

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ХІМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ  
ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЕКОНОМІЧНОГО ФАКУЛЬТЕТУ  
З КУРСУ «ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ»

Затверджено на засіданні кафедри  
вищої математики  
Протокол № 1 від 31.08.16

Дніпро ДВНЗ УДХТУ 2017

Методичні вказівки до розв'язання задач для студентів економічного факультету з курсу «Теорія ймовірностей» / Укл.: С.О. Борзов, Т.С. Науменко, І.В. Шапка – Д.:ДВНЗ УДХТУ, 2017. – 20с.

Укладачі: С.О. Борзов канд. техн. наук.  
Т.С. Науменко  
І.В. Шапка

Відповідальний за випуск В.І. Олевський, д-р техн. наук.

Методичні вказівки  
до розв'язання задач  
для студентів економічного факультету  
з курсу «Теорія ймовірностей»

Укладачі: БОРЗОВ Сергій Олексійович  
НАУМЕНКО Тетяна Станіславівна  
ШАПКА Ірина Віталіївна

Коректор О.Г. Нефедова  
Комп'ютерна верстка О.Г. Нефедова

Підписано до друку 26.04.17. Формат 60×84/16. Папір ксерокс. Друк різнограф.  
Умов. друк. арк. 0,88. Обл.-вид. арк. 0,97. Тираж 100 прим. Зам. № 533.  
Свідоцтво ДК № 5026 від 16.12.2015.

---

ДВНЗ УДХТУ, просп. Гагаріна, 8, м. Дніпро, 49005

---

Редакційно-видавничий відділ

Розрахунок ймовірностей випадкових подій – один з найважливіших інструментів, яким повинен володіти і вміти застосовувати в науковій і практичній діяльності сучасний економіст високої кваліфікації. Вміння знаходити ймовірності випадкових подій дозволить економістам і менеджерам кількісно оцінювати економічні ситуації, зіставляти й аналізувати наслідки організаційно-фінансових рішень.

## 1 КЛАСИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Нехай  $n$  – кількість елементарних подій у просторі  $\Omega$ ,  $m$  – кількість подій, сприятливих події  $A$ , то ймовірність

$$P(A) = \frac{n}{m} \text{ – класичний спосіб} \quad (1.1)$$

### Інтерпретація

Нехай  $P(A) = 0,75$

- а) шанси, настання події  $A$  в одному експерименті складають 75%;
- б) якщо 100 разів зробити експеримент, то в 75 випадках настане подія  $A$ .

В основі розрахунків за формулою (1) лежить принцип множення: розглянемо рядок довжиною  $m$ :  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , елементи якого не обов'язково різні. Нехай елемент  $\tilde{o}_1$  може бути вибраний  $n_1$  способами, після чого елемент  $x_2$  може бути вибрано  $n_2$  способами і т.д., елемент  $x_m$  –  $n_m$  способами, тоді кількість різних рядків дорівнює

$$n_1, n_2, \dots, n_m. \quad (1.2)$$

### Правило розрахунку значень $n$ і $m$ у формулі (1)

1. Умовно представити елементарну подію у вигляді рядка  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ .
2. З'ясувати, що є початковою множиною по відношенню до даного рядка. Нехай  $n$  – число елементів у початковій множині.
3. Якщо порядок елементів в рядку важливий і:
  - а) число повторів кожного елемента точно вказано  $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ , то число елементарних подій розраховується за формулою

$$\frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_m)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_m!} \quad (1.3)$$

- б) число повторів не вказано, то застосовується принцип множення
- 4. Якщо порядок елементів в рядку не важливий і:
  - а) повторів елементів в рядку не має, то число елементарних подій розраховується за формулою

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

(1.4)

при цьому

$$C_n^0 = 1$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

(1.5)

б) повтори елементів можуть бути, то число елементарних подій позначається  $C_{n+m-1}^m$  і обчислюється за формулою (1.4).

**Зауваження.** Якщо початкових множин декілька (це визначається умовою задачі), то пункт 3, 4 слід застосовувати до кожної множини і результати перемножити.

### *Приклади розв'язання задач*

**Задача 1.** Із колоди з 52 карт навмання вибирають 3 карти (без повернення). Яка ймовірність того, що ці карти тузи?

**Розв'язок:** подія  $A$  – поява трьох тузів.

Елементарна подія – рядок із 3-х елементів ( $m=3$ ). Початкова множина – 52 карти ( $n=52$ ). Так як порядок не важливий і повторів не має, то за формулою (1.4)

$$N = C_{52}^3 = \frac{52!}{3! \cdot (52-3)!} = \frac{52!}{3! \cdot 49!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50}{3!} = 22100$$

Сприятлива подія – рядок із 3-х елементів ( $m=3$ ). Початкова множина – 4 тузи ( $n=4$ ), тому

$$K = C_4^3 = \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$$

За формулою (1.1)

$$P(A) = \frac{4}{22100} = 0,00018$$

**Задача 2.** Із колоди з 52 карт навмання вибирають 4 карти (без повернення). Яка ймовірність того, що ці карти червоної масті?

**Розв'язок:** подія  $A$  – поява 4-х червоних карт.

Елементарна подія – рядок із 4-х елементів ( $m=4$ ). Початкова множина – 52 карти ( $n=52$ ). Так як порядок не важливий і повторів не має, то за формулою (1.4)

$$N = C_{52}^4 = \frac{52!}{4! \cdot (52-4)!} = \frac{52!}{4! \cdot 48!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}{4!} = 270725$$

Сприятлива подія – рядок із 4-х елементів ( $m=4$ ). Початкова множина – 26 червоних карт ( $n=26$ ), тому

$$K = C_{26}^4 = \frac{26!}{4! \cdot (26-4)!} = \frac{26!}{4! \cdot 22!} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}{4!} = 14950$$

За формулою (1.1)

$$P(A) = \frac{14950}{270725} = 0,055$$

**Задача 3.** Із колоди з 52 карт навмання вибирають 3 карти (без повернення). Яка ймовірність того, що ці карти трійка, сімка та туз ( в довільному порядку)?

**Розв'язок:** подія  $A$  – трійка, сімка та туз.

Елементарна подія – рядок із 3-х елементів, тобто  $m=3$

$$N = C_{52}^3 = \frac{52!}{3! \cdot (52-3)!} = \frac{52!}{3! \cdot 49!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50}{3!} = 22100$$

Сприятлива подія – рядок із 3-х елементів, але початкових множин три: трійки, сімки, тузи, тому в силу зауваження

$$K = C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 = 64$$

За формулою (1.1)

$$P(A) = \frac{64}{22100} = 0,003$$

**Задача 4.** Гральний кубик підкинули двічі підряд. Яка ймовірність того, що обидва рази випаде одна й та сама цифра?

**Розв'язок:** подія  $A$  — поява двох цифр.

Елементарна подія - рядок із 2-х елементів (цифр), тобто ( $m=2$ ).

Початкова множина – 6 цифр ( $n=6$ ). Так як порядок важливий, то відповідно п.3б правила, застосуємо принцип множення: першу цифру можна вибрати 6-ма способами, після чого другу цифру (підкидання незалежні) також можна вибрати 6-ма способами. Отже,

$$N = 6 \cdot 6 = 36$$

Сприятлива подія – рядок із 2-х елементів (однакових цифр). Початкова множина – також 6 цифр. Застосовуючи відповідно п.3 правила, принцип множення, одержимо: першу цифру можна обрати 6-ма способами, після чого другу цифру – тільки одним способом (адже перша вже вибрана, а друга повинна з нею співпасти).

$$K = 6 \cdot 1 = 6$$

$$P(A) = \frac{6}{36} = 0,17$$

**Задача 5.** Гральний кубик підкидають 10 разів. Яка ймовірність того, що цифри 1, 2, 3, 4, 5, 6 випадуть відповідно 2, 3, 1, 1, 2 рази?

**Розв'язок:** подія  $A$  — набір з 10 цифр, причому цифри 1, 2, 3, 4, 5, 6 повторюються вказане число разів.

Елементарна подія – рядок із 10 елементів (цифр), тобто ( $m=10$ ).

Початкова множина: цифри 1, 2, 3, 4, 5, 6. Так як порядок важливий, то

відповідно п.3 правила, застосуємо принцип множення: першу цифру рядка можна вибрати 6-ма способами, після чого другу цифру (підкидання незалежні) також можна вибрати 6-ма способами. Отже,

$$N = 6^{10}$$

Сприятлива подія – рядок із 10 елементів (цифр). Початкова множина – також 6 цифр, але так як точно вказана кількість повторів кожної цифри в

$$\text{рядку, то в силу п.3а правила: } K = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2!} = 151200$$

$$\text{Ймовірність } P(A) = \frac{151200}{6^{10}} = 0,0025.$$

**Задача 6.** Серед співробітників компанії 7 менеджерів, 4 бухгалтери і 3 начальника відділів. Збирають комісію з 5 співробітників. Яка ймовірність того, що серед них 2 начальники, 2 менеджери, 1 бухгалтер?

**Розв'язок:** подія  $A$  – група з 2-х начальників, 2-х менеджерів, 1 бухгалтера.

Елементарна подія – рядок із 5 елементів (співробітників). Початкова множина – 14 елементів. Порядок, в якому будують комісію не важливий, тому за п.4а правила

$$N = C_{14}^5 = \frac{14!}{5! \cdot (14-5)!} = \frac{14!}{5! \cdot 9!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2002$$

Сприятлива подія – рядок із 5-ти елементів, але початкових множин 3. Тому відповідно п.4а правила і зауваженню:

$$K = C_7^2 \cdot C_4^1 \cdot C_3^2 = \frac{7!}{2! \cdot (7-2)!} \cdot \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{26!}{4! \cdot 22!} = 252$$

$$P(A) = \frac{252}{2002} = 0,126$$

**Задача 7.** На кожній з 5 карток написано по букві так, що утворено слово „лілія”. Після перемішування одну за іншою вибирають картки (без повернення). Яка ймовірність того, що отримаємо те саме слово?

**Розв'язок:** подія  $A$  – отримали слово „лілія”.

Елементарна подія – рядок із 5 букв. Початкова множина – 5 букв. Так як порядок важливий і число повторів кожної букви вказано, то згідно п.3а правила

$$N = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10.$$

Сприятлива подія – слово „лілія”. Зрозуміло, воно тільки одне (між однаковими буквами ми не робимо відмінність).

$$K = 1$$

$$P(A) = \frac{1}{10} = 0,1$$

**Задача 8.** В першості України бере участь 15 команд. Букмекерська контора пропонує вгадати (і виграти грошову винагороду) розподілу медалей (золото, срібло, бронза).

**Розв'язок:** подія  $A$  – вгадування призової трійки.

Елементарна подія – рядок із 3-х елементів (команд). Початкова множина – 16 команд. Так як порядок елементів важливий, то згідно п.3б правила

$$N = 16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360.$$

Сприятлива подія – набір призових команд. Очевидно, він тільки один

$$K = 1$$

$$P(A) = \frac{1}{3360} = 0,0003.$$

## 2 ГЕОМЕТРИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

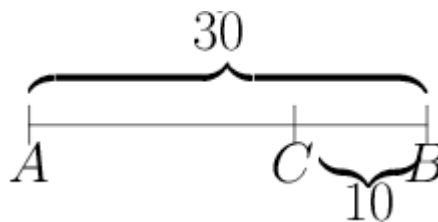
Нехай множина всіх елементарних наслідків випробування нескінченна і утворює деяку множину  $\Omega$ , усі елементарні наслідки рівноймовірні. Причому події  $A$  сприяють ті елементарні події, які утворюють множину  $A \subseteq \Omega$ . Тоді ймовірність події  $A$  дорівнює відношенню міри множини  $A$  до міри множини  $\Omega$ , тобто

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} \quad (2.1)$$

Мірою множини на прямій, площині, у просторі є відповідно довжина, площа, об'єм геометричної фігури, яку утворює ця множина.

**Задача 1.** Відомо, що телефонний дзвоник повинен прозвучати від 11 год до 11 год 30 хв. Яка ймовірність того, що дзвоник продзвонить в останні 10 хвилин указанного проміжку, якщо момент дзвінка випадковий?

**Розв'язок.** Скористаємося геометричною схемою. Для цього проміжок часу від 11 год до 11 год 30 хв зобразимо у вигляді відрізка  $AB$  довжиною 30 одиниць, а проміжок від 11 год 20 хв до 11 год 30 хв – у вигляді відрізка  $CB$  довжиною 10 одиниць.



Випадковий дзвінок у деякий момент заданої півгодини зображається навмання взятою точкою на відрізку  $AB$ . Тоді ймовірність того, що дзвінок прозвучить протягом останніх 10 хв, за формулою (2.1), дорівнює

$$P = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

**Задача 2.** Два дійсних числа випадковим чином вибираються з інтервалу  $[0;5]$ . Яка ймовірність того, що сума двох чисел менша 4.

**Розв'язок.** Позначимо через  $x$  перше число, вибране випадковим чином з інтервалу  $[0;5]$ , а через  $y$  – друге число. Тоді  $0 \leq x \leq 5$ ,  $0 \leq y \leq 5$ . Внаслідок нескінченної кількості таких дійсних чисел треба скористатися означенням геометричної ймовірності. У цьому разі множиною всіх можливих наслідків випробування є квадрат (рис. 2.2 – 2.4) зі стороною 5, площа якого дорівнює 25, тобто

$$m(\Omega) = 25.$$

Нехай подія  $A = \{\text{сума двох чисел менша 4}\}$ . Тоді маємо  $A = \{(x,y): x+y < 4\}$ , або  $A = \{y < 4-x\}$ . Отже, елементарні наслідки випробування, що сприяють події  $A$ , утворюють фігуру (зафарбовану на рис.1.1), площа якої

$$m(A) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8.$$

Застосовуючи формулу (2.1) для геометричної ймовірності, отримуємо

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{8}{25}.$$

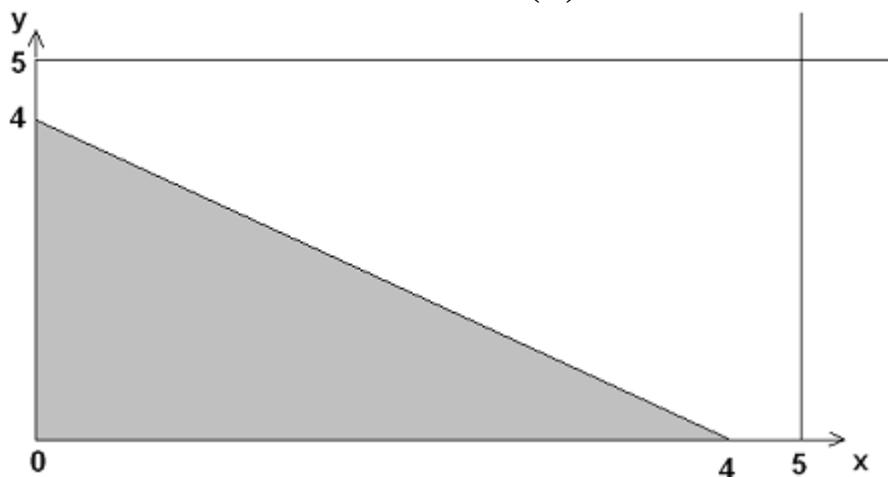


Рисунок1.1 – Ілюстрація до задачі

### 3 ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

**Теорема 1.** Ймовірність суми двох несумісних подій  $A$  і  $B$  дорівнює сумі їх ймовірностей

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

**Наслідок 1.** Якщо  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – попарно несумісні, то ймовірність їх суми дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

**Наслідок 2.** Ймовірність суми попарно несумісних подій  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , які утворюють повну групу, дорівнює 1, тобто

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

**Наслідок 3.** Події  $A$  і  $\bar{A}$  несумісні і утворюють повну групу подій, тому



$$P\left(A + \bar{A}\right) = P(A) + P\left(\bar{A}\right) = 1.$$

Звідси

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

**Теорема 2.** Ймовірність суми двох сумісних подій  $A$  і  $B$  дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їхнього добутку:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Введемо поняття залежних і незалежних подій.

Випадкові події  $A$  і  $B$  називають *залежними*, якщо ймовірність появи однієї з них залежить від появи або не появи іншої. Інакше  $A$  та  $B$  називаються *незалежними*.

**Теорема 3.** Ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку їх ймовірностей

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

**Наслідок.** Ймовірність добутку  $n$  незалежних подій  $A_1, A_2, \dots, A_n$  дорівнює добутку їх ймовірностей:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

*Умовною ймовірністю* події  $B$  якщо подія  $A$  вже відбулась, називається число  $\frac{P(A \cdot B)}{P(A)}$ , яке позначається

$$\frac{P(A \cdot B)}{P(A)} = P(B / A) = P_A(B).$$

**Теорема 4.** Ймовірність добутку двох залежних подій  $A$  і  $B$  дорівнює добутку ймовірності однієї з цих подій на умовну ймовірність іншої події за умови, що перша подія відбулася, тобто

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B / A) = P(B) \cdot P(A / B).$$

**Наслідок.**

Якщо події  $A$  і  $B$  незалежні, то з теореми 4 випливає теорема 3.

**Теорема 5.** Ймовірність добутку  $n$  залежних подій  $A_1, A_2, \dots, A_n$  дорівнює добутку послідовних умовних ймовірностей

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1} \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n / A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1}).$$

**Теорема 6.** Ймовірність появи хоча б однієї з подій  $A_1, A_2, \dots, A_n$  дорівнює різниці між одиницею і ймовірністю добутку заперечень подій  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$

$$P(A) = 1 - P\left(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_n\right) = 1 - P\left(\bar{A}_1\right) \cdot P\left(\bar{A}_2 / \bar{A}_1\right) \cdot \dots \cdot P\left(\bar{A}_n / \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_{n-1}\right)$$

**Наслідок.** Ймовірність появи хоча б однієї з подій  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$

незалежних в сукупності, дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних подій:

$$P(A) = 1 - P\left(\bar{A}_1\right) \cdot P\left(\bar{A}_2\right) \cdot \dots \cdot P\left(\bar{A}_n\right).$$

**Задача 1.** З 200 студентів 1-г курсу 120 вивчають англійську мову, 100 – німецьку, 60 – обидві мови. Знайти ймовірність, що довільно взятий студент вивчає або англійську, або німецьку мову.

**Розв'язок:**  $A$  – студент вивчає англійську;

$B$  – студент вивчає німецьку.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{120}{200} + \frac{100}{200} - \frac{60}{200} = 0,8.$$

**Задача 2.** У партії із 50 деталей є п'ять бракованих. Яка ймовірність того, що з вибраних навмання 30 деталей не більше однієї бракованої?

**Розв'язок.** Нехай  $A$  – подія, яка відповідає вибору якісних 30 деталей,  $B$  – подія, яка відповідає вибору однієї бракованої деталі із 30 вибраних,  $C$  – не більше однієї бракованої. Отже,  $C = A + B$ . Оскільки події  $A$  і  $B$  несумісні, то

$$P(C) = P(A) + P(B),$$

$$P(A) = \frac{C_{45}^{30}}{C_{50}^{30}} \approx 0,007, \quad P(B) = \frac{C_{45}^{29} \cdot C_5^1}{C_{50}^{30}} \approx 0,065.$$

Отже,

$$P(C) = P(A) + P(B) = 0,007 + 0,065 = 0,072.$$

**Задача 3.** В урні 10 куль, з яких 2 білого кольору, а решта чорного. Навмання взято 2 кулі. Знайти ймовірність, що обидві кулі чорного кольору.

**Розв'язок.** Нехай елементарні події:  $A_1$  – перша куля чорна.  $A_2$  – друга куля чорна. Тоді подія  $A = A_1 \cdot A_2$  – обидві кулі чорні. Ймовірність того, що друга куля чорна, буде залежати від того, якого кольору перша куля. Якщо перша куля чорна, то ймовірність того, що друга куля також чорна, дорівнює умовній ймовірності події  $A_2$  за умови, що подія  $A_1$  вже відбулася:

$$P(A_2 / A_1) = \frac{7}{9},$$

так як після появи події  $A_1$  – всього куль залишається 9, з них 7 чорних. Звідси

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{28}{45}.$$

**Задача 4.** Знайти ймовірність того, що випадковим чином вибране двозначне число ділиться:

а) або на 2, або на 3 (подія C);

б) на 2 і на 3 (подія D).

**Розв'язок.** Нехай подія  $A = \{\text{вибране двозначне число ділиться на 2}\}$ ,  $B = \{\text{вибране двозначне число ділиться на 3}\}$ . Всього двозначних чисел 90, тобто це всі елементарні наслідки.  $P(A) = 45/90$  (кожне друге двозначне число ділиться на 2),  $P(B) = 30/90$  (кожне третє двозначне число ділиться на 3).

а) подія  $AB$  – двозначне число ділиться і на 2 і на 3. Тоді

$$P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3};$$

$$\text{б) } P(D) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

#### 4 ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ. ФОРМУЛА БАЙЄСА

Якщо випадкова подія може відбутися лише сумісно з однією із несумісних між собою подій  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , що утворюють повну групу, то ймовірність появи події  $A$  обчислюється за *формулою повної ймовірності*

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A / H_1) + P(H_2) \cdot P(A / H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A / H_n)$$

або

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A / H_i), \quad (4.1)$$

де події  $H_1, H_2, \dots, H_n$  – гіпотези, а  $P(A / H_i)$  – умовна ймовірність появи події  $A$  при появі  $i$ -тої гіпотези ( $i=1, 2, \dots, n$ ).

Умовна ймовірність гіпотези  $H_i$  за умови того, що подія  $A$  відбулася, визначається за формулою ймовірності гіпотез або *формулою Байєса* (вона дозволяє переглянути ймовірності гіпотез після появи події  $A$ ):

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A / H_i)} \quad (4.2)$$

**Задача 1.** По лінії зв'язку передаються сигнали А і В із ймовірністю 0,72 і 0,28. Через перешкоди  $\frac{1}{6}$  частина А-сигналів спотворюється і приймається як

В-сигнали, а

$\frac{1}{7}$  частина передних В-сигналів приймається як А-сигнали.

а) Визначити ймовірність того, що буде прийнято А-сигнал;

б) Відомо, що прийнято А-сигнал. Яка ймовірність того, що А-сигнал був дійсно переданий?

**Розв'язок** а) Нехай подія А – прийнятий А-сигнал. Введемо гіпотези:  $H_A$  – передавався сигнал А,  $H_B$  – передавався сигнал В. За умовою  $P(H_A) = 0,72$ ;  $P(H_B) = 0,28$

Ймовірність того, що прийнятий А-сигнал за умови, що справді А-сигнал передавався

$$P(A/H_A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Ймовірність того, що прийнятий А-сигнал за умови, що передавався В-сигнал дорівнює:

$$P(A/H_B) = \frac{1}{7}.$$

Отже, за формулою повної ймовірності знаходимо

$$P(A) = P(H_A)P(A/H_A) + P(H_B)P(A/H_B) = 0,72 \cdot \frac{5}{6} + 0,28 \cdot \frac{1}{7} = 0,64$$

б) Ймовірність надходження А-сигналу за умови, що він був переданий, знайдемо за формулою Байєса:

$$P(H_A/A) = \frac{P(H_A)P(A/H_A)}{P(A)} = \frac{0,72 \cdot \frac{5}{6}}{0,64} = \frac{0,6}{0,64} \approx 0,94.$$

**Задача 2.** Відповідно до статистичних даних, 40% одержувачів кредиту в банку складають державні організації, 45% – інші банки, 15% – фізичні особи. Також статистика показує, що ймовірність неповернення кредиту вчасно 0,01; 0,2; 0,1 відповідно. Начальнику кредитного відділу прийшло повідомлення про неповернення чергового кредиту. Яка ймовірність того, що не сплатила фізична особа?

**Розв'язок** Подія А може відбутись, якщо відбудеться одне з попарно несумісних подій:  $H_1$  – кредит державної організації,  $H_2$  – кредит інших банків,  $H_3$  – кредит фізичної особи.

За формулою Байєса

$$P(H_3/A) = \frac{0,15 \cdot 0,1}{0,40 \cdot 0,01 + 0,45 \cdot 0,02 + 0,15 \cdot 0,1} = 0,536 \approx 54\%$$

Висновок. Частина неповернення серед фізичних осіб - 54%.

## 5 НЕЗАЛЕЖНІ ПОВТОРНІ ВИПРОБУВАННЯ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛІ

### Формула Бернуллі

Нехай проводиться  $n$  незалежних випробувань, причому ймовірність появи події А в кожному випробуванні однакова, тобто не залежить від її появи в інших випробуваннях. Таку серію повторних незалежних випробувань

називають *схемою Бернуллі*. Прикладом повторних незалежних випробувань є підкидання монети певної кількості разів, стрільба по мішені тощо.

Нехай випадкова подія А може відбутися в кожному випробуванні з однаковою ймовірністю  $P(A)=p$  або не відбутися з ймовірністю  $q=1-p$ . Ймовірність того, що при  $n$  випробуваннях подія А відбудеться  $k$  разів, визначається за *формулою Бернуллі*:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}. \quad (5.1)$$

Найімовірніша кількість  $k_0$  появи події А в  $n$  випробуваннях визначається з нерівностей

$$n \cdot p - q \leq k_0 \leq n \cdot p + p.$$

*Формули, які часто застосовують у схемі Бернуллі.*

Ймовірність появи події А:

а) менше  $k$  разів

$$P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k-1);$$

б) більше  $k$  разів

$$P_n(k+1) + P_n(k+2) + \dots + P_n(n);$$

в) не менше  $k$  разів

$$P_n(k) + P_n(k+1) + \dots + P_n(n);$$

г) не більше  $k$  разів

$$P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k);$$

д) хоча б один разів

$$1 - P_n(0).$$

**Задача 1.** Прилад складено з 10 блоків, надійність кожного з яких 0,8. Блоки можуть виходити з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що:

- 1) відмовлять два блоки;
- 2) відмовить хоча б один блок;
- 3) відмовлять не менше двох блоків.

Знайти найімовірнішу кількість блоків, що вийдуть з ладу.

**Розв'язок:** Нехай подія А – відмова блока. Тоді

$$P(A)=p=1-0,8=0,2.$$

Тому  $q=0,8$ . За умовою задачі  $n=10$ . Застосувавши формулу Бернуллі (5.1) та наслідки з неї, матимемо:

$$1) D_{10}(2) = \tilde{N}_{10}^2 \delta^2 q^8 = 45 \cdot (0,2)^2 \cdot (0,8)^8 \approx 0,302;$$

$$2) P_{10}(1 \leq k \leq 10) = 1 - q^{10} = 1 - (0,8)^{10} \approx 0,893;$$

$$3) P_{10}(2 \leq k \leq 10) = 1 - [P_{10}(0) + P_{10}(1)] = 1 - C_{10}^0 \cdot (0,2)^0 \cdot (0,8)^{10} - C_{10}^1 \cdot (0,2)^1 \cdot (0,8)^9 \approx 0,624.$$

Найімовірнішу кількість блоків  $k_0$ , що вийдуть із ладу знайдемо з нерівностей

$$10 \cdot 0.2 - 0.8 \leq k_0 \leq 10 \cdot 0.2 + 0.2.$$

Отже,  $k_0=2$ .

### ***Наближені формули у схемі Бернуллі***

При великій кількості випробувань у схемі Бернуллі зручно користуватися наближеними формулами

Для наближеного обчислення ймовірності появи події  $A$  у  $n$  незалежних випробуваннях  $k$  разів схеми Бернуллі при великих  $n$  і малих  $p$  таких, що  $np < 10$ , доцільно використовувати формулу Пуассона:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad \lambda = np. \quad (5.2)$$

Значення функції  $P_n(k)$  з формули Пуассона наведено в дод.3.

*Локальною функцією Лапласа* називають функцію

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (5.3)$$

*Інтегральною функцією Лапласа* називають функцію

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (5.4)$$

Значення функцій  $\varphi(x)$ ,  $\Phi(x)$  наведено відповідно в дод.1, 2.

*Зауваження.* Локальна функція Лапласа (або функція Гауса) є парною функцією. А інтегральна функція Лапласа є непарною, а для значень  $x > 5$  вважають  $\Phi(x) \approx 0.5$ .

### ***Локальна теорема Муавра–Лапласа.***

Якщо у схемі Бернуллі кількість випробувань  $n$  достатньо велика, а ймовірність  $p$  появи події  $A$  в усіх випробуваннях однакова та відмінна від нуля й одиниці, то ймовірність появи  $k$  разів події  $A$  можна знайти наближено за формулою

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad (5.5)$$

де  $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ ,  $\varphi(x)$  – локальна функція Лапласа.

### ***Інтегральна теорема Муавра–Лапласа.***

Якщо у схемі Бернуллі кількість випробувань  $n$  достатньо велика, а ймовірність  $p$  появи події  $A$  в усіх випробуваннях однакова та відмінна від нуля й одиниці, то ймовірність появи події  $A$  не менше  $k_1$  і не більше  $k_2$  разів можна знайти за наближеною формулою

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad (5.6)$$

де  $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$ ,  $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ ,  $\Phi(x)$  – інтегральна функція Лапласа.

Теорема Бернуллі.

Якщо в  $n$  незалежних випробуваннях імовірність  $p$  появи події  $A$  однакова й подія  $A$  відбудеться  $m$  разів, то для будь-якого додатного числа  $\varepsilon > 0$  виконується рівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0,$$

тобто подія, для якої відхилення визначається формулою

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| \geq \varepsilon,$$

при великих значеннях  $n$ , майже неможлива. Тому протилежна подія

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon$$

майже достовірна:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Якщо  $m_1 = np - \varepsilon n$ ,  $m_2 = np + \varepsilon n$ , то

$$x_2 = \frac{np + \varepsilon n - np}{\sqrt{npq}} = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}, \quad x_1 = \frac{np - \varepsilon n - np}{\sqrt{npq}} = -\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}.$$

І тому

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = P(np - \varepsilon n \leq m \leq np + \varepsilon n) = 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Ці формули доцільно застосовувати за умови  $np > 100$ ,  $npq > 20$ .

**Задача 2.** Страхова компанія заключила 40000 договорів. Ймовірність страхового випадку по кожному з них на протязі року складає 2%. Знайти ймовірність, що таких випадків буде не більше 870.

**Розв'язок.:** За умовою задачі  $n=40000$ ,  $p=0,02$ . Знаходимо

$$\begin{aligned} q &= 1 - p = 0,98 \\ np &= 800, \\ \sqrt{npq} &= 28. \end{aligned}$$

Для обчислення  $P(m \leq 870)$  скористаємось інтегральною теоремою Муавра – Лапласа:

$P_{40000}(0 \leq k \leq 870) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$ , де

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 800}{28} = -28,57$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{870 - 800}{28} = 2,5$$

Знаходимо по таблиці значень функції Лапласа (дод.2).

**Задача 3.** Гральний кубик підкидають 800 разів. Яка ймовірність того, що кількість очок, кратна трьом, з'явиться 267 разів?

**Розв'язок.** У цій задачі кількість випробувань  $n=800$  досить велика. Ймовірність того, що при підкиданні кубика випаде число, кратне трьом, дорівнює  $p = \frac{1}{3}$  і постійна для всіх випробувань,  $q=1-p=\frac{2}{3}$ . Тому для обчислення ймовірності скористаємося локальною теоремою Муавра – Лапласа. Знайдемо

$$x = \frac{267 - 800 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{40}{3}} = 0,025;$$

$$P_{800}(267) = \frac{3}{40} \Phi(0,025) = \frac{3}{40} \cdot 0,3988 \approx 0,03.$$

**Задача 4.** Відомо, що процент браку для деякої деталі дорівнює 0,5%. Контролер перевіряє 1000 деталей. Яка ймовірність виявити рівно три браковані деталі? Яка ймовірність виявити не менше трьох бракованих деталей?

**Розв'язок.** Маємо 1000 випробувань Бернуллі з ймовірністю „успіху”  $p=0,005$ . Доцільно застосовувати формулу Пуассона.

За умовою  $n=1000$ ,  $p=0,005$ , отже  $\lambda = np = 5$ , маємо

$$1) P_{1000}(3) = \frac{5^3}{3!} e^{-5} \approx 0,14.$$

|    |                                                                                                                                                                                                                |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2) | $P_{1000}(k \geq 3) = 1 - P_{1000}(k < 3) = 1 - [P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2)] \approx$ $\approx 1 - \left[ e^{-5} + \frac{5}{1!} \cdot e^{-5} + \frac{5^2}{2!} \cdot e^{-5} \right] \approx 0,875$ |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

$$P_{1000}(k \geq 3) = 1 - P_{1000}(k < 3) = 1 - [P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2)] \approx$$

$$\approx 1 - \left[ e^{-5} + \frac{5}{1!} \cdot e^{-5} + \frac{5^2}{2!} \cdot e^{-5} \right] \approx 0,875$$

**Задача 5.** Частка довгих волокон у партії бавовни становить у середньому 0,6 від загальної кількості волокон. Скільки потрібно взяти волокон, щоб найімовірніше число довгих волокон серед них дорівнювало 40?

**Розв'язок.** Скористаємося формулою, за якою визначається найімовірніше число настання події:  $n \cdot p - q \leq k_0 \leq n \cdot p + p$ .

Підставимо сюди значення відомих величин:

$$0,6n - 0,4 \leq 40 \leq 0,6n + 0,6$$

$$-40 - 0,4 \leq -0,6n \leq -40 + 0,6$$

$$65,7 \leq n \leq 67,5$$

Отже,  $n=66$  або  $n=67$



## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.

1. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория вероятностей. — М.: Наука, 1973.
2. *Волощенко А. Б., Гетманцев В. Д., Кузубов В. И.* Методические указания к решению задач с экономическим содержанием по разделу «Случайные события». — К.: КИНХ, 1979
3. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. шк., 1977
4. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Высш. шк., 1975. — 332 с.
5. *Жлуктенко В. І., Наконечний С. І.* Теорія ймовірностей. — К: КНЕУ, 1999. — Ч.1
6. *Крамер М. Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 2001

Додаток 1

Таблиця значень функції  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

| Цілі і<br>десяті<br>частини | Соті частини $x$ |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|-----------------------------|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $x$                         | 0                | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      |
| 0,0                         | 0,3989           | 0,3989 | 0,3989 | 0,3988 | 0,3986 | 0,3984 | 0,3982 | 0,3980 | 0,3977 | 0,3973 |
| 0,1                         | 0,3970           | 0,3965 | 0,3961 | 0,3956 | 0,3951 | 0,3945 | 0,3939 | 0,3932 | 0,3925 | 0,3918 |
| 0,2                         | 0,3910           | 0,3902 | 0,3894 | 0,3885 | 0,3876 | 0,3867 | 0,3857 | 0,3847 | 0,3836 | 0,3825 |
| 0,3                         | 0,3814           | 0,3802 | 0,3790 | 0,3778 | 0,3765 | 0,3752 | 0,3739 | 0,3725 | 0,3712 | 0,3697 |
| 0,4                         | 0,3683           | 0,3668 | 0,3653 | 0,3637 | 0,3621 | 0,3605 | 0,3589 | 0,3572 | 0,3555 | 0,3538 |
| 0,5                         | 0,3521           | 0,3503 | 0,3485 | 0,3467 | 0,3448 | 0,3429 | 0,3410 | 0,3391 | 0,3372 | 0,3352 |
| 0,6                         | 0,3332           | 0,3312 | 0,3292 | 0,3271 | 0,3251 | 0,3230 | 0,3209 | 0,3187 | 0,3166 | 0,3144 |
| 0,7                         | 0,3123           | 0,3101 | 0,3079 | 0,3056 | 0,3034 | 0,3011 | 0,2989 | 0,2966 | 0,2943 | 0,2920 |
| 0,8                         | 0,2897           | 0,2874 | 0,2850 | 0,2827 | 0,2803 | 0,2780 | 0,2756 | 0,2732 | 0,2709 | 0,2685 |
| 0,9                         | 0,2661           | 0,2637 | 0,2613 | 0,2589 | 0,2565 | 0,2541 | 0,2516 | 0,2492 | 0,2468 | 0,2444 |
| 1,0                         | 0,2420           | 0,2396 | 0,2371 | 0,2347 | 0,2323 | 0,2299 | 0,2275 | 0,2251 | 0,2227 | 0,2203 |
| 1,1                         | 0,2179           | 0,2155 | 0,2131 | 0,2107 | 0,2083 | 0,2059 | 0,2036 | 0,2012 | 0,1989 | 0,1965 |
| 1,2                         | 0,1942           | 0,1919 | 0,1895 | 0,1872 | 0,1849 | 0,1826 | 0,1804 | 0,1781 | 0,1758 | 0,1736 |
| 1,3                         | 0,1714           | 0,1691 | 0,1669 | 0,1647 | 0,1626 | 0,1604 | 0,1582 | 0,1561 | 0,1539 | 0,1518 |
| 1,4                         | 0,1497           | 0,1476 | 0,1456 | 0,1435 | 0,1415 | 0,1394 | 0,1374 | 0,1354 | 0,1334 | 0,1315 |
| 1,5                         | 0,1295           | 0,1276 | 0,1257 | 0,1238 | 0,1219 | 0,1200 | 0,1182 | 0,1163 | 0,1145 | 0,1127 |
| 1,6                         | 0,1109           | 0,1092 | 0,1074 | 0,1057 | 0,1040 | 0,1023 | 0,1006 | 0,0989 | 0,0973 | 0,0957 |
| 1,7                         | 0,0940           | 0,0925 | 0,0909 | 0,0893 | 0,0878 | 0,0863 | 0,0848 | 0,0833 | 0,0818 | 0,0804 |
| 1,8                         | 0,0790           | 0,0775 | 0,0761 | 0,0748 | 0,0734 | 0,0721 | 0,0707 | 0,0694 | 0,0681 | 0,0669 |
| 1,9                         | 0,0656           | 0,0644 | 0,0632 | 0,0620 | 0,0608 | 0,0596 | 0,0584 | 0,0573 | 0,0562 | 0,0551 |
| 2,0                         | 0,0540           | 0,0529 | 0,0519 | 0,0508 | 0,0498 | 0,0488 | 0,0478 | 0,0468 | 0,0459 | 0,0449 |
| 2,1                         | 0,0440           | 0,0431 | 0,0422 | 0,0413 | 0,0404 | 0,0396 | 0,0387 | 0,0379 | 0,0371 | 0,0363 |
| 2,2                         | 0,0355           | 0,0347 | 0,0339 | 0,0332 | 0,0325 | 0,0317 | 0,0310 | 0,0303 | 0,0297 | 0,0290 |
| 2,3                         | 0,0283           | 0,0277 | 0,0270 | 0,0264 | 0,0258 | 0,0252 | 0,0246 | 0,0241 | 0,0235 | 0,0229 |
| 2,4                         | 0,0224           | 0,0219 | 0,0213 | 0,0208 | 0,0203 | 0,0198 | 0,0194 | 0,0189 | 0,0184 | 0,0180 |
| 2,5                         | 0,0175           | 0,0171 | 0,0167 | 0,0163 | 0,0158 | 0,0154 | 0,0151 | 0,0147 | 0,0143 | 0,0139 |
| 2,6                         | 0,0136           | 0,0132 | 0,0129 | 0,0126 | 0,0122 | 0,0119 | 0,0116 | 0,0113 | 0,0110 | 0,0107 |
| 2,7                         | 0,0104           | 0,0101 | 0,0099 | 0,0096 | 0,0093 | 0,0091 | 0,0088 | 0,0086 | 0,0084 | 0,0081 |
| 2,8                         | 0,0079           | 0,0077 | 0,0075 | 0,0073 | 0,0071 | 0,0069 | 0,0067 | 0,0065 | 0,0063 | 0,0061 |
| 2,9                         | 0,0060           | 0,0058 | 0,0056 | 0,0055 | 0,0053 | 0,0051 | 0,0050 | 0,0048 | 0,0047 | 0,0046 |
| 3,0                         | 0,0044           | 0,0043 | 0,0042 | 0,0040 | 0,0039 | 0,0038 | 0,0037 | 0,0036 | 0,0035 | 0,0034 |
| 3,1                         | 0,0033           | 0,0032 | 0,0031 | 0,0030 | 0,0029 | 0,0028 | 0,0027 | 0,0026 | 0,0025 | 0,0025 |

## Продовження таблиці

|     |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 3,2 | 0,0024 | 0,0023 | 0,0022 | 0,0022 | 0,0021 | 0,0020 | 0,0020 | 0,0019 | 0,0018 | 0,0018 |
| 3,3 | 0,0017 | 0,0017 | 0,0016 | 0,0016 | 0,0015 | 0,0015 | 0,0014 | 0,0014 | 0,0013 | 0,0013 |
| 3,4 | 0,0012 | 0,0012 | 0,0012 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0010 | 0,0010 | 0,0010 | 0,0009 | 0,0009 |
| 3,5 | 0,0009 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0006 |
| 3,6 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0004 |
| 3,7 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 |
| 3,8 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 |
| 3,9 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0001 |

## Додаток 2

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ ЛАПЛАСА  $\Phi(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

| $x$  | $\Phi(x)$ | $x$  | $\Phi(x)$ | $x$  | $\Phi(x)$ | $x$   | $\Phi(x)$ |
|------|-----------|------|-----------|------|-----------|-------|-----------|
| 0,00 | 0,0000    | 0,26 | 0,1026    | 0,52 | 0,1985    | 0,78  | 0,2823    |
| 0,01 | 0,0040    | 0,27 | 0,1064    | 0,53 | 0,2019    | 0,79  | 0,2852    |
| 0,02 | 0,0080    | 0,28 | 0,1103    | 0,54 | 0,2054    | 0,80  | 0,2881    |
| 0,03 | 0,0120    | 0,29 | 0,1141    | 0,55 | 0,2088    | 0,81  | 0,2910    |
| 0,04 | 0,0160    | 0,30 | 0,1179    | 0,56 | 0,2123    | 0,820 | 0,2939    |
| 0,05 | 0,0199    | 0,31 | 0,1217    | 0,57 | 0,2157    | 0,83  | 0,2967    |
| 0,06 | 0,0239    | 0,32 | 0,1255    | 0,58 | 0,2190    | 0,84  | 0,2995    |
| 0,07 | 0,0279    | 0,33 | 0,1293    | 0,59 | 0,2224    | 0,85  | 0,3023    |
| 0,08 | 0,0319    | 0,34 | 0,1331    | 0,60 | 0,2257    | 0,86  | 0,3051    |
| 0,09 | 0,0359    | 0,35 | 0,1368    | 0,61 | 0,2291    | 0,87  | 0,3078    |
| 0,10 | 0,0398    | 0,36 | 0,1406    | 0,62 | 0,2324    | 0,88  | 0,3106    |
| 0,11 | 0,0438    | 0,37 | 0,1443    | 0,63 | 0,2357    | 0,89  | 0,3133    |
| 0,12 | 0,0478    | 0,38 | 0,1480    | 0,64 | 0,2389    | 0,90  | 0,3159    |
| 0,13 | 0,0517    | 0,39 | 0,1617    | 0,65 | 0,2422    | 0,91  | 0,3186    |
| 0,14 | 0,0557    | 0,40 | 0,1564    | 0,66 | 0,2454    | 0,92  | 0,3212    |
| 0,15 | 0,0596    | 0,41 | 0,1691    | 0,67 | 0,2486    | 0,93  | 0,3238    |
| 0,16 | 0,0636    | 0,42 | 0,1628    | 0,68 | 0,2517    | 0,94  | 0,3264    |
| 0,17 | 0,0675    | 0,43 | 0,1664    | 0,69 | 0,2549    | 0,95  | 0,3289    |
| 0,18 | 0,0714    | 0,44 | 0,1700    | 0,70 | 0,2580    | 0,96  | 0,3315    |
| 0,19 | 0,0753    | 0,45 | 0,1736    | 0,71 | 0,2611    | 0,97  | 0,3340    |
| 0,20 | 0,0793    | 0,46 | 0,1772    | 0,72 | 0,2642    | 0,98  | 0,3365    |
| 0,21 | 0,0832    | 0,47 | 0,1808    | 0,73 | 0,2673    | 0,99  | 0,3389    |
| 0,22 | 0,0871    | 0,48 | 0,1844    | 0,74 | 0,2703    | 1,00  | 0,3413    |
| 0,23 | 0,0910    | 0,49 | 0,1879    | 0,75 | 0,2734    | 1,01  | 0,3438    |
| 0,24 | 0,0948    | 0,50 | 0,1915    | 0,76 | 0,2764    | 1,02  | 0,3461    |
| 0,25 | 0,0987    | 0,51 | 0,1950    | 0,77 | 0,2794    | 1,03  | 0,3485    |
| 1,04 | 0,3508    | 1,33 | 0,4082    | 1,62 | 0,4474    | 1,91  | 0,4719    |
| 1,05 | 0,3531    | 1,34 | 0,4099    | 1,63 | 0,4484    | 1,92  | 0,4726    |

Продовження таблиці

|      |        |      |        |      |         |         |          |
|------|--------|------|--------|------|---------|---------|----------|
| 1,06 | 0,3554 | 1,35 | 0,4115 | 1,64 | 0,4495  | 1,93    | 0,4732   |
| 1,07 | 0,3577 | 1,36 | 0,4131 | 1,65 | 0,4505  | 1,94    | 0,4738   |
| 1,08 | 0,3599 | 1,37 | 0,4147 | 1,66 | 0,4515- | 1,95    | 0,4744   |
| 1,09 | 0,3621 | 1,38 | 0,4162 | 1,67 | 0,4525  | 1,96    | 0,4750   |
| 1,10 | 0,3643 | 1,39 | 0,4177 | 1,68 | 0,4535  | 1,97    | 0,4756   |
| 1,11 | 0,3665 | 1,40 | 0,4192 | 1,69 | 0,4545  | 1,98    | 0,4761   |
| 1,12 | 0,3686 | 1,41 | 0,4207 | 1,70 | 0,4554  | 1,99    | 0,4767   |
| 1,13 | 0,3708 | 1,42 | 0,4222 | 1,71 | 0,4564  | 2,00    | 0,4772   |
| 1,14 | 0,3729 | 1,43 | 0,4236 | 1,72 | 0,4573  | 2,02    | 0,4783   |
| 1,15 | 0,3749 | 1,44 | 0,4251 | 1,73 | 0,4582  | 2,04    | 0,4793   |
| 1,16 | 0,3770 | 1,45 | 0,4265 | 1,74 | 0,4591  | 2,06    | 0,4803   |
| 1,17 | 0,3790 | 1,46 | 0,4279 | 1,75 | 0,4599  | 2,08    | 0,4812   |
| 1,18 | 0,3810 | 1,47 | 0,4292 | 1,76 | 0,4608  | 2,10    | 0,4821   |
| 1,19 | 0,3830 | 1,48 | 0,4306 | 1,77 | 0,4616  | 2,12    | 0,4830   |
| 1,20 | 0,3849 | 1,49 | 0,4319 | 1,78 | 0,4625  | 2,14    | 0,4838   |
| 1,21 | 0,3869 | 1,50 | 0,4332 | 1,79 | 0,4633  | 2,16    | 0,4846   |
| 1,22 | 0,3883 | 1,51 | 0,4345 | 1,80 | 0,4641  | 2,18    | 0,4854   |
| 1,23 | 0,3907 | 1,52 | 0,4357 | 1,81 | 0,4649  | 2,20    | 0,4861   |
| 1,24 | 0,3925 | 1,53 | 0,4370 | 1,82 | 0,4656  | 2,22    | 0,4868   |
| 1,25 | 0,3944 | 1,54 | 0,4382 | 1,83 | 0,4664  | 2,24    | 0,4875   |
| 1,26 | 0,3962 | 1,55 | 0,4394 | 1,84 | 0,4671  | 2,26    | 0,4881   |
| 1,27 | 0,3980 | 1,56 | 0,4406 | 1,85 | 0,4678  | 2,28    | 0,4887   |
| 1,28 | 0,3997 | 1,57 | 0,4418 | 1,86 | 0,4686  | 2,30    | 0,4893   |
| 1,29 | 0,4015 | 1,58 | 0,4429 | 1,87 | 0,4693  | 2,32    | 0,4898   |
| 1,30 | 0,4032 | 1,59 | 0,4441 | 1,88 | 0,4699  | 2,34    | 0,4904   |
| 1,31 | 0,4049 | 1,60 | 0,4452 | 1,89 | 0,4706  | 2,36    | 0,4909   |
| 1,32 | 0,4066 | 1,61 | 0,4463 | 1,90 | 0,4713  | 2,38    | 0,4913   |
| 2,40 | 0,4918 | 2,60 | 0,4953 | 2,80 | 0,4974  | 3,20    | 0,49931  |
| 2,42 | 0,4922 | 2,62 | 0,4956 | 2,82 | 0,4976  | 3,40    | 0,49966  |
| 2,44 | 0,4927 | 2,64 | 0,4959 | 2,84 | 0,4977  | 3,60    | 0,49984  |
| 2,46 | 0,4931 | 2,66 | 0,4961 | 2,86 | 0,4979  | 3,80    | 0,499928 |
| 2,48 | 0,4934 | 2,68 | 0,4963 | 2,90 | 0,4981  | 4,00    | 0,499968 |
| 2,50 | 0,4938 | 2,70 | 0,4965 | 2,92 | 0,4982  | 5,00    | 0,499997 |
| 2,52 | 0,4941 | 2,72 | 0,4967 | 2,94 | 0,4984  |         |          |
| 2,54 | 0,4945 | 2,74 | 0,4969 | 2,96 | 0,49846 |         |          |
| 2,56 | 0,4948 | 2,76 | 0,4971 | 2,98 | 0,49856 |         |          |
| 2,58 | 0,4951 | 2,78 | 0,4973 | 3,00 | 0,49865 | $x > 5$ | 0,5      |