M_2 (2; 2; 1)$	$M_3 (-1; 0; 1)$	$M_4 (5; -4; 5)$
Варіант 28	$M_1 (-4; 2; 6)$	$M_2 (2; -3; 0)$	$M_3 (-1; 5; 8)$	$M_4 (-12; 1; 8)$
Варіант 29	$M_1 (2; 1; 4)$	$M_2 (7; 5; -2)$	$M_3 (-7; -3; 2)$	$M_4 (-3; 1; 8)$
Варіант 30	$M_1 (7; -1; 2)$	$M_2 (7; 2; 4)$	$M_3 (-5; -2; -1)$	$M_4 (10; 1; 8)$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Призва Г.Й., Плахотник В.В., Гординський Л.Д. та ін. Вища математика : Підручник. У 2-х книгах. Кн. 1. – К. : Либідь, 2003.
2. Бубняк, Т. І. Вища математика : Навчальний посібник. – К. : Новий світ-2000, 2004.
3. В.С.Герасимчук, Г.С.Васильченко, В.І.Кравцов. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Книга 1. – К.: Книги України ЛТД, 2009.
4. Высшая математика для экономистов / Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997.

5. Гетманцев В.Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2001.
6. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії / В.І. Діскант, Л.Р. Береза, О.П. Грижук, Л.М. Захаренко. – К.: Вища шк., 2001.
7. Навієв Е.Х., Владіміров В.М., Миронець О.А. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник. – К.: Либідь, 1997.
8. Пастушенко С.М., Підченко Ю.П. Вища математика. Основні поняття, формули, зразки розв'язування задач: Навч. посібник. – К.: Діал, 2000.
9. Рудавський Ю.К., Костробій П.П., Луник Х.П., Уханська Д.В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. підручник. – Львів: Бескид БіТ, 2002.
10. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учеб. пособие: В 3-х ч. – Ч. 1 / Под общей редакцией А.П. Рябушко. – Минск: Вышэйш. шк., 1990.

