

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ХІМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ДИСЦИПЛІНИ
«ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА»
ДЛЯ СТУДЕНТІВ ОСВІТНЬО-КВАЛІФІКАЦІЙНОГО РІВНЯ «БАКАЛАВР»
НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ 073 «МЕНЕДЖМЕНТ»
ДЕННОЇ ТА ЗАОЧНОЇ ФОРМ НАВЧАННЯ

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики
Протокол № 3 від 17.10.16

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Вища та прикладна математика» для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напряму підготовки 073 «Менеджмент» денної та заочної форм навчання / Укл.: Науменко Т.С., Шапка І.В. – Д.: ДВНЗ УДХТУ, 2017. – 78 с.

Укладачі: Т.С. Науменко
І.В. Шапка

Відповідальний за випуск В.І. Олевський, д-р техн. наук

Навчальне видання

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Вища та прикладна математика» для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напряму підготовки 073 «Менеджмент» денної та заочної форм навчання

Укладачі: НАУМЕНКО Тетяна Станіславівна
ШАПКА Ірина Віталіївна

Технічний редактор В.П. Синицька
Комп'ютерна верстка В.П. Синицька

Підписано до друку 10.04.17. Формат 60×84¹/₁₆. Папір ксерокс. Друк різнограф.
Умов. друк. арк. 3,55. Обл.-вид. арк. 3,62. Тираж 100 прим. Зам. № 504.
Свідоцтво ДК № 5026 від 16.12.2015

ДВНЗ УДХТУ, просп. Гагаріна, 8, м. Дніпро, 49005

Редакційно-видавничий відділ

ЗМІСТ

Правила виконання та оформлення індивідуальних завдань.....	4
Тема 1. Лінійна алгебра.....	5
Індивідуальне завдання № 1.....	10
Тема 2. Аналітична геометрія на площині.....	11
Індивідуальне завдання № 2.....	14
Тема 3. Границя функції.....	15
Індивідуальне завдання № 3.....	22
Тема 4. Похідна. Диференціювання функції.....	26
Індивідуальне завдання № 4.....	30
Тема 5. Невизначений інтеграл.....	33
Індивідуальне завдання № 5.....	37
Тема 6. Визначений інтеграл та його застосування.....	42
Індивідуальне завдання № 6.....	44
Тема 7. Диференціальні рівняння.....	50
Індивідуальне завдання № 7.....	57
Тема 8. Елементи теорії ймовірності.....	63
Індивідуальне завдання № 8.....	73
Індивідуальне завдання № 9.....	75
Список літератури.....	78

ПРАВИЛА ВИКОНАННЯ ТА ОФОРМЛЕННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

1. Кожне індивідуальне завдання має бути виконане на окремих аркушах в клітинку. В роботі необхідно залишити поля для зауважень викладача, який перевіряє її.

2. У заголовку роботи на титульній сторінці мають бути ясно написані: номер і назва індивідуального завдання, з якої дисципліни вона виконується, групу, прізвище та ім'я студента, номер варіанта. Також необхідно вказати дату виконання роботи і підпис студента.

3. Далі з нової сторінки необхідно розмістити відповідні розв'язування завдань. У роботу мають бути включені всі завдання, вказані в роботі, відповідно до варіанта. Роботи, що містять завдання не свого варіанта, не зараховуються.

4. Розв'язання завдань необхідно розташовувати в порядку зростання їх номерів, вказаних в роботі, зберігаючи номери завдань.

5. Перед розв'язанням кожної задачі необхідно повністю навести її умову. У тому випадку, коли декілька завдань, з яких студент обирає завдання свого варіанта, мають спільне формулювання, необхідно, переписуючи умову завдання, замінити спільні дані конкретними, узяними з відповідного номера.

6. Розв'язання завдань слід викладати детально та акуратно, пояснюючи і мотивуючи всі дії по ходу вирішення, приводячи викладення, вказуючи посилання на відповідні теоретичні поняття та формули, роблячи необхідні креслення. Рисунок та графіки мають виконуватись акуратно і чітко.

7. Індивідуальні завдання виконуються студентом самостійно у зазначений рейтинговою карткою (або викладачем) термін.

Роботи, виконані без дотримання цих правил, не перевіряються і повертаються студентів для переробки.

ТЕМА 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1.1 Матриці та дії над ними

Поняття матриці та відповідний розділ математики мають важливе значення для економістів, оскільки велика кількість досліджувальних об'єктів і процесів досить просто, а головне – компактно, подається в матричній формі.

Матрицею розміру $m \times n$ називається множина з mn елементів a_{ij} , розміщених у вигляді прямокутної таблиці з m рядків і n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad (1.2)$$

де a_{ij} – елемент матриці; i – номер рядка; j – номер стовпця.

Матриці бувають різних типів: прямокутні, квадратні, діагональні, одиничні, нульові та інші.

Над матрицями, як і над числами, можна виконувати різні операції, причому деякі з них – аналогічні операціям над числами, а деякі – специфічні.

Розрізняють наступні дії над матрицями:

1. *Операція порівняння*: дві матриці $A = (a_{ij})_{m \times n}$ та $B = (b_{ij})_{m \times n}$ називаються рівними $A = B$, якщо рівні їх відповідні елементи, тобто $a_{ij} = b_{ij}$.

2. *Множення матриці на число*: добутком матриці A на число λ називається матриця C , елементи якої визначаються за формулою

$$c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}. \quad (1.4)$$

3. *Додавання та віднімання матриць*: сумою двох матриць A і B називається матриця C , елементи якої визначаються за формулою

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}. \quad (1.5)$$

Додавати можна матриці лише однакового розміру, тобто матриці з однаковою кількістю рядків і стовпців.

4. *Транспонування матриці*: транспонованою матрицею до матриці A називається така матриця, в якій рядки та стовпці міняються місцями, і позначається літерою A^T .

5. *Множення матриць*: добутком двох матриць A і B називається матриця C , елементи якої визначаються за формулою

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^k a_{is} \cdot b_{sj} . \quad (1.6)$$

Перемножать можливо лише такі дві матриці, в яких кількість стовпців першої збігається з кількістю рядків другої:

$$\underset{n \times m}{C} = \underset{n \times k}{A} \cdot \underset{k \times m}{B} . \quad (1.7)$$

Добутком двох матриць є матриця, в якій кількість рядків дорівнює кількості рядків першої матриці, а кількість стовпців – кількості стовпців другої матриці.

1.2 Означення визначників

Квадратній матриці можна поставити у відповідність число, що обчислюється за певним правилом і називається **визначником**. Його позначають символом ΔA або $\det A$. Правило, за яким обчислюється визначник, залежить від порядку матриці.

Визначник другого порядку обчислюється наступним чином:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} . \quad (1.8)$$

Визначник другого порядку дорівнює різниці добутків елементів головної та побічної діагоналі.

Визначником третього порядку називається число, що обчислюється за таким правилом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21} \quad (1.9)$$

Формула (1.9) – це формула „трикутника” для обчислення визначника третього порядку. Якщо елементи матриці третього порядку позначити точками, то три доданки, що беруться зі знаком „+”, лежать на головній діагоналі й у вершинах трикутників, одна із сторін яких паралельна головній діагоналі (рис. 1.1).

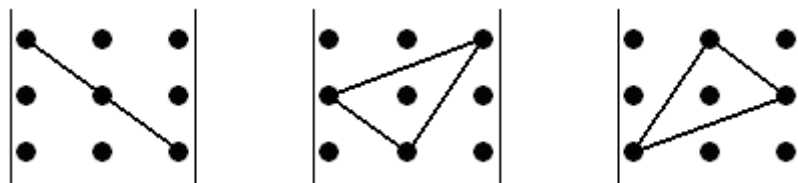


Рис.1.1

Аналогічні співмножники від'ємних доданків лежать на побічній діагоналі та у вершинах трикутників, одна із сторін яких паралельна їй (рис. 1.2).

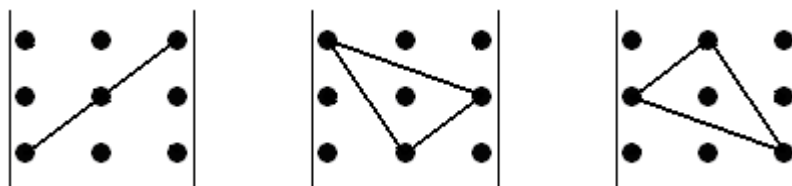


Рис.1.2

За іншою схемою дописують два перші стовпці до матриці, внаслідок чого одержують прямокутну матрицю розміром 3×5 . Тоді додатні та від'ємні доданки формули (1.9) беруть за схемою (правило Саррюса), зображеною на рис. 1.3.

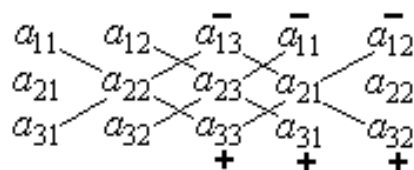


Рис.1.3

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника називається визначник меншого на одиницю порядку, отриманий із даного шляхом викреслення з нього i -го рядка та j -го стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника називається величина, яку знаходять за формулою

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}. \quad (1.10)$$

Визначник дорівнює сумі добутків будь-якого рядка чи стовпця на їхні алгебраїчні доповнення.

У матричному численні важливу роль відіграє поняття оберненої матриці. Матриця B , яка задовольняє співвідношення

$$A \cdot B = B \cdot A = E \quad (1.11)$$

називається **оберненою** до матриці A і позначається A^{-1} .

Для того, щоб квадратна матриця A мала обернену матрицю, необхідно і достатньо, щоб її визначник не дорівнював нулю. Обернену матрицю можна знайти різними способами. Один із них полягає у побудові приєднаної матриці. Транспонована матриця, яка складена із алгебраїчних доповнень до їх елементів, називається **приєднаною** і позначається $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Тоді обернену матрицю можливо знайти наступним чином:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}^T. \quad (1.13)$$

1.3 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

За допомогою систем лінійних алгебраїчних рівнянь моделюється переважна більшість практичних задач з економіки.

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2, \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1.14)$$

де a_{ij} – коефіцієнти рівняння; x_i – невідомі рівняння; b_i – вільні члени рівняння.

Розв’язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь називають таку сукупність чисел, яка перетворює всі рівняння (1.14) на числові тотожності.

Якщо права частина (1.14) дорівнює нулю $b_i = 0$, то систему рівнянь називають **однорідною** або **неоднорідною**, якщо $b_i \neq 0$.

Система рівнянь (1.14) називається **сумісною**, якщо вона має хоча б один розв’язок, і **несумісною**, якщо не має жодного розв’язку.

Складемо визначник третього порядку з коефіцієнтів систем – **головний визначник системи**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (1.15)$$

Можливі наступні випадки розв’язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

1) $\Delta \neq 0$, тоді система (1.14) має єдиний розв’язок, який можна знайти або за формулами Крамера, або методом Гаусса, або матричним способом;

2) $\Delta = 0$, тоді система (1.14) або несумісна, або має безліч розв’язків.

Матричний метод розв’язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь: якщо систему (1.14) записати в матричній формі

$$A \cdot X = B. \quad (1.16)$$

де A – матриця коефіцієнтів системи;

X – матриця невідомих;

B – матриця вільних членів.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Помножимо (1.17) на обернену матрицю A^{-1} . Оскільки $A^{-1} \cdot A = E$, то дістанемо матричний спосіб розв'язування систем:

$$X = A^{-1} \cdot B. \quad (1.18)$$

Приклад 1. Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним методом.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Розв'язок. Маємо систему з трьох рівнянь. Позначимо матрицю і вектори літерами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матричний розв'язок системи алгебраїчних рівнянь шукаємо за формулою $X = A^{-1} \cdot B$. Для знаходження оберненої матриці A^{-1} обчислимо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-3) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - (-3) \cdot (-1) \cdot 1 - 3 \cdot (-1) \cdot 3 = 1$$

Оскільки визначник відмінний від нуля, то задана система рівнянь сумісна і має єдиний розв'язок. Знайдемо транспоновану матрицю A^T

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення до елементів заданої матриці:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-3) \cdot (-1) = 3$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -((-1) \cdot 3 - (-3) \cdot 1) = 0$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) - 1 \cdot 2 = -1$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 3 - (-1) \cdot 2) = -11$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 1$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(1*(-1) - 1*3) = 4$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3*(-3) - 2*2 = -13$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -(1*(-3) - (-1)*2) = 1$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1*2 - (-1)*3 = 5$$

Обернену матрицю отримаємо за формулою $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} * \bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -11 & 1 & 4 \\ -13 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Знайдемо розв'язок СЛАР: $X = A^{-1} * B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -11 & 1 & 4 \\ -13 & 1 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3*1 \\ -11*1+1*6 \\ -13*1+1*6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$

Розв'язок системи рівнянь $x_1=3$; $x_2=-5$; $x_3=-7$.

Індивідуальне завдання № 1 «Лінійна алгебра»

Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь матричним методом:

Варіант 1 $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 4 \\ 2x - 4y - 3z = -17 \\ x + 5y + z = 6 \end{cases}$	Варіант 2 $\begin{cases} 5x + 8y - z = -5 \\ 2x - 3y = 2z = -1 \\ x + 2y + 3z = 9 \end{cases}$	Варіант 3 $\begin{cases} 3x + y + z = -2 \\ x - 4y - 2z = -12 \\ -3x + 5y + 6z = 29 \end{cases}$
Варіант 4 $\begin{cases} 2x - y + 5z = 10 \\ 5x + 2y + 13z = 31 \\ 3x - y + 5z = 8 \end{cases}$	Варіант 5 $\begin{cases} x + y - z = -4 \\ 4x - 3y + z = -8 \\ 2x + y - z = -6 \end{cases}$	Варіант 6 $\begin{cases} 7x - 5y = -26 \\ 4x + 11y = -1 \\ 2x + 3y + 4z = -7 \end{cases}$
Варіант 7 $\begin{cases} x + 2y + z = -2 \\ 3x - 5y + 3z = -17 \\ 2x + 7y - z = 2 \end{cases}$	Варіант 8 $\begin{cases} x + y - z = -1 \\ 8x + 3y - 6z = -15 \\ -4x - y + 3z = 8 \end{cases}$	Варіант 9 $\begin{cases} x - 2y + 3z = -8 \\ 2x + 3y - 4z = 1 \\ 3x - 2y - 5z = -6 \end{cases}$
Варіант 10 $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = -17 \\ 2x + 5y - 3z = 2 \\ 5x + 6y - 2z = -7 \end{cases}$	Варіант 11 $\begin{cases} 3x + 3y + z = 3 \\ 2x + 3y + z = 6 \\ 2x + y + 3z = 6 \end{cases}$	Варіант 12 $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = -4 \\ 3x - 2y - 5z = -17 \end{cases}$
Варіант 13 $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = -6 \\ 2x + 5y - 3z = 2 \\ 5x + 6y - 2z = 3 \end{cases}$	Варіант 14 $\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ 4x + y + 4z = 6 \end{cases}$	Варіант 15 $\begin{cases} 2x - y - z = -6 \\ 3x + 4y - 2z = 1 \\ 3x - 2y + 4z = 1 \end{cases}$
Варіант 16	Варіант 17	Варіант 18

$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = -12 \\ 2x - 4y - 3z = 10 \\ x + 5y + z = -18 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x + 8y - z = -34 \\ 2x - 3y + 2z = 16 \\ x + 2y + 3z = -2 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + y + z = -2 \\ x - 4y - 2z = 12 \\ -3x + 5y + 6z = -8 \end{cases}$
Варіант 19 $\begin{cases} 2x - y + 5z = 14 \\ 5x + 2y + 13z = 18 \\ 3x - y + 5z = 14 \end{cases}$	Варіант 20 $\begin{cases} x + y - z = -6 \\ 4x - 3y + z = 14 \\ 2x + y - z = -6 \end{cases}$	Варіант 21 $\begin{cases} 7x - 5y = -14 \\ 4x + 11y = -8 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$
Варіант 22 $\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 3x - 5y + 3z = -3 \\ 2x + 7y - z = -5 \end{cases}$	Варіант 23 $\begin{cases} x + y - z = -3 \\ 8x + 3y - 6z = -24 \\ -4x - y + 3z = 11 \end{cases}$	Варіант 24 $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = -8 \\ 3x - 2y - 5z = -11 \end{cases}$
Варіант 25 $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = -6 \\ 2x + 5y - 3z = -7 \\ 5x + 6y - 2z = -12 \end{cases}$	Варіант 26 $\begin{cases} 3x + 2y + z = 11 \\ 2x + 3y + z = 9 \\ 2x + y + 3z = 7 \end{cases}$	Варіант 27 $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \\ 3x - 2y - 5z = 7 \end{cases}$
Варіант 28 $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 5y - 3z = 11 \\ 5x + 6y - 2z = 21 \end{cases}$	Варіант 29 $\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ 4x + y + 4z = 13 \end{cases}$	Варіант 30 $\begin{cases} 2x - y - z = 5 \\ 3x + 4y - 2z = 13 \\ 3x - 2y + 4z = 7 \end{cases}$

ТЕМА 2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

Пряма лінія на площині

Рівняння $F(x, y) = 0$ називається **рівнянням лінії**, якщо його задовольняють усі точки, що лежать на даній лінії, і не задовольняє жодна точка, що не лежить на даній лінії. Найпростішою у певному розумінні лінією є пряма.

1. Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ та перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B)$:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0. \quad (2.1)$$

Орієнтацію прямої L (рис. 2.1) на площині можна задати за допомогою нормального вектора $\vec{n} = (A, B)$ (довільного вектора, перпендикулярного до L).

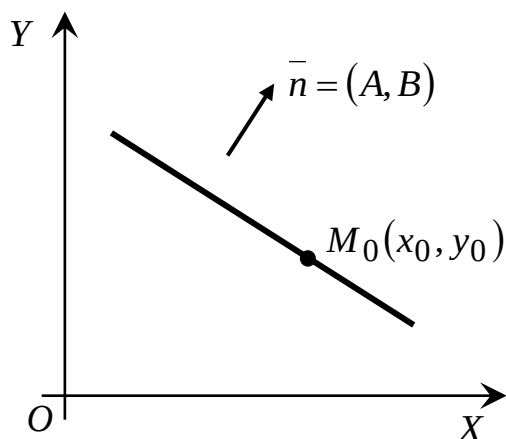


Рис. 2.1

2. Загальне рівняння прямої:

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0. \quad (2.2)$$

3. Канонічне рівняння прямої та параметричне рівняння прямої:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}; \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot l \\ y = y_0 + t \cdot m \end{cases}. \quad (2.4)$$

Пряма лінія (рис. 2.2), що задана рівняннями виду (2.3) або (2.4), проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ з напрямляючим вектором $\vec{s} = (l, m)$, який паралельний даній прямій.

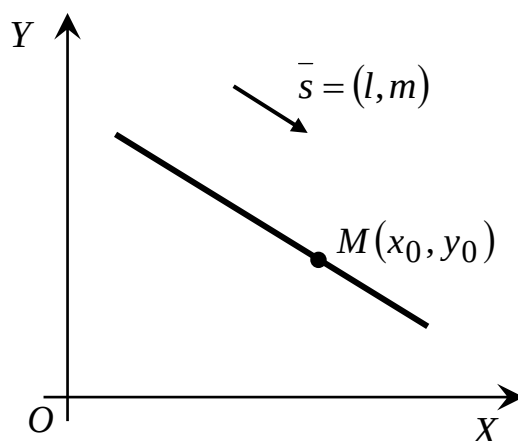
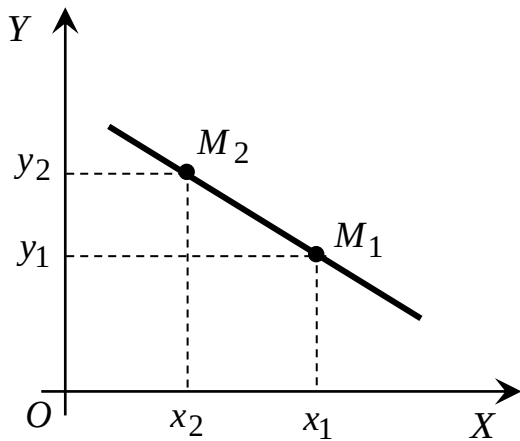


Рис. 2.2

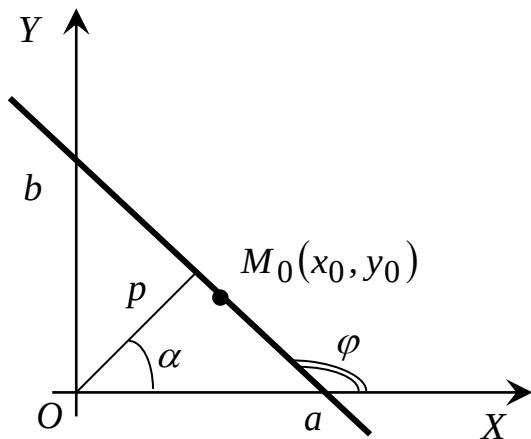
4. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$



$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (2.5)$$

Рис. 2.3

5. Рівняння прямої у відрізках на осях



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (2.6)$$

де a та b – відрізки, які відсікає пряма від координатних осей OX та OY відповідно.

Рис. 2.4

6. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом (рис. 2.4)

$$y = k \cdot x + b, \quad (2.7)$$

де $k = \operatorname{tg} \varphi$ – кутовий коефіцієнт прямої, b – відрізок, який відсікає пряма від координатної осі.

7. Рівняння прямої, яка проходить у заданому напрямку через задану точку (рівняння в'язки) (рис. 2.4):

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0). \quad (2.8)$$

8. Нормальне рівняння прямої (рис. 2.4):

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha - p = 0, \quad (2.9)$$

де p – відстань від початку координат до прямої; α, β – кути, які створює нормаль проведена з початку координат з осями Ox, Oy .

9. Відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої:

– якщо пряма задана рівнянням виду (2.9)

$$d_M = |x_0 \cdot \cos \alpha + y_0 \cdot \sin \alpha - p|, \quad (2.10)$$

– якщо пряма задана рівнянням виду (2.2)

$$d_M = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (2.11)$$

Взаємне розташування двох прямих на площині:

Прямі задані загальним рівнянням: $L_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0; \quad \overline{n_1} = (A_1; B_1)$ $L_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0; \quad \overline{n_2} = (A_2; B_2)$	Прямі задані рівнянням з кутовим коефіцієнтом: $L_1 : y = k_1x + b$ $L_2 : y = k_2x + b$
1. Умова паралельності прямих:	
$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$	$k_1 = k_2$
2. Умова перпендикулярності прямих	
$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$	$k_1 \cdot k_2 = -1$
3. Кут між прямими	
$\cos \varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$	$\operatorname{tg} \varphi = \left \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right $

Індивідуальне завдання 2 „Аналітична геометрія на площині”

Задані координати вершин трикутника ABC . Знайти:

- 1) рівняння сторони AB , записати його у вигляді рівняння у відрізках;
- 2) рівняння прямої BK , що проходить через точку B паралельно стороні AC ;
- 3) рівняння висоти CD та її довжини;
- 4) кут між висотою CD та медіаною BM ;
- 5) побудувати усі лінії.

Варіант 1	A (6;2)	B (30;-5)	C (12;19)
Варіант 2	A (4;3)	B (-12;-9)	C (-5;15)
Варіант 3	A (-1;7)	B (11;2)	C (17;10)
Варіант 4	A (1;1)	B (-15;11)	C (-8;13)
Варіант 5	A (-14;10)	B (10;3)	C (-8;27)
Варіант 6	A (7;1)	B (-5;-4)	C (-9;-1)
Варіант 7	A (-2;1)	B (-18;-11)	C (-11;13)
Варіант 8	A (10;-1)	B (-2;-6)	C (-6;-3)
Варіант 9	A (-12;6)	B (12;-1)	C (-6;23)
Варіант 10	A (8;0)	B (-4;-5)	C (-8;-2)
Варіант 11	A (11;0)	B (-5;4)	C (-1;-1)
Варіант 12	A (10;2)	B (-6;6)	C (-2;1)
Варіант 13	A (14;0)	B (-2;4)	C (2;-1)
Варіант 14	A (13;2)	B (-3;6)	C (1;1)
Варіант 15	A (11;3)	B (-5;7)	C (-1;2)
Варіант 16	A (13;-1)	B (-3;3)	C (1;-2)
Варіант 17	A (11;-2)	B (-5;6)	C (-1;1)
Варіант 18	A (13;0)	B (-3;4)	C (1;-1)
Варіант 19	A (11;-1)	B (-5;3)	C (-1;-2)
Варіант 20	A (13;3)	B (-3;7)	C (1;2)
Варіант 21	A (6;2)	B (30;-5)	C (12;19)
Варіант 22	A (4;3)	B (-12;-9)	C (-5;15)
Варіант 23	A (-1;7)	B (11;2)	C (17;10)
Варіант 24	A (1;1)	B (-15;11)	C (-8;13)
Варіант 25	A (-14;10)	B (10;3)	C (-8;27)
Варіант 26	A (7;1)	B (-5;-4)	C (-9;-1)
Варіант 27	A (-2;1)	B (-18;-11)	C (-6;-3)
Варіант 28	A (10;-1)	B (-2;-6)	C (-6;23)
Варіант 29	A (-12;6)	B (12;-1)	C (-6;23)
Варіант 30	A (8;0)	B (-4;-5)	C (-8;-2)

ТЕМА 3. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

Перед тим, як шукати границі, важливо засвоїти поняття границі (ліміту) змінної величини, границі (ліміту) функції та способи їх знаходження.

Одним із найважливіших понять математичного аналізу є поняття границі функції. При вивченні поняття границі функції $y = f(x)$ в точці $x = x_0$ студент повинен пам'ятати про те, що функція в точці $x = x_0$ може бути невизначеною, а границя її в точці $x = x_0$ визначається значеннями функції в колі точки $x = x_0$ без самої точки $x = x_0$.

Часто при обчисленні границь виникають ситуації, коли при безпосередній підстановці граничного значення аргументу у вираз функції, що

стоїть під знаком границі, не можна дійти висновку про наявність або відсутність границі вказаної функції, то маємо невизначеність. Обчислення границь функцій, як правило, зводиться до розкриття невизначеностей вигляду:

$\left\{\frac{0}{0}\right\}$; $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$; $\{\infty - \infty\}$; $\{0 \cdot \infty\}$; $\{1^\infty\}$; $\{0^0\}$; $\{\infty^0\}$. Для того щоб розкрити ці

невизначеності, необхідно зробити деякі алгебраїчні перетворення виразів, які є під знаком границі, або ж застосувати так звані “визначні” границі. Основними з них є такі:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{arctg} x} = 1 \text{ – перша визначна границя};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \text{ – друга визначна границя (число } e \approx 2,72$$

називається сталою Ейлера).

Між нескінченно великими та нескінченно малими існує зв’язок: величина, обернена до нескінченно малої, є нескінченно велика, та, навпаки, величина, обернена до нескінченно великої, являється нескінченно малою.

Символічно це можна записати в вигляді: $\frac{1}{\infty} = 0$, $\frac{1}{0} = \infty$.

Вид функції	Граничне значення змінної	Вигляд невизначеності	Спосіб знаходження
1	2	3	4
1. а) відношення двох поліномів; б) відношення з коренями	$x \rightarrow \infty$	$\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$	чисельник та знаменник дробу необхідно поділити на найвищий степінь x , який зустрічається в доданках чисельника та знаменника, та виділити нескінченно малі доданки
2. Відношення двох поліномів	$x \rightarrow x_0$	$\left\{\frac{0}{0}\right\}$	чисельник та знаменник необхідно розкласти на множники і скоротити дріб на критичний співмножник $(x - x_0)$
3. Сума або різниця двох дробів	$x \rightarrow x_0$	$\{\infty - \infty\}$	необхідно перетворити вираз на один дріб; за наявності невизначеності вигляду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ скоротити дріб на $(x - x_0)$
4. Дріб з коренями	$x \rightarrow x_0$	$\left\{\frac{0}{0}\right\}$	за допомогою формул скороченого множення необхідно позбутися ірраціональності, виділити множник $(x - x_0)$ та скоротити на нього

1	2	3	4
5. Вираз з коренями	$x \rightarrow \infty$	$\{\infty - \infty\}$	необхідно позбутися ірраціональності за допомогою формул скороченого множення; якщо невизначеність не зникне, а перетвориться у невизначеність $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, то поділити на старшу степінь змінної (з урахуванням степені кореня)
6. Вираз з тригонометричними функціями	$x \rightarrow 0$	$\left\{\frac{0}{0}\right\}$ або $\{0 \cdot \infty\}$	перетворити суми тригонометричних функцій на добутки; множники, границя яких не дорівнює 0 або ∞ , замінити цими границями; для кожного множника, який прямує до 0, побудувати I визначну границю
7. Вираз з тригонометричними функціями	$x \rightarrow x_0 \neq 0$	$\left\{\frac{0}{0}\right\}$ або $\{0 \cdot \infty\}$	перетворити суми тригонометричних функцій на добутки; множники, границя яких не дорівнює 0 або ∞ , замінити цими границями; зробити заміну змінної $x - x_0 = t$ або $x_0 - x = t$ ($t \rightarrow 0$); для кожного множника, який прямує до 0, побудувати I визначну границю; при $x \rightarrow \infty$ зробити заміну $\frac{1}{x} = t$, $t \rightarrow 0$
8. Степенєво-показникова функція	$x \rightarrow \infty$	$\{1^\infty\}$	основу степені записати як суму 1 і нескінченно малої функції, побудувати II визначну границю та розкрити невизначеність у показнику
9. Вираз з логарифмом	аргумент логарифма прямує до 1	$\left\{\frac{0}{0}\right\}$	записати аргумент логарифма як суму 1 і нескінченно малої функції, побудувати II визначну границю під знаком логарифма
10. Різниця логарифмів еквівалентних величин	$x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow x_0$	$\left\{\frac{0}{0}\right\}$, $\{0 \cdot \infty\}$, $\{\infty - \infty\}$	перетворити різницю логарифмів на логарифм частки та побудувати під знаком логарифма II визначну границю

Приклад 1. Знайти границю функції $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2x - 7}{2x^2 + 3x + 4}$.

Переконавшись, що має місце невизначеність $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, розділимо чисельник

і знаменник дробу на x^3 (найвища тут степінь x), маємо: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2x - 7}{2x^2 + 3x + 4} =$

$$= \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x^3 + 2x - 7}{x^3}}{\frac{2x^2 + 3x + 4}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x^3}{x^3} + \frac{2x}{x^3} - \frac{7}{x^3}}{\frac{2x^2}{x^3} + \frac{3x}{x^3} + \frac{4}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{2}{x^2} - \frac{7}{x^3}}{\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}} = \frac{5}{0} = \infty.$$

Приклад 2. Обчислити границю функції $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 9x}$.

Безпосередня підстановка $x=3$ в задану функцію призводить до невизначеності вигляду $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Для її розкриття розкладемо чисельник і знаменник на множники і скоротимо дріб на $x-3$ – критичний множник. Розкладемо квадратний тричлен в чисельнику на множники за допомогою формули $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1 і x_2 – корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1,$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \{3; 2\},$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2).$$

Знаменник можна розкласти на множники шляхом винесення за дужки спільного множника $3x$: $3x^2 - 9x = 3x(x - 3)$.

Тоді маємо:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 9x} = \frac{9 - 15 + 6}{27 - 27} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{3x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{3x} = \frac{3-2}{3 \cdot 3} = \frac{1}{9}.$$

Приклад 3. Знайти границю функції $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$.

Безпосередня підстановка $x=1$ в задану функцію призводить до невизначеності вигляду $\{\infty - \infty\}$. Після перетворення виразу на один дріб і повторної підстановки $x=1$ в отриману функцію, матимемо невизначеність вигляду $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Для її розкриття в даному випадку достатньо знаменник

розкласти на множники за допомогою формули скороченого множення і скоротити дріб на $x-1$ – критичний множник. Маємо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) &= \frac{1}{0} - \frac{2}{0} = \{\infty - \infty\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1-2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1-1}{1-1} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Приклад 4. Знайти границю функції: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}}$.

Після підстановки $x=0$ одержимо невизначеність вигляду $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Для того, щоб позбутися ірраціональності, помножимо чисельник і знаменник дробу на спряжений знаменнику множник $\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x}$. Потім, скоротивши дріб на x ,

одержимо:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}} &= \frac{0}{\sqrt{5} - \sqrt{5}} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x})}{(\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x})(\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x})} = \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x})}{(\sqrt{5-x})^2 - (\sqrt{5+x})^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x})}{5-x-5-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x})}{-2x} = \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x}}{-2} = \frac{2\sqrt{5}}{-2} = -\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Приклад 5. Знайти границю функції: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 4x})$.

При $x \rightarrow +\infty$ дана функція є різницею двох нескінченно великих величин, тобто маємо невизначеність $\{\infty - \infty\}$. Розглядаючи задану функцію як дріб, з знаменником, рівним одиниці, позбудемося ірраціональності в чисельнику (помноживши чисельник і знаменник на вираз, спряжений чисельнику), зведемо границю до невизначеності вигляду $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$ і потім розділивши

$$\begin{aligned}\text{чисельник і знаменник дробу на } x, \text{ отримаємо: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 4x}) &= \{\infty - \infty\} = \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 - 4x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 4x})(x + \sqrt{x^2 - 4x})}{x + \sqrt{x^2 - 4x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 + 4x}{x + \sqrt{x^2 - 4x}} = \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x + \sqrt{x^2 - 4x}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4x}{x}}{\frac{x + \sqrt{x^2 - 4x}}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{1 + \sqrt{\frac{x^2 - 4x}{x^2}}} = \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x}}} = \frac{4}{2} = 2.\end{aligned}$$

Приклад 6. Знайти границю функції: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x \sin 2x}$.

При $x \rightarrow 0$ чисельник і знаменник прагнуть до нуля. Після винесення спільного множника за дужки і застосування основної тригонометричної тотожності в чисельнику, а також застосування в знаменнику тригонометричної формули подвійного кута, одержимо і визначну границю:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x \sin 2x} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x (1 - \cos^2 x)}{x \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \sin^2 x}{x \cdot 2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cdot 2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Приклад 7. Знайти границю функції: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \cos^2(x-2)}{4 - x^2}$.

Маємо невизначеність вигляду $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Розкладемо на множники знаменник

за допомогою формули скороченого множення. Зробимо заміну: $x-2=t$, $x=t+2$, $t \rightarrow 0$. Використовуючи основну тригонометричну тотожність: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, замінимо чисельник на $\sin^2 t$ і застосовуючи I визначну

$$\begin{aligned} \text{границю } \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \right), \text{ отримаємо: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \cos^2(x-2)}{4 - x^2} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \cos^2(x-2)}{(2-x)(2+x)} = \\ &= -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \cos^2(x-2)}{x-2} = -\frac{1}{4} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 t}{t} = -\frac{1}{4} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{t} = -\frac{1}{4} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \cdot \frac{\sin t}{t} \cdot t \right) = \\ &= -\frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Приклад 8. Знайти границю функції: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^{2x}$.

При $x \rightarrow \infty$ основа степені $\frac{x+2}{x-1}$ прагне до одиниці $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x-1} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1. \text{ Тобто маємо невизначеність вигляду } \left\{ 1^\infty \right\}. \text{ Додамо і}$$

віднімаємо 1 до основи степені, потім зведемо до спільного знаменника другий і третій доданки. Тим самим надамо основу степені як суму одиниці і нескінченно малої функції. Далі зводимо отриманий вираз до загального вигляду II визначної границі:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^{2x} &= \left\{ 1^\infty \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+2}{x-1} - 1 \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+2-x+1}{x-1} \right)^{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x-1} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-1}{3}} \right)^{\frac{x-1}{3} \cdot \frac{3}{x-1} \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{3}{x-1} \cdot 2x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{x-1}} = \\ &= \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{1 - \frac{1}{x}}} = e^6. \end{aligned}$$

Приклад 9. Знайти границю функції: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(7x+1)}{9x}$.

Маємо невизначеність вигляду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Побудуємо II визначну границю під

знаком логарифму:
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(7x+1)}{9x} = \frac{\ln 0}{0} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \frac{1}{9} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+7x)^{\frac{1}{7x} \cdot 7x}}{x} =$$

$$= \frac{1}{9} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x \cdot \ln(1+7x)^{\frac{1}{7x}}}{x} = \frac{7}{9} \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+7x)^{\frac{1}{7x}} = \frac{7}{9} \ln e = \frac{7}{9}.$$

Приклад 10. Знайти границю функції: $\lim_{x \rightarrow \infty} (x+1)[\ln(2x+3) - \ln(2x-1)]$.

При $x \rightarrow \infty$ в квадратних дужках маємо невизначеність вигляду $\{\infty - \infty\}$. Після перетворення функції за допомогою властивостей логарифмів, отримаємо невизначеність вигляду $\{1^\infty\}$, яку розкриємо способом описаним в попередньому прикладі:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1)[\ln(2x+3) - \ln(2x-1)] &= \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1) \ln \frac{2x+3}{2x-1} = \left\{ \begin{array}{l} \text{При } x \rightarrow \infty \\ \frac{2x+3}{2x-1} \rightarrow 1: \end{array} \right. \\ &\quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{2-\frac{1}{x}} = \frac{2+0}{2-0} = 1 \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{2x-1}} \right\} = \{\infty \cdot 0\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{2x+3}{2x-1} \right)^{x+1} = \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1} \right)^{x+1} = \{1^\infty\} = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x+3}{2x-1} - 1 \right)^{x+1} = \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x+3-2x+1}{2x-1} \right)^{x+1} = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{2x-1} \right)^{x+1} = \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2x-1}{4}} \right)^{\frac{2x-1}{4} \cdot \frac{4}{2x-1} \cdot (x+1)} = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{4x+4}{2x-1}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\frac{4x+4}{x}}{\frac{2x-1}{x}}} = \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{4+\frac{4}{x}}{2-\frac{1}{x}}} = \ln e^{\frac{4}{2}} = \ln e^2 = 2 \ln e = 2. \end{aligned}$$

Індивідуальне завдання № 3 «Границя функції»

За допомогою елементарних перетворень обчислити границі

1	1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 3x - 4}$; а) $x_0 = 2$; б) $x_0 = -1$; в) $x_0 = \infty$; 2. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{4x \cdot \sin x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow 1} (3-2x)^{\frac{2x}{x-1}}$.
2	1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 + 2x - 1}{27x^3 - 1}$; а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = \frac{1}{3}$; в) $x_0 = \infty$; 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{16x} - \sqrt{x} - \sqrt{16x - 4\sqrt{x}})$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2x+1}$.
3	1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - x - 10}{x^2 + 3x + 2}$; а) $x_0 = 2$; б) $x_0 = -2$; в) $x_0 = \infty$; 2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 2x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$.
4	1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{4x^2 + 7x - 2}{3x^2 + 8x + 4}$; а) $x_0 = 2$; б) $x_0 = -2$; в) $x_0 = \infty$; 2. $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{\sqrt[3]{x}+2}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\cos x - \cos^3 x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow 1} (7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$.
5	1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 5x - 14}{2x^2 + 3x - 2}$; а) $x_0 = 2$; б) $x_0 = -2$; в) $x_0 = \infty$; 2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{5x^2}$; 4. $\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}}$.
6	1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^2 + x}$; а) $x_0 = 2$; б) $x_0 = 0$; в) $x_0 = \infty$; 2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2x-3}$.
7	1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 5x + 6}{3x^2 - x - 14}$; а) $x_0 = 2$; б) $x_0 = -2$; в) $x_0 = \infty$; 2. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \arcsin x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow 3} (2x-5)^{\frac{2x}{x-3}}$.

8	1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 3x + 2}$; а) $x_0 = -1$; б) $x_0 = 2$; в) $x_0 = \infty$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sin^2 2x}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \cdot \cos 7x}{\sin 2x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{2x^2 - 3x - 2} \right)^{\frac{1}{x}}$.
9	1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x + 4}$; а) $x_0 = -2$; б) $x_0 = -1$; в) $x_0 = \infty$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-2x}}{x + x^2}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}$; 4. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2\sin x)^{\frac{5}{\sin x}}$.
10	1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2}$; а) $x_0 = 4$; б) $x_0 = 1$; в) $x_0 = \infty$; 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} [3x(\ln(x+5) - \ln x)]$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \cdot \sin 2x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow 5} (11 - 2x)^{\frac{6x-7}{x-5}}$.
11	1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 5x - 14}{2x^2 + x - 6}$; а) $x_0 = 2$; б) $x_0 = -2$; в) $x_0 = \infty$; 2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1}}{x-1}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 2x}{x^2}$; 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^{x+2}$.
12	1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$; а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = 2$; в) $x_0 = \infty$; 2. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin 3x}{\sin x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x} \right)^{\frac{8+x}{2}}$.
13	1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 7x - 8}{2x^2 + 5x + 3}$; а) $x_0 = -2$; б) $x_0 = -1$; в) $x_0 = \infty$; 2. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x + \sin x}{\arcsin x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2)^{\frac{3}{x-1}}$.
14	1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{4x^2 - 3x - 1}{-x^2 + 5x - 4}$; а) $x_0 = -1$; б) $x_0 = 1$; в) $x_0 = \infty$; 2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{1+8x} - 5}{\sqrt{2x-2} - 2}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin 3x}{2x^2}$; 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{\frac{x-1}{2}}$.
15	1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 3x + 2}{3x^2 - 2x - 16}$; а) $x_0 = 2$; б) $x_0 = -2$; в) $x_0 = \infty$; 2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\operatorname{tg} 3x - 3\sin 2x}{5\sin^2 x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$.

16	1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - x - 6}{5x - x^2 - 6}$; а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = 2$; в) $x_0 = \infty$; 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4}{x^2 - 2} - \frac{x^4}{x^2 + 2} \right)$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\operatorname{tg} 4x + \sin 2x}{2\operatorname{tg}^2 x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x$.
17	1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 8x + 7}{3x^2 - x - 4}$; а) $x_0 = -2$; б) $x_0 = -1$; в) $x_0 = \infty$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x - \sin^2 x}{x^2}$; 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{x+1} \right)^{x-1}$.
18	1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{5x^2 - x - 4}{3x - x^2 - 2}$; а) $x_0 = -1$; б) $x_0 = 1$; в) $x_0 = \infty$; 2. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x+1}}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{2x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{2x+1}$.
19	1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 5x + 4}{2x^2 - 3x + 5}$; а) $x_0 = -2$; б) $x_0 = -1$; в) $x_0 = \infty$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2} - 1}{x^2 + x^3}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 3x}{1 - \cos 6x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow 4} (9 - 2x)^{\frac{-x}{x-4}}$.
20	1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6}$; а) $x_0 = 5$; б) $x_0 = 2$; в) $x_0 = \infty$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 - \sqrt{x+4}}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x - \sin^2 x}{6x^2}$; 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+2} \right)^{2x+1}$.
21	1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x - 6}{2x^2 + x - 21}$; а) $x_0 = -3$; б) $x_0 = 3$; в) $x_0 = \infty$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3 - \sqrt{2x+9}}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{5x^2}$; 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-5}{2x+1} \right)^{x+1}$.
22	1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4x + 3}$; а) $x_0 = -1$; б) $x_0 = 1$; в) $x_0 = \infty$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{3\operatorname{arctg} x}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x + \sin x}{\arcsin x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$.
23	1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 5x + 6}$; а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = -3$; в) $x_0 = \infty$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{1 - \cos x}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\operatorname{arctg} 3x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+8}{x-2} \right)^x$.

24	1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$; а) $x_0=1$; б) $x_0=-3$; в) $x_0=\infty$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sin 3x}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2}$; 4. $\lim_{x \rightarrow \pi} (1+3\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$.
25	1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2+2x-15}{2x^2+7x-15}$; а) $x_0=5$; б) $x_0=-5$; в) $x_0=\infty$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x \cdot \sin x}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\sin 3x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2-x+1}{2x^2+x+1} \right)^{x^3/(1-x)}$.
26	1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3}$; а) $x_0=+1$; б) $x_0=3$; в) $x_0=\infty$; 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{3x^2}$; 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{x+1} \right)^{(x^2+2)/x}$.
27	1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{6+x-x^2}{x^3-27}$; а) $x_0=2$; б) $x_0=3$; в) $x_0=\infty$; 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x+1})$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 8x}{3x^2}$; 4. $\lim_{x \rightarrow 3} (3x-8)^{2/(x-3)}$.
28	1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2+3x-10}{x^2+4x-5}$; а) $x_0=5$; б) $x_0=-5$; в) $x_0=\infty$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 5x}{x^2}$; 4. $\lim_{x \rightarrow 1} (11-10x)^{\frac{13x-7}{x-1}}$.
29	1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2-8x+7}{x^2+6x-7}$; а) $x_0=-1$; б) $x_0=1$; в) $x_0=\infty$; 2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{115+2x}-11}{\sqrt{1+x}-2}$; 3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{5x-6}$.
30	1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2-x-2}{x^3+1}$; а) $x_0=2$; б) $x_0=-1$; в) $x_0=\infty$; 2. $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{x^2(x+8)}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x-1}$.

ТЕМА 4. ПОХІДНА. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

Перед виконанням завдання цього розділу студент повинен знати означення похідної функції, правила диференціювання функцій, таблицю похідних елементарних функцій, правило диференціювання складних функцій, вміти диференціювати степеневі-показникові, параметрично задані і неявно задані функції, а також знаходити похідні вищих порядків.

Похідною функції $y = f(x)$ називається границя відношення приросту цієї функції до відповідного приросту аргументу Δx , коли приріст аргументу прямує до нуля:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо ця границя кінцева, то похідна існує, і функція $f(x)$ називається диференційованою в точці x_0 . Похідна позначається також $y'(x)$ або $\frac{dy}{dx}$. Операція відшукування похідної називається диференціюванням функції.

Геометричним змістом похідної є: значення похідної в точці рівне значенню кутового коефіцієнта, який утворюється між дотичною і віссю OX , коли дотична проведена до графіка функції $y = f(x)$ в заданій точці.

Правила диференціювання функцій.

Нехай $C \in R$ – стала, $u = u(x)$, $v = v(x)$ – функції, що мають похідні.

1. $C' = 0$

2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$ $(u \pm C)' = u'$

3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ $(C \cdot u)' = C \cdot u'$ $(C \cdot x)' = C$

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, \quad (v \neq 0)$ $\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}$ $\left(\frac{x}{C}\right)' = \frac{1}{C}$

5. **Правило диференціювання складної функції.** Якщо функція $y = f(u)$ диференційована за u , а функція $u = \varphi(x)$ – за x , то складна функція $y = f(\varphi(x))$

має похідну $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ чи $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

Таблиця похідних функцій:

Похідні основних елементарних функцій	Похідні складних елементарних функцій, $u = u(x)$
1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	1a. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
2. $(x)' = 1$	2a. $(u)' = u'$
3. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	3a. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
4. $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$	4a. $(\frac{1}{u})' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$
5. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	5a. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
6. $(e^x)' = e^x$	6a. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	7a. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
8. $(\lg x)' = \frac{1}{x \cdot \ln 10}$	8a. $(\lg u)' = \frac{1}{u \cdot \ln 10} \cdot u'$
9. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	9a. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
10. $(\sin x)' = \cos x$	10a. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
11. $(\cos x)' = -\sin x$	11a. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
12. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	12a. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
13. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	13a. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
14. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	14a. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
15. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	15a. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
16. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	16a. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
17. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	17a. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Похідні вищих порядків. Похідною другого порядку (другою похідною) від функції $y = f(x)$ називається похідна від її похідної, тобто:

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Другу похідну також позначають $y''(x)$ або $\frac{d^2 y}{dx^2}$. Похідна від похідної другого порядку називається *похідною третього порядку* і так далі. Похідну n -го порядку позначають $y^{(n)}(x)$ або $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Формула для похідної **степенево-показникової функції** $y = u^v$ (u та v – диференційовані функції, та $u > 0$):

$$(u^v)' = v \cdot u^{v-1} u' + u^v \ln u \cdot v'.$$

Якщо функція $y = f(x)$ задана **параметрично** двома рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in (\alpha; \beta)$, то її похідні обчислюються за формулами:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t} = \frac{x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t}{x'^3_t}.$$

Для обчислення похідної функції $y = y(x)$ заданої **неявно** $F(x; y) = 0$ необхідно продиференціювати за x тотожність $F(x; y) = 0$, пам'ятаючи, що y є функція від x , а потім отримане рівняння розв'язати відносно $y'(x)$.

Приклад 1. Знайти похідні функцій:

а) $y = \sqrt[4]{3x} + 5x^2 + \frac{7}{x^3}$. Перепишемо задану функцію, надавши доданки у вигляді степені:

$y = \sqrt[4]{3} \cdot x^{\frac{1}{4}} + 5x^2 + 7x^{-3}$. Тоді застосувавши формулу 2 правил диференціювання, а також формулу 1а таблиці похідних:

$$y' = (\sqrt[4]{3} \cdot x^{\frac{1}{4}})' + (5x^2)' + (7x^{-3})' = \sqrt[4]{3} \cdot \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} + 2 \cdot 5x + 7(-3)x^{-4} = \frac{\sqrt[4]{3}}{4\sqrt[4]{x^3}} + 10x - \frac{21}{x^4}.$$

б) $y = \sqrt[5]{(1+3x^2)^3}$. Записуємо задану функцію у вигляді степені:

$y = (1+3x^2)^{\frac{3}{5}}$ та обчислюємо похідну, застосувавши формулу 1а таблиці:

$$y' = \frac{3}{5} (1+3x^2)^{-\frac{2}{5}} \cdot (1+3x^2)' = \frac{3}{5} (1+3x^2)^{-\frac{2}{5}} \cdot 6x = \frac{18}{5 \cdot \sqrt[5]{(1+3x^2)^2}}.$$

в) $y' = x^2 \cdot \arcsin x$. Застосувавши формулу 3 правил диференціювання, а також формулу 1 та формулу 14 таблиці похідних, знаходимо:

$$y' = (x^2)' \cdot \arcsin x + x^2 \cdot (\arcsin x)' = 2x \cdot \arcsin x + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

г) $y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$. Диференціюючи функцію $y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ як складну, знаходимо похідну:

$$y' = \frac{\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right)'}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} \cdot \left(\frac{\pi}{4} + x\right)' = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)} = \frac{2}{\cos 2x}.$$

д) $y = \frac{x^3}{x-3}$. Відповідно до формули 4 правил диференціювання одержуємо:

$$y' = \frac{(x^3)'(x-3) - x^3 \cdot (x-3)'}{(x-3)^2} = \frac{3x^2(x-3) - x^3}{(x-3)^2} = \frac{2x^3 - 9x^2}{(x-3)^2}.$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = (7x)^{\cos x}$, де $x > 0$.

Логарифмуємо задану функцію: $\ln y = \ln(7x)^{\cos x}$. Використовуючи основні властивості логарифмів ($\ln x^\alpha = \alpha \cdot \ln x$, $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$), отримаємо: $\ln y = \cos x \cdot \ln(7x)$.

Диференціюємо отриману неявну функцію: $(\ln y)' = (\cos x \cdot \ln(7x))'$. Відповідно до формули 9а таблиці похідних (для лівої частини) та до формули 3 правил диференціювання (для правої частини), отримуємо:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (\cos x)' \cdot \ln(7x) + \cos x \cdot (\ln(7x))'; \quad \frac{1}{y} \cdot y' = -\sin x \cdot \ln(7x) + \cos x \cdot \frac{1}{7x} \cdot (7x)';$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = -\sin x \cdot \ln(7x) + \cos x \cdot \frac{7}{7x}. \quad \text{Далі:} \quad y' = y \cdot \left(-\sin x \cdot \ln(7x) + \cos x \cdot \frac{1}{x}\right).$$

Підставивши задану спочатку функцію в останній вираз, отримаємо:

$$y' = (7x)^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln(7x) + \frac{1}{x} \cdot \cos x\right).$$

Приклад 3. Знайти $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$, якщо функція $y = y(x)$ задана параметрично: $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = 3t^2 + 5t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

Послідовно знаходимо похідні:

$$x'_t = 3t^2 + 3, \quad x''_{tt} = 6t; \quad y'_t = 6t + 5, \quad y''_{tt} = 6;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{6t+5}{3t^2+3}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t} = \frac{x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t}{x'^3_t} = \frac{(3t^2+3) \cdot 6 - 6t(6t+5)}{(3t^2+3)^3} = \frac{-6t^2 - 10t + 6}{9(t^2+1)^3}.$$

Приклад 4. Знайти похідну функції, заданої неявно рівнянням $x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 3 = 0$.

Диференціюючи за x обидві частини даного рівняння та вважаючи при цьому, що y є функцією від x , одержуємо: $3x^2 - 4xy^2 - 2x^2 2yy' + 5 + y' = 0$, звідки: $y' = \frac{4xy^2 - 3x^2 - 5}{1 - 4x^2y}$.

Індивідуальне завдання № 4. «Похідна. Диференціювання функцій»

Знайти похідні заданих функцій.

1	а) $y = \cos(\ln 2x) \sqrt{2^{\sin x} + x}$; б) $y = x + \arccos y$;	в) $\begin{cases} x = \ln \operatorname{ctg} t, \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t. \end{cases}$;	г) $y = (\sin 2x)^{\operatorname{tg} x}$.
2	а) $y = \frac{x - 2^x}{\ln x} \operatorname{tg} x$; б) $\sin y = 7x + 3y$;	в) $\begin{cases} x = t^5 - t^3 + 1, \\ y = 4t^4 + t. \end{cases}$;	г) $y = x^{\operatorname{arctg} x}$.
3	а) $y = 2x^5 + \frac{5}{x^2} - \sqrt[5]{2x}$; б) $\frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} = 0$;	в) $\begin{cases} x = e^t \cos 2t, \\ y = e^t \sin 2t. \end{cases}$;	г) $y = (\sin x + 2x)^x$.
4	а) $y = \frac{6x^2 - 12\sqrt{x} + 36}{\sqrt[6]{x}}$; б) $y^2 = x + \ln \frac{y}{x}$;	в) $\begin{cases} x = \arccos \sqrt{t}, \\ y = \sqrt{t^2 - t}. \end{cases}$;	г) $y = (\arcsin x)^{\sqrt{x} + \operatorname{tg} x}$.
5	а) $y = \frac{\ln x}{x^3} + (x^2 + 1) \operatorname{arctg} x$; б) $xy = \operatorname{ctg} y$;	в) $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$;	г) $y = (x + \cos x)^{\operatorname{arctg} x}$.
6	а) $y = \frac{3x^2 - 12\sqrt{x} - 9}{\sqrt[3]{x}}$; б) $y^2 + \sin xy = 5$;	в) $\begin{cases} x = e^t (t - \cos t), \\ y = e^t (\sin t - 1). \end{cases}$;	г) $y = (\sqrt{x} + \sin 2x)^x$.
7	а) $y = \frac{3x^5 - 12\sqrt[4]{x} - 9}{\sqrt[3]{x}}$; б) $2xy - 8 \operatorname{tg} \frac{y}{x} = 0$;	в) $\begin{cases} x = 5 \sin t - \sin 5t, \\ y = 5 \cos t + \cos 5t. \end{cases}$;	г) $y = (1 + 1/x)^{\frac{\operatorname{tg} x}{x}}$.

8	а) $y = \frac{5^x}{7x+1} + \sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} x$; б) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + 18xy = 0$;	Б) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$;	Г) $y = (1 + 1/x)^{\operatorname{tg} x}$.
9	а) $y = \frac{\cos(2^x + 1)}{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}$; б) $2 \operatorname{tg} \frac{y}{x} = 4$;	Б) $\begin{cases} x = \ln 2t, \\ y = t + t^2. \end{cases}$;	Г) $y = (\sin 2x)^{\frac{\sin x}{x}}$.
10	а) $y = \frac{8x^2 \sqrt[4]{x} - 24\sqrt{x} - 64}{\sqrt[8]{x}}$; б) $x^2 + y^2 - 4xy = 0$;	Б) $\begin{cases} x = t^4 + 1, \\ y = t^2 + t. \end{cases}$;	Г) $y = \frac{4e^{-x^2} \cdot \sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt[3]{\sin^2 5x}}$.
11	а) $y = \frac{\sqrt[5]{x^3}}{e^x} + \ln x \cdot \operatorname{ctg} x$; б) $xy^2 + x^2y = 2$;	Б) $\begin{cases} x = t + \cos t, \\ y = t - \sin t. \end{cases}$;	Г) $y = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}$.
12	а) $y = e^{\sin^2 x + x} \cos(\sqrt{x})$; б) $xy + \sin y = 0$;	Б) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t + \ln t. \end{cases}$;	Г) $y = (\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})^{\lg x}$.
13	а) $y = \frac{7x^2 - 14x\sqrt{x} - 7}{\sqrt[7]{x}}$; б) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;	Б) $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$;	Г) $y = (\sqrt{x})^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}$.
14	а) $y = \frac{\sin x}{10^x} \lg x$; б) $e^y + x = y$;	Б) $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$;	Г) $y = (\arccos(\sqrt{x}))^{\operatorname{arctg} x}$.
15	а) $y = \frac{x \cdot 7^x}{\cos x} + \arcsin x$; б) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$;	Б) $\begin{cases} x = t + \ln \cos 2t, \\ y = t - \ln \sin 2t. \end{cases}$;	Г) $y = (\sin(\sqrt[3]{x} + x))^{\operatorname{ctg} x}$.
16	а) $y = \sin(\ln^2 x) + \frac{1}{x + \operatorname{tg} x^2}$; б) $\ln y - 2x = 0$;	Б) $\begin{cases} x = 2t - t^3, \\ y = 2t^2. \end{cases}$;	Г) $y = (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{x} \cdot \arcsin x}$.
17	а) $y = \frac{8x^2 - 16\sqrt{x} - 64x}{\sqrt[8]{x}}$; б) $\frac{y}{x} + xy = 2$;	Б) $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 4 \sin^2 t. \end{cases}$;	Г) $y = (\cos x + x)^{\operatorname{tg} x}$.

18	a) $y = \frac{x \ln x}{e^x} + \operatorname{ctg} x$; б) $e^y = x^{x+y}$;	B) $\begin{cases} x = \cos 3t, \\ y = t - \sin 3t. \end{cases}$;	Г) $y = (\operatorname{tg} 2x)^{\log_2 x}$.
19	a) $y = \frac{x^3 \sin x}{\operatorname{arctg} x} + \operatorname{arcctg} x$; б) $x \cos y - \sin y + \sin 2y = 1$;	B) $\begin{cases} x = \sin 3t, \\ y = \cos 3t. \end{cases}$;	Г) $y = (\sin 2x)^{\operatorname{arctg} x}$.
20	a) $y = \frac{35x^2 \sqrt[5]{x} - 14\sqrt{x} - 49}{\sqrt[7]{x}}$; б) $a^x - e^{x-y} = 0$;	B) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 + \cos t. \end{cases}$;	Г) $y = (\arcsin 2x)^{\sqrt{x}}$.
21	a) $y = \frac{\arcsin x}{e^x} + \log_2 x \cdot x^2$; б) $2yy' + 4x \cdot y + 2x^2 y' - 2x = 0$;	B) $\begin{cases} x = t^3 + 8t, \\ y = t^4 + 2t. \end{cases}$;	Г) $y = (\sqrt[3]{x})^{\lg x}$.
22	a) $y = (\ln(x + \sqrt{x}) - 1)^3 + \operatorname{tge}^x$; б) $\cos y = 4y^2 + e^x$;	B) $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = t - \sin 2t. \end{cases}$;	Г) $y = x^{\operatorname{tg} \sqrt{x}}$.
23	a) $y = \frac{36x^2 - 12x\sqrt{x} - 9}{\sqrt[3]{x}}$; б) $x^3 + \operatorname{arctg}(e^y) + y(x-1) = 0$;	B) $\begin{cases} x = t \cos t - 2 \sin t, \\ y = t \sin t + 2 \cos t, \end{cases}$;	Г) $y = (\sin x)^{\sqrt{x} \cdot \operatorname{tg} x}$.
24	a) $y = \frac{\sin x}{e^x} \log_2 x$; б) $\sin y = x + 3y$;	B) $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = 3t^2 + 5t, \end{cases}$;	Г) $y = (2^x + x)^{\operatorname{arcctg} x}$.
25	a) $y = \operatorname{tg}(\log_2 2x) \sqrt{x + \operatorname{tg} x^2}$; б) $y \sin x = \cos xy$;	B) $\begin{cases} y = 2 \sin^3 t, \\ x = 2 \cos^3 t. \end{cases}$;	Г) $y = (\sin \sqrt{x})^{2 \operatorname{tg}^2 x}$.
26	a) $y = \frac{24x^2 \sqrt{x} - 12\sqrt{x} - 9}{\sqrt[3]{x}}$; б) $e^{x-y} = \frac{x}{y}$;	B) $\begin{cases} x = \ln^4 t \\ y = t^2 + \ln t \end{cases}$;	Г) $y = (\sqrt{x^2 + 1})^{\operatorname{tg} x}$.
27	a) $y = \frac{\ln x}{e^x} + \operatorname{tg} x \cdot \sqrt{x}$; б) $\sin xy = x^2 y$;	B) $\begin{cases} x = e^{-5t} \\ y = e^{3t} \end{cases}$;	Г) $y = (\cos 2x)^{\operatorname{ctg} x}$.
28	a) $y = e^{\operatorname{arctg}(\lg x)} \cdot \sin(\sqrt{x} + 1)$; б) $x^2 y = \arcsin yx$;	B) $\begin{cases} x = \operatorname{arcsin} t \\ y = \sqrt{1 - t^2} \end{cases}$;	Г) $y = (xe^x)^{\sqrt{x}}$.

29	а) $y = \frac{6x\sqrt{x} - 12\sqrt{x} + 27}{x}$; б) $e^{x+y} = xy$;	в) $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$;	г) $y = (\arcsin 2x)^{\lg x}$.
30	а) $y = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \operatorname{arccctg} x$; б) $e^x + e^y - xy = 0$;	в) $\begin{cases} x = \sqrt[3]{t} \\ y = \sqrt[7]{t} \end{cases}$;	г) $y = (2x)^{\sin x}$.

ТЕМА 5. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Перед виконанням завдання цього розділу студент повинен повторити формули диференціювання функцій, добре розуміти, що таке первісна функція і знати таблицю основних інтегралів. Знаходження більш складних інтегралів складається із послідовних перетворень, які базуються на знанні розділів алгебри та тригонометрії. У процесі цих перетворень використовуються основні способи інтегрування: метод підстановки і метод інтегрування за частинами. У підручниках, які вказані в літературі, розглянуто велику кількість підходів і прикладів знаходження інтегралів. В даному розділі зупинимось на розгляді лише тих типів інтегралів, які зустрічаються у завданні даного розділу.

Означення. Функція $F(x)$ називається первісною функцією для функції $f(x)$ на деякому проміжку, якщо в кожній точці цього інтервалу: $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$.

Множина усіх первісних функції $f(x)$ називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ і позначається символом $\int f(x)dx = F(x) + C$, якщо $F'(x) = f(x)$.

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$.
2. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$.
3. $\int dF(x) = F(x) + C$.
4. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, $a \neq 0$ – стала.
5. $\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = \int (f(x) \pm g(x))dx$.
6. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну, то $\int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C$, або скорочено $\int f(x)dx = F(x) + C$.

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ДИФЕРЕНЦІАЛА

1. $dx = d(x \pm b)$.
2. $dx = \frac{1}{a}d(ax)$.
3. $dx = \frac{1}{a}d(ax \pm b)$.

ТАБЛИЦЯ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1. $\int 0 dx = C$	2. $\int dx = x + C$
3. $\int x^N dx = \frac{x^{N+1}}{N+1} + C$, де $N \in R$ і $\alpha \neq -1$	4. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$	14. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
15. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C$	16. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C$
17. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$	18. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$

Приклад 1. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}} = \frac{1}{3} \arcsin \frac{x}{3} + C.$

Інтеграл зводиться до табличного (формула (12)) при значенні $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3.$

Приклад 2.

$$\int \left(\frac{5x^3 - x}{x^2} \right) dx = \int \frac{5x^3}{x^2} dx - \int \frac{x}{x^2} dx = 5 \int x dx - \int \frac{1}{x} dx = 5 \frac{x^2}{2} - \ln x + C$$

Інтегрування методом заміни змінної або способом підстановки:

Досить часто інтеграл можна спростити, ввівши нову змінну t і поклавши $\varphi(x) = t$. Введенням нової змінної часто можна звести інтеграл до табличного.

$$\int f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) = t \\ d\varphi(x) = dt \\ \varphi'(x) dx = dt \end{array} \right\} = \int f(t) dt = F(t) + C = F(\varphi(x)) + C$$

Приклад 1.

$$\int 3x^2 \cdot \sqrt[3]{1+x^3} dx = \left\{ \begin{array}{l} 1+x^3 = t \\ d(1+x^3) = dt \\ 3x^2 dx = dt \end{array} \right\} = \int t^{\frac{1}{3}} dt = \frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{(1+x^3)^4} + C.$$

Приклад 2.
$$\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \left\{ \begin{array}{l} 1+\ln x = t \\ d(1+\ln x) = dt \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right\} = \int \frac{(t-1)dt}{\sqrt{t}} = \int t^{\frac{1}{2}} dt - \int t^{-\frac{1}{2}} dt =$$

$$= \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3} (1+\ln x)^{\frac{3}{2}} - 2(1+\ln x)^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{(1+\ln x)^3} - 2\sqrt{1+\ln x} + C =$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{1+\ln x} \cdot (\ln x - 2) + C.$$

Метод інтегрування за частинами:

Нехай u і v – неперервні диференційовані функції змінної x в інтервалі (a,b) . Тоді:

$$d(uv) = vdu + u dv, \text{ так що } u dv = d(uv) - v(du).$$

Беручи невизначені інтеграли від обох частин та враховуючи, що $\int d(u,v) = uv + C$, маємо

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Корисно запам'ятати наступні типи інтегралів, обчислення яких зручно виконувати, користуючись зазначеною вище формулою

$$1. \int P_n(x) \cdot \begin{bmatrix} e^{kx} \\ a^{kx} \\ \sin kx \\ \cos kx \end{bmatrix} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = P_n(x) \\ dv = \begin{bmatrix} e^{kx} \\ a^{kx} \\ \sin kx \\ \cos kx \end{bmatrix} dx \\ du = d(P_n(x)) \\ v = \int \begin{bmatrix} e^{kx} \\ a^{kx} \\ \sin kx \\ \cos kx \end{bmatrix} dx \end{array} \right\},$$

$$2. \int P_n(x) \cdot \begin{bmatrix} \ln^k x \\ \log_a^k x \\ \arcsin x \\ \arccos x \\ \arctg x \\ \text{arcctg} x \end{bmatrix} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \begin{bmatrix} \ln^k x \\ \log_a^k x \\ \arcsin x \\ \arccos x \\ \arctg x \\ \text{arcctg} x \end{bmatrix} \\ dv = P_n(x) dx \\ du = d \left(\begin{bmatrix} \ln^k x \\ \log_a^k x \\ \arcsin x \\ \arccos x \\ \arctg x \\ \text{arcctg} x \end{bmatrix} \right) \\ v = \int P_n(x) dx \end{array} \right\},$$

де $P_n(x)$ – многочлен $n^{\text{ої}}$ степені.

3. Інтегрування за частинами застосовується і тоді, коли під інтегралом стоїть лише одна трансцендентна функція, яка і позначається через u .

4. Інтегрування інтегралів вигляду а) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx$; б) $\int \sqrt{a^2 \pm x^2} dx$; в) $\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx$; г) $\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$; д) $\int \sin(\ln x) dx$; е) $\int \cos(\ln x) dx$ полягає в наступному. Інтеграл позначається через нову змінну, наприклад, I . Після інтегрування за частинами інтегралів вигляду а)–б) один раз, а інтегралів

вигляду в)–є) – два рази отримуємо лінійне рівняння вигляду: $I = k - m \cdot I$ (де k, m – сталі), звідки: $I = \frac{k}{1+m} + C$.

Формулу інтегрування за частинами необхідно застосовувати стільки разів, яка степінь функції позначеної через u .

Приклад 1.

$$\int \sqrt[3]{x} \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = \sqrt[3]{x} dx \end{array} \right| \begin{array}{l} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \end{array} \left\} = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \ln x - \frac{3}{4} \int x^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{x} = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \ln x -$$

$$\frac{3}{4} \int x^{\frac{1}{3}} dx =$$

$$= \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - \frac{9}{16} x^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{16} x^{\frac{4}{3}} + C.$$

Приклад 2.

$$\int x^2 \cos 2x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = \cos 2x dx \end{array} \right| \begin{array}{l} du = 2x dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \left\} = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x - \int \frac{1}{2} \cdot 2x \sin 2x dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = x \\ dv = \sin 2x dx \end{array} \right| \begin{array}{l} du = dx \\ v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \left\} = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x - \left(-\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx \right) =$$

$$= \frac{x^2}{2} \sin 2x + \frac{x}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

Інтегрування дробів вигляду $\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx$:

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{1}{x^2 + 2 * \frac{p}{2} * x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} dx = \int \frac{1}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} dx$$

Іншими словами необхідно:

1. Виділити повний квадрат в знаменнику.

2. А потім скористатися формулами табличних інтегралів: $\int \frac{1}{x^2 \pm u^2} dx$.

Приклад.

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 4} dx = \int \frac{1}{x^2 - 2 * \frac{5}{2} x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 4} dx = \int \frac{1}{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} dx =$$

$$\int \frac{1}{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{2 * \frac{3}{2}} \ln \left| \frac{x - \frac{5}{2} - \frac{3}{2}}{x - \frac{5}{2} + \frac{3}{2}} \right| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x - 4}{x - 1} \right| + C$$

Інтегрування вигляду $\int \sin mx * \cos nx, \int \sin mx * \sin nx dx, \int \cos mx * \cos nx dx$

Щоб проінтегрувати ці інтеграли потрібно спочатку скористатися наступними формулами:

1. $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$
2. $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$
3. $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$

Приклад.

$$\int \sin 5x * \sin 3x dx = \int \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x) dx = \frac{1}{2} \int \cos 2x dx - \frac{1}{2} \int \cos 8x dx =$$

$$\frac{1}{2} * \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} * \frac{1}{8} \sin 8x + C = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + C$$

Індивідуальне завдання № 5 «Невизначений інтеграл»

Обчислити невизначений інтеграл.

Варіант 1		Варіант 2		Варіант 3	
1.	$\int \frac{dx}{\sqrt{4+9x^2}}$ $\int (2x+3)^3 dx$	1.	$\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}}$ $\int \frac{dx}{4x^2-9}$	1.	$\int \left(\frac{4}{\sqrt[3]{x-2}}\right) dx$ $\int e^{2x-4} dx$
2.	$\int \frac{dx}{(x+2)\ln(x+2)}$ $\int \frac{xdx}{\cos^2(3x^2+5)}$	2.	$\int \frac{(1+\operatorname{tg} 5x)^3}{\cos^2 5x} dx$ $\int \frac{\sin 2x}{5+\cos^2 x} dx$	2.	$\int \frac{dx}{x\sqrt{4+\ln x}}$ $\int \frac{\sin 2x}{4-3\sin^2 x} dx$
3.	$\int x \sin x dx$ $\int x \ln x dx$	3.	$\int x^2 e^{-x} dx$ $\int \sqrt{9-x^2} dx$	3.	$\int x^2 \ln x dx$ $\int x^2 \sin 3x dx$
4.	$\int \frac{1}{x^2+6x-7} dx$	4.	$\int \frac{1}{x^2+4x+2} dx$	4.	$\int \frac{1}{x^2+3x-7} dx$
5.	$\int \sin 2x \sin 4x dx$ $\int \sin 5x \cos 4x dx$	5.	$\int \sin 5x \cos 7x dx$ $\int \sin \frac{x}{3} \sin 2x dx$	5.	$\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3} dx$ $\int \cos 5x \cdot \sin 7x dx$
Варіант 4		Варіант 5		Варіант 6	
1	$\int \frac{3}{\sqrt{4x^2-9}} dx$ $\int (5x-7)^5 dx$	1	$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+5}}$ $\int 5e^{2-x} dx$	1	$\int \frac{dx}{(x+2)^2}$ $\int e^{7x-1} dx$

2	$\int \sin\left(\frac{4}{x} + 5\right) \frac{dx}{x^2}$ $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$	2	$\int e^{\frac{4}{x}} \frac{dx}{x^2}$ $\int \frac{\cos 3x}{3 \sin 3x - 5} dx$	2	$\int \sqrt[4]{\sin^3 2x} \cdot \cos 2x dx$ $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$
3	$\int \arccos 2x dx$ $\int x \cdot \cos 2x dx$	3	$\int x^2 \cdot 2^x dx$ $\int (4x - 2) \cos 2x dx$	3	$\int e^{2x} \cdot \cos x dx$ $\int x \cdot 3^x dx$
4	$\int \frac{1}{x^2 - 6x - 4} dx$	4	$\int \frac{1}{x^2 + 4x - 6} dx$	4	$\int \frac{1}{x^2 + 8x - 7} dx$
5	$\int \sin x \sin 4x dx$ $\int \sin 5x \cos 2x dx$	5	$\int \sin 7x \cos 7x dx$ $\int \sin \frac{x}{3} \sin x dx$	5	$\int \cos \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{3} dx$ $\int \cos 6x \cdot \sin 7x dx$
Варіант 7		Варіант 8		Варіант 9	
1	$\int \frac{dx}{16 - 9x^2}$ $\int \left(\frac{1}{\sin^2(5-x)} - 2 \right) dx$	1	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 8}}$ $\int \left(\frac{5}{4 - 7x} + \cos(4 - 3x) \right) dx$	1	$\int (\sqrt[3]{x} - 2)^3 dx$ $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 9x^2}}$
2	$\int \frac{e^{3x}}{4 + e^{3x}} dx$ $\int \sin(\ln x - 5) \cdot \frac{1}{x} dx$	2	$\int e^{\sin^2 x} \cdot \sin 2x dx$ $\int \cos(\ln x + 5) \frac{dx}{x}$	2	$\int \frac{\sqrt[3]{4 + \ln x}}{x} dx$ $\int e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}}$
3	$\int x^2 \cdot e^{-3x} dx$ $\int e^{-3x} \cdot \cos x dx$	3	$\int (9x^2 + 1) \cdot e^{3x} dx$ $\int x^7 \cdot \ln 2x dx$	3	$\int x^2 \cdot e^{-x} dx$ $\int \arctg 5x dx$
4	$\int \frac{1}{x^2 - 8x - 4} dx$	4	$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 12} dx$	4	$\int \frac{1}{x^2 + 3x - 5} dx$
5	$\int \sin 5x \sin 4x dx$ $\int \sin 9x \cos 4x dx$	5	$\int \sin 15x \cos 7x dx$ $\int \sin \frac{x}{3} \sin 3x dx$	5	$\int \cos \frac{x}{4} \sin \frac{x}{3} dx$ $\int \cos 5x \cdot \sin 9x dx$
Варіант 10		Варіант 11		Варіант 12	
1	$\int \frac{dx}{16 - 9x}$ $\int \left(\frac{1}{\sin^2(5-x)} \right) dx$	1	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 16}}$ $\int (\cos(4 - 3x)) dx$	1	$\int (\sqrt[4]{x} - 2)^3 dx$ $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 9x^2}}$
2	$\int e^{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ $\int \frac{dx}{x \cdot \cos^2(4 - \ln x)}$	2	$\int \ln^2 x \frac{dx}{x}$ $\int e^{\frac{4}{x}} \cdot \frac{dx}{x^2}$	2	$\int \frac{x^3 dx}{5 - 4x^4}$ $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} - 4}}$

3	$\int x \cdot \ln^2 5x dx$ $\int x^2 \cdot 4^{-x} dx$	3	$\int x \cdot e^{-2x} dx$ $\int (6x^2 + 1) \cdot \sin 2x dx$	3	$\int x^2 \cdot e^{-3x} dx$ $\int e^{-\frac{x}{2}} \cdot \sin x dx$
4	$\int \frac{1}{x^2 - 12x - 7} dx$	4	$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 14} dx$	4	$\int \frac{1}{x^2 + 14x - 7} dx$
5	$\int \sin \frac{3x}{2} \sin x dx$ $\int \sin 6x \cos 4x dx$	5	$\int \sin x \cos 8x dx$ $\int \sin \frac{-x}{3} \sin 2x dx$	5	$\int \cos \frac{-x}{2} \sin \frac{x}{3} dx$ $\int \cos 3x \cdot \sin 7x dx$
Вариант 13		Вариант 14		Вариант 15	
1	$\int \frac{dx}{4 - 9x^2}$ $\int \frac{dx}{9x - 3}$	1	$\int \frac{dx}{1 - 2x}$ $\int e^{-2x} dx$	1	$\int \frac{dx}{4 - 2x}$ $\int 3^{-2x} dx$
2	$\int \frac{3\sqrt{\ln 3x - 1}}{2x} dx$ $\int \sin(4 + \operatorname{tg} x) \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$	2	$\int \frac{dx}{x \cdot (4 \ln^2 x + 9)}$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sin^2 \sqrt{x}}$	2	$\int e^{2x} \cdot \cos(e^{2x} + 3) dx$ $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{4 - e^{4x}}} dx$
3	$\int x \cdot \ln^2 x dx$ $\int e^x \cdot \sin 3x dx$	3	$\int x \cdot \sin \frac{x}{2} dx$ $\int x^2 \cdot e^{-x} dx$	3	$\int x^3 \cdot \ln x dx$ $\int x^2 \cdot \cos x dx$
4	$\int \frac{1}{x^2 + 6x - 6} dx$	4	$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 16} dx$	4	$\int \frac{1}{x^2 + 10x - 7} dx$
5	$\int \sin 22x \sin 4x dx$ $\int \sin 15x \cos 4x dx$	5	$\int \sin 5x \cos 17x dx$ $\int \sin \frac{x}{3} \sin 4x dx$	5	$\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{2x}{3} dx$ $\int \cos 5x \cdot \sin 13x dx$
Вариант 16		Вариант 17		Вариант 18	
1	$\int \frac{dx}{x^5}$ $\int \frac{dx}{x - 3}$	1	$\int \frac{dx}{1 - x}$ $\int e^{3-2x} dx$	1	$\int \frac{dx}{4 - x}$ $\int 3^{1-2x} dx$
2	$\int x^3 \cdot \sqrt[4]{5x^4 - 3} dx$ $\int 2^{-x^3+4} \cdot 3x^2 dx$	2	$\int \cos(3 - e^x) \cdot e^x dx$ $\int e^{\operatorname{arctg} 2x} \frac{dx}{1 + 4x^2}$	2	$\int \sin(4 + \sqrt{5 - x}) \cdot \frac{dx}{\sqrt{5 - x}}$ $\int e^{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{dx}{9 + 9x^2}$
3	$\int x \cdot \ln^2 x dx$ $\int e^{-x} \cdot \cos 2x dx$	3	$\int x \cdot \cos \frac{x}{2} dx$ $\int x^2 \cdot \ln^2 x dx$	3	$\int e^{2x} \cdot \sin x dx$ $\int x \cdot 2^x dx$
4	$\int \frac{1}{x^2 + 16x - 4} dx$	4	$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 20} dx$	4	$\int \frac{1}{x^2 + 12x - 18} dx$

5	$\int \sin 2x \sin 14x dx$ $\int \sin 5x \cos 14x dx$	5	$\int \sin 11x \cos 7x dx$ $\int \sin \frac{x}{3} \sin 6x dx$	5	$\int \cos \frac{x}{4} \sin \frac{x}{2} dx$ $\int \cos 15x \cdot \sin 7x dx$
Вариант 19		Вариант 20		Вариант 21	
1	$\int \frac{dx}{4-x^2}$ $\int \frac{dx}{9x}$	1	$\int \frac{dx}{4-2x}$ $\int e^{-2x-3} dx$	1	$\int \frac{dx}{2x^5}$ $\int 3^{4x} dx$
2	$\int \sqrt{\sin^3 6x} \cdot \cos 6x dx$ $\int \frac{x^2 dx}{4x^3 - 5}$	2	$\int x \cdot \sin(3-4x^2) dx$ $\int 2^{\sin(x)+5} \cdot \cos x dx$	2	$\int (1+\ln x)^5 \frac{dx}{x}$ $\int \frac{3^x}{9^x + 4} dx$
3	$\int x \cdot e^{3x} dx$ $\int e^x \cdot \sin \frac{3}{2} x dx$	3	$\int \arcsin \frac{x}{2} dx$ $\int e^{-2x} \cdot \sin \frac{x}{2} dx$	3	$\int \arctg \frac{3x}{2} dx$ $\int x^3 \cdot e^{3x} dx$
4	$\int \frac{1}{x^2 + 2x - 4} dx$	4	$\int \frac{1}{x^2 + 4x - 20} dx$	4	$\int \frac{1}{x^2 + 12x + 18} dx$
5	$\int \sin x \sin 7x dx$ $\int \sin 15x \cos 14x dx$	5	$\int \sin 25x \cos 7x dx$ $\int \sin \frac{6x}{3} \sin 2x dx$	5	$\int \cos \frac{3x}{2} \sin \frac{2x}{3} dx$ $\int \cos 25x \cdot \sin 7x dx$
Вариант 22		Вариант 23		Вариант 24	
1	$\int \frac{dx}{6-9x}$ $\int \left(\frac{1}{\sin^2(4-x)} \right) dx$	1	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}}$ $\int (\cos(5-3x)) dx$	1	$\int (\sqrt[4]{x} - 4)^3 dx$ $\int \frac{dx}{\sqrt{9x}}$
2	$\int \sin(\ln x + 5) \frac{dx}{x}$ $\int \sin 5x \cdot (1 + \cos 5x)^7 dx$	2	$\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x + 1} dx$ $\int e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{dx}{x^3}$	2	$\int \frac{x^3}{7-4x^4} dx$ $\int \frac{xdx}{\sqrt{7x^2 - 3}}$
3	$\int e^{-3x} \cdot \sin x dx$ $\int \arctg 2x dx$	3	$\int x \cdot \sin 3x dx$ $\int x \cdot \ln^2 x dx$	3	$\int \cos x \cdot e^{2x} dx$ $\int \arcsin 2x dx$
4	$\int \frac{1}{x^2 - 2x - 4} dx$	4	$\int \frac{1}{x^2 - 4x - 18} dx$	4	$\int \frac{1}{x^2 + 12x + 22} dx$
5	$\int \sin 8x \sin 4x dx$ $\int \sin 4x \cos 4x dx$	5	$\int \sin 6x \cos 7x dx$ $\int \sin \frac{x}{2} \sin 2x dx$	5	$\int \cos \frac{x}{6} \sin \frac{x}{3} dx$ $\int \cos 6x \cdot \sin 9x dx$

Варіант 25		Варіант 26		Варіант 27	
1	$\int \frac{dx}{9x}$ $\int \left(\frac{1}{\cos^2(4-x)} \right) dx$	1	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-10}}$ $\int (\cos(5x-3)) dx$	1	$\int (\sqrt[4]{2x}-4)^3 dx$ $\int \frac{dx}{\sqrt{9x-2}}$
2	$\int \cos(\ln x + 5) \frac{dx}{x}$ $\int \cos 5x \cdot (1 + \sin 5x)^7 dx$	2	$\int \frac{x^2+6}{x^3-2} dx$ $\int e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{dx}{x^3}$	2	$\int \frac{x^3}{23-x^4} dx$ $\int \frac{2x dx}{\sqrt{x^2-3}}$
3	$\int e^{-x} \cdot \sin x dx$ $\int \arctg 6x dx$	3	$\int (x-1) \cdot \sin 3x dx$ $\int x^3 \cdot \ln^2 x dx$	3	$\int \cos x \cdot e^{3x} dx$ $\int \arcsin 2x dx$
4	$\int \frac{1}{x^2+2x-5} dx$	4	$\int \frac{1}{x^2+4x+18} dx$	4	$\int \frac{1}{x^2-12x+22} dx$
5	$\int \sin 5x \sin 4x dx$ $\int \sin(-4x) \cos 4x dx$	5	$\int \sin 5x \cos 7x dx$ $\int \sin \frac{x}{2} \sin 3x dx$	5	$\int \cos \frac{x}{7} \sin \frac{x}{1} dx$ $\int \cos 5x \cdot \sin 2x dx$
Варіант 28		Варіант 29		Варіант 30	
1	$\int \frac{dx}{6-2x}$ $\int \left(\frac{1}{\sin^2(5-x)} \right) dx$	1	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}$ $\int (\cos(5-x)) dx$	1	$\int (\sqrt[5]{x}-4)^3 dx$ $\int \frac{dx}{\sqrt{6x}}$
2	$\int (\ln x + 5) \frac{dx}{x}$ $\int \sin 4x \cdot (1 + \cos 4x)^7 dx$	2	$\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+3} dx$ $\int e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{dx}{x^3}$	2	$\int \frac{x^3}{7-6x^4} dx$ $\int \frac{x dx}{5x^2-3}$
3	$\int e^{-3x} \cdot \cos x dx$ $\int \arctg 2x dx$	3	$\int x \cdot \sin 7x dx$ $\int 4x \cdot \ln^2 x dx$	3	$\int \cos 3x \cdot e^{2x} dx$ $\int \arcsin 2x dx$
4	$\int \frac{1}{x^2-2x-4} dx$	4	$\int \frac{1}{x^2-4x-18} dx$	4	$\int \frac{1}{x^2+12x+22} dx$
5	$\int \sin(-8x) \sin 2x dx$ $\int \sin 2x \cos 4x dx$	5	$\int \sin 7x \cos 7x dx$ $\int \sin \frac{x}{2} \sin 2x dx$	5	$\int \cos \frac{4x}{6} \sin \frac{x}{3} dx$ $\int \cos 6x \cdot \sin x dx$

ТЕМА 6. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Перед виконанням завдання цього розділу студент повинен знати формулу Ньютона-Лейбниці, вміти розрізнити визначені і невластні інтеграли. Для знаходження інтегралів студент повинен знати таблицю основних інтегралів, крім того, для обчислення невластних інтегралів – володіти темою «Границі функцій».

Якщо функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a; b]$ і $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ – довільне розбиття цього відрізка на n частин, то інтегральною сумою для функції $f(x)$ на $[a; b]$ називається сума вигляду:

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta x_k, \text{ де } x_{k-1} \leq \zeta_k \leq x_k, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Якщо визначена на відрізку $[a; b]$ функція $f(x)$ неперервна, то існує скінченна границя послідовності інтегральних сум S_n за умови, що найбільша із різниць Δx_k прямує до нуля. Причому ця границя не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a; b]$ на відрізки $[x_{k-1}; x_k]$, ні від вибору точок ζ_k на цих відрізках. Вона називається визначеним інтегралом від функції $f(x)$ в межах від

$$a \text{ до } b \text{ і позначається символом } \int_a^b f(x) dx, \text{ тобто } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta x_k$$

Основні властивості визначеного інтеграла

- 1) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx;$
- 2) $\int_a^a f(x) dx = 0;$
- 3) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$, де c – довільне дійсне число і $f(x)$ неперервна на $[a; c]$ і $[c; b]$;
- 4) $\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$, c – стала;
- 5) $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx;$
- 6) $\int_a^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & \text{якщо } f(-x) = f(x), \\ 0, & \text{якщо } f(-x) = -f(x) \end{cases}$

Формула Ньютона-Лейбниці для обчислення визначених інтегралів:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$.

Спосіб **підстановки** у визначених інтегралах:

$$\int_a^b f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) dx = \begin{cases} \varphi(x)=t \\ d\varphi(x)=dt \\ \varphi'(x)dx=dt \end{cases} \begin{matrix} \text{при } x=a: t=\varphi(a)=\alpha \\ \text{при } x=b: t=\varphi(b)=\beta \end{matrix} \Bigg\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt.$$

Спосіб **інтегрування за частинами** у визначених інтегралах:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Приклад 1.

$$\int_1^e \frac{dx}{x^3 \sqrt{8+19 \ln x}} = \left\{ \begin{array}{l} 8+19 \ln x = t \\ d(8+19 \ln x) = dt \text{ якщо } x=1: \\ 19 \cdot \frac{1}{x} dx = dt \quad t=8+19 \cdot \ln 1=8 \\ \frac{1}{x} dx = \frac{1}{19} dt \quad \text{якщо } x=e: \\ \quad \quad \quad t=8+19 \cdot \ln e=27 \end{array} \right\} = \frac{1}{19} \int_8^{27} t^{-\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{19} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} \Bigg|_8^{27} =$$

$$= \frac{3}{19} \cdot \frac{t^{\frac{2}{3}}}{2} \Bigg|_8^{27} = \frac{3}{38} \sqrt[3]{t^2} \Bigg|_8^{27} = \frac{3}{38} (\sqrt[3]{27^2} - \sqrt[3]{8^2}) = \frac{15}{38}.$$

Приклад 2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin 3x dx = \left\{ \begin{array}{l} u=x \\ dv=\sin 3x dx \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{l} du=dx \\ v=-\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right\} = -\frac{1}{3} x \cos 3x \Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{3} \sin 3x \Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

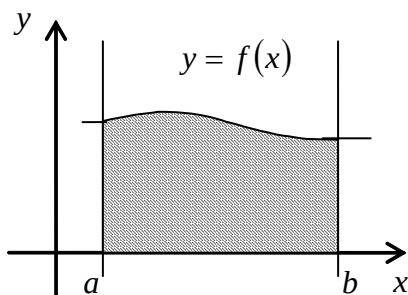
$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \cos \left(3 \cdot \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{3} \sin \left(3 \cdot \frac{\pi}{6} \right) - \frac{1}{3} \sin(3 \cdot 0) = -\frac{\pi}{18} \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{3}.$$

ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ

Площа плоскої фігури:

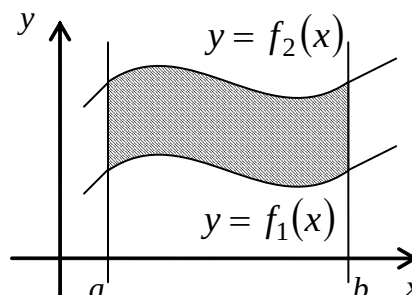
а) Площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, $x \in [a; b]$:

$$S = \int_a^b y dx \text{ або } S = \int_a^b f(x) dx.$$



Якщо фігура обмежена зверху графіком функції $y = f_2(x)$, знизу $y = f_1(x)$ та прямими $x = a$, $x = b$:

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$



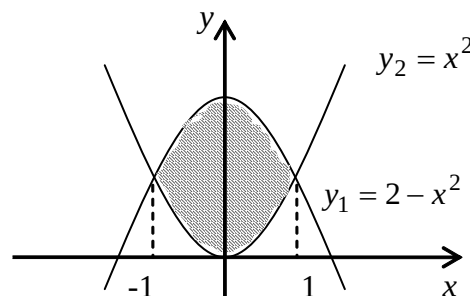
Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ та $y = 2 - x^2$.

Для того, щоб накреслити рисунок, знайдемо координати точки перетину кривих $y_1(x)$ та $y_2(x)$, в якій $y_1(x) = y_2(x)$:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1$$

$\Leftrightarrow$

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 1 \Rightarrow a = -1; \quad b = 1.$$



$$\begin{aligned} \text{Тоді: } S &= \int_{-1}^1 ((2 - x^2) - x^2) dx = \int_{-1}^1 (2 - 2x^2) dx = 2 \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = 2 \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{3} - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3} \right) \right) = \frac{8}{3} \text{ (кв. од.)}. \end{aligned}$$

Індивідуальне завдання № 6. «Визначений інтеграл»

Варіант 1

I. Обчислити визначений інтеграл:

1. $\int_1^8 \frac{2 + 5\sqrt{x}}{x^3} dx.$

2. $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}.$

Варіант 2

I. Обчислити визначений інтеграл:

1. $\int_0^{-1} \frac{x^4 - 4}{2 - x^2} dx.$

2. $\int_{-1}^0 2x(x^2 - 1)^{15} dx.$

$3. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}.$ II. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y = \sqrt{x}, x = 9, y = 0.$ б) $y = (x+1)^2, y^2 = x, y = 1, y = 0.$	$3. \int_0^1 x e^{-x} dx.$ II. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y = x^2 + 2x + 2, y = 0, x = 0, x = -3.$ б) $y = \sin x, x = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = 0.$
Варіант 3 I. Обчислити визначений інтеграл: 1. $\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1) dx.$ 2. $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx.$ 3. $\int_1^e x \ln x dx.$ II. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y = \frac{1}{x^2}, y = x, x = 3.$ б) $y = \arccos x, x \geq 0, y \geq 0.$	Варіант 4 I. Обчислити визначений інтеграл: 1. $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx.$ 2. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx.$ 3. $\int_0^{\frac{1}{2}} \arctg 2x dx.$ II. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y = x^2, 4x - y = 0.$ б) $y = \frac{1}{x}, y = 1, x = 0, x = e, y = 0.$
Варіант 5 I. Обчислити визначений інтеграл: 1. $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx.$ 2. $\int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{1 + \ln x}}.$ 3. $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx.$ II. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y = \cos x, x = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = 0.$ б) $y = \sqrt{x}, x = 4, y = 0.$	Варіант 6 I. Обчислити визначений інтеграл: 1. $\int_0^4 (x^2 + 3)^2 dx.$ 2. $\int_0^2 (e^x - 1)^{10} e^x dx.$ 3. $\int_1^e x \ln x dx.$ II. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y = x^2, x = 0, y = 0.$ б) $y = e^x, x = 4, x = 0, y = 0.$
Варіант 7 I. Обчислити визначений інтеграл: 1. $\int_1^4 \frac{9x-1}{3\sqrt{x}+1} dx.$ 2. $\int_2^9 \sqrt{x-1} dx.$	Варіант 8 I. Обчислити визначений інтеграл: 1. $\int_{-2}^0 \left(\frac{x}{2} + 1 \right)^3 dx$

$3. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$ II. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y = \sin x, y = \frac{3}{\pi} x$. б) $y = x^2 - 2x + 3, y = 3x - 1, x = 0$.	$2. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + 5 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$ $3. \int_0^1 x \arctg 2x dx$ II. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y = (x+1)^2, y = 4$. б) $y = \operatorname{tg} x, y = 0, x = \frac{\pi}{3}$.
Варіант 9 I. Обчислити визначений інтеграл: $1. \int_1^4 \frac{1 + \sqrt{x}}{x^2} dx$ $2. \int_0^{\sin 1} \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ $3. \int_0^1 \arcsin x dx$ II. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y = \sin x, x = \pi, y = -x$ б) $y = 4 - x^2, y = 2x + 1$.	Варіант 10 I. Обчислити визначений інтеграл: $1. \int_{100}^{101} (\sqrt{x} + 2) dx$ $2. \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{6}{5}} \sqrt{x-2} dx$ $3. \int_0^3 \ln(x+3) dx$ II. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y = x^3, x=1, y=0$. б) $y = e^{-x}, x=0, x=1, y=0$.
Варіант 11 I. Обчислити визначений інтеграл: $1. \int_4^9 \left(\frac{2x}{5} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx$ $2. \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$ $3. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$ II. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y = 4 - x^2, y = 0$. б) $y = e^{2x}, y = e^{-2x}, y = 2$.	Варіант 12 I. Обчислити визначений інтеграл: $1. \int_4^9 \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$ $2. \int_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 3}} x e^{x^2} dx$ $3. \int_0^{2\pi} (2x+1) \cos 3x dx$ II. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y = 1 + e^x, x = 0, x = -4, y = 0$. б) $y = x^2 + 1, x = 0, y = 2x + 9, y = 0$.

Варіант 13 I. Обчислити визначений інтеграл: $\int_1^4 \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{2x}}{x} dx$ $\int_{-\sqrt[3]{3}}^0 x^2 e^{\frac{1}{3}x^3 + 1} dx$ $\int_0^3 \ln(x+3) dx$ II. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: $y = 4x^2, y = x^2 + 3.$ $xy = 1, y = x^2, y = 4, x > 0.$	Варіант 14 I. Обчислити визначений інтеграл: $\int_1^8 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 3x + 5 \right) dx$ $\int_{\sqrt{\pi}/2}^{\sqrt{\pi}/4} \frac{1}{2} x \sin x^2 dx$ $\int_0^{\pi/4} x \cos 2x dx$ II. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: $y = x^2 - 3x, y = x.$ $y = e^{2x}, x=1, x=2, y=0.$
Варіант 15 I. Обчислити визначений інтеграл: $\int_0^1 \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} \right) dx$ $\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 \frac{xdx}{5\sqrt{1-x^2}}$ $\int_{-1}^0 x \sin 3x dx$ II. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: $y = e^x, y = e, x = -1.$ $y = 4x - x^2, y = -3.$	Варіант 16 I. Обчислити визначений інтеграл: $\int_{-2}^{-1} \left(x + \frac{1}{3x^5} + \frac{1}{2} \right) dx$ $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$ $\int_0^{\pi/2} x \sin 2x dx$ II. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: $y = \sin x, x = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = 0.$ $y = \sqrt{x}, x = 4, y = 0.$
Варіант 17 I. Обчислити визначений інтеграл: $\int_{-2}^2 (x^2 + x + 1) dx$ $\int_1^e \frac{\sin \ln x}{x} dx$ $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$ II. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: $y = -x, y = 2 - x, y = -4, y = 3.$ $y = -x^2 - 7x + 10, y = 0.$	Варіант 18 I. Обчислити визначений інтеграл: $\int_2^5 \left(\frac{1}{x} + 2^x - x \right) dx$ $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2}$ $\int_{-1}^1 x \arctg x dx$ II. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: $y = \sin x, x = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = 0.$ $y = x, y = 4 - x, y = 0, x = 3.$

Варіант 19 I. Обчислити визначений інтеграл: $\int_3^5 \left(\frac{1}{x^2} + e^{2x} - x \right) dx$ $\int_{-2}^0 \frac{dx}{(5+2x)^5}$ $\int_0^1 \arctg 6x dx$ II. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: $y = e^x, x = 4, x = 0, y = 0.$ $y = e^{2x}, x + y = 1, y = 2.$	Варіант 20 I. Обчислити визначений інтеграл: $\int_0^1 (x\sqrt{x} - 2x + 1) dx$ $\int_1^2 e^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{x^2}$ $\int_0^3 \ln(x+11) dx$ II. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: $y = \sin x, x = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = 0.$ $y = x^2, y = 2.$
Варіант 21 I. Обчислити визначений інтеграл: $\int_{-1}^2 (x^3 + \sqrt[3]{x}) dx$ $\int_1^e \cos \ln x \frac{dx}{x}$ $\int_0^1 \arcsin 7x dx$ II. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: $y = 6 - x^2, y = 0.$ $y = x, y = 1, y = 4, x = 0.$	Варіант 22 I. Обчислити визначений інтеграл: $\int_1^{27} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{x} \right) dx$ $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{3(1 - 2e^x)}$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \arctg 2x dx$ II. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: $y = -\frac{1}{x}, y = 0, x = 1, x = 2.$ $y = 2\sqrt{x}, x = 4, y = 0.$
Варіант 23 I. Обчислити визначений інтеграл: $\int_{-1}^2 (3x^2 + 4x - 1) dx$ $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{1}{x} \frac{dx}{x^2}$ $\int_0^3 x \ln(x+17) dx$ II. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: $y = \sin x, y = \frac{2}{\pi} x.$ $y = 2\sqrt{x}, y = x.$	Варіант 24 I. Обчислити визначений інтеграл: $\int_{-1}^3 (2 + x - 3x^2) dx$ $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1 + x^6}$ $\int_1^e \ln 7x dx$ II. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: $y = \sin x, y = 2 \sin x, x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}.$ $y = x^2 - 1, y = 7x - 7.$

Варіант 25 I. Обчислити визначений інтеграл: $\int_{-1}^8 (\sqrt[3]{x} - x + 3x^2) dx$ $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$ $\int_0^1 \arcsin x dx$ II. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: $y = \frac{1}{x^2}, y = x, x = 3.$ $y = x^3, 4x - y = 0.$	Варіант 26 I. Обчислити визначений інтеграл: $\int_1^4 \frac{4+3\sqrt{x}}{x^2} dx.$ $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x} dx}{1+e^{2x}}.$ $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{xdx}{\sin^2 x}.$ II. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: $y = \frac{1}{x}, y = x, x = e.$ $y = 2\sin x, y = \sin x, x = 0, x = \pi.$
Варіант 27 I. Обчислити визначений інтеграл: $\int_0^{-2} \frac{x^4 - 4}{2 + x^2} dt.$ $\int_{-1}^0 3x^2 (x^3 + 6)^{11} dx.$ $\int_0^1 xe^{-2x} dx.$ II. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: $y = e^x, y = 0, x = -1, x + y = 1.$ $y = -x^2 + 3, y = x^2 + 1.$	Варіант 28 I. Обчислити визначений інтеграл: $\int_1^2 (4x^3 + 3x^2) dx.$ $\int_1^e \frac{\sqrt{3 + \ln x}}{x} dx.$ $\int_1^e x^3 \ln x dx.$ II. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: $y = 2 \cos x, y = \cos x, x = 0, x = \pi/2.$ $y = -x^2 + 5x - 6, y = 0.$
Варіант 29 I. Обчислити визначений інтеграл: $\int_0^{16} (\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}) dx.$ $\int_2^3 \frac{xdx}{x^4 - 4}.$ $\int_0^3 x \ln(x+17) dx$ II. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: $y = e^{2x}, x = -4, x = 0, y = 0.$ $y = \sqrt{x}, x + y = 2, x = 0.$	Варіант 30 I. Обчислити визначений інтеграл: $\int_1^{27} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{x} \right) dx$ $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{4(1 - 2e^x)}$ $\int_0^{\pi/2} x \operatorname{arctg} 2x dx$ II. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: $y = x^2, x = 2, y = 0.$ $y = e^{2x}, y = e^{-2x}, y = 2.$

ТЕМА 7. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду $F(x, y, y') = 0$, яке пов'язує незалежну змінну x , невідому функцію $y = y(x)$ та її похідну, або, якщо його розв'язати відносно похідної $y' = f(x, y)$

Розв'язком диференціального рівняння (1.1) на деякому інтервалі $(a; b)$ називається диференційована на цьому інтервалі функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в рівняння (1.1) перетворює його в тотожність по x на $(a; b)$.

Функція $y = \varphi(x, C)$, яка залежить від аргументу і довільної сталої C , називається загальним розв'язком рівняння (1.1) в області G , якщо вона задовольняє дві умови:

1) функція $\varphi(x, C)$ є розв'язком рівняння при будь-якому значенні сталої C з деякої множини;

2) для довільної точки $(x_0, y_0) \in G$ можна знайти таке значення $C = C_0$, що функція $y = \varphi(x, C_0)$ задовольняє початкову умову: $\varphi(x_0, C_0) = y_0$.

Частинним розв'язком рівняння (1.1) називається функція $y = \varphi(x, C_0)$, яка утворюється із загального розв'язку $y = \varphi(x, C)$ при певному значенні сталої $C = C_0$.

Задача, в якій необхідно знайти частинний розв'язок рівняння (1.1), який задовольняє початковій умові $y(x_0) = y_0$, називається задачею Коші.

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння знайдено в неявному вигляді, тобто у вигляді рівняння $\Phi(x, y, C) = 0$, то такий розв'язок називають загальним інтегралом диференціального рівняння (1.1). Рівність $\Phi(x, y, C_0) = 0$, називають частинним інтегралом рівняння.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ З ВІДОКРЕМЛЮВАНИМИ ЗМІННИМИ

Рівняння виду $y' = f(x)\varphi(y)$ де $f(x)$ і $\varphi(y)$ – задані і неперервні на деякому інтервалі функції, називається диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.

Рівняння виду $\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx$, ($\varphi(y) \neq 0$) називається диференціальним рівнянням з відокремленими змінними.

Загальний інтеграл диференціального рівняння має вигляд $\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + C$.

Диференціальне рівняння є окремим випадком рівняння виду $f_1(x)\varphi_1(y)dx + f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0$.

Для відокремлення змінних у цьому рівнянні досить обидві його частини поділити на функцію $\varphi_1(y)f_2(x) \neq 0$.

Приклад 1. $x^2 dy + y dx = 0$.

Необхідно в диференціальному рівнянні зробити перетворення таким чином, щоб коефіцієнтами при диференціалах dx та dy були функції, які залежать відповідно лише від x і лише від y . Поділимо обидві частини даного рівняння на добуток функцій $x^2 y$. Вважаємо, що $y \neq 0, x \neq 0$. Одержимо $\frac{1}{y} dy + \frac{1}{x^2} dx = 0$. Почленно проінтегрувавши дане рівняння маємо: $\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dx}{x^2} = C$. Звідси $\ln y - \frac{1}{x} = \ln C$, $\ln y = \frac{1}{x} + \ln C$, $y = C e^{1/x}$ – загальний інтеграл рівняння. Розв'язок $y=0$ міститься у загальному розв'язку при $C=0$. Розв'язок $x=0$ не міститься у загальному розв'язку.

Приклад 2. $xy' - y \ln y = 0$.

Запишемо похідну y' у вигляді співвідношення диференціалів $y' = \frac{dy}{dx}$. $x \frac{dy}{dx} - y \ln y = 0$. Помноживши обидві частини рівняння на dx , маємо: $x dy - y \ln y dx = 0$. Поділивши обидві частини даного рівняння на добуток функцій $xy \ln y$ при $y \neq 1, x \neq 0$ одержимо $\frac{dy}{y \ln y} - \frac{dx}{x} = 0$. Інтегруючи обидві частини рівняння маємо: $\ln |\ln y| - \ln x = \ln C$. Загальний інтеграл рівняння має вигляд: $x \ln y = C$. Розв'язки $y=1$ і $x=0$ містяться у загальному розв'язку при $C=0$.

Приклад 3. Розв'язати задачу Коші: $\operatorname{tg} y dx - x \ln x dy = 0$, $y(e) = \frac{\pi}{2}$.

Поділивши обидві частини даного рівняння на добуток функцій $\operatorname{tg} y \cdot x \ln x$ при $y \neq \pi k, x \neq 1$ одержимо $\frac{dx}{x \ln x} - \frac{dy}{\operatorname{tg} y} = 0$. Інтегруючи обидві частини рівняння маємо:

$$\ln |\ln x| - \ln |\sin y| = \ln C,$$

$$\ln x = C \sin y.$$

Визначимо з початкових умов довільну сталу C :

$$\ln e = C \sin \frac{\pi}{2}, \quad C = 1.$$

Підставивши знайдене значення довільної сталої у загальний інтеграл, одержимо розв'язок задачі Коші $\ln x = \sin y$.

ОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Рівняння виду $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ називається однорідним, якщо $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ – однорідні функції одного виміру. Функція $f(x, y)$ називається однорідною функцією n -го виміру, якщо при множенні змінних x та y на довільний параметр t значення функції задовольняє $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$

Диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ називається однорідним, якщо функція $f(x, y)$ являється однорідною функцією нульового виміру.

Однорідне диференціальне рівняння може бути зведене до вигляду:

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

За допомогою підстановки $\frac{y}{x} = t$, де t – нова функція, рівняння (3.4)

зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними. Дійсно, так як

$$y = xt, \quad y' = t + xt' \quad \text{то} \quad t + xt' = \varphi(t), \quad \text{або} \quad xt' = \varphi(t) - t.$$

Так як $t' = \frac{dt}{dx}$, то очевидно, що можна розділити змінні при $\varphi(t) - t \neq 0$:

$$\frac{dt}{\varphi(t) - t} = \frac{dx}{x}.$$

Приклад 1. $y' = \frac{y}{x} - e^{\frac{y}{x}}$.

Це рівняння є однорідним тому, що $f(x, y) = \frac{y}{x} - e^{\frac{y}{x}}$ – однорідна функція

нульового виміру: $f(tx, ty) = \frac{ty}{tx} - e^{\frac{ty}{tx}} = \frac{y}{x} - e^{\frac{y}{x}} = f(x, y)$.

Покладемо $t = \frac{y}{x}$, звідки $y = xt$, $y' = t + xt'$. Підставимо в рівняння:

$$t + xt' = t - e^t,$$

$$xt' = -e^t.$$

Так як $t' = \frac{dt}{dx}$, то можна відокремити змінні: $-\frac{dt}{e^t} = \frac{dx}{x}$.

Інтегруємо обидві частини рівняння:

$$-\int \frac{dt}{e^t} = \int \frac{dx}{x} + C;$$

$$-\int e^{-t} dt = \ln x + C$$

$$e^{-t} = \ln x + C.$$

Підставивши $t = \frac{y}{x}$, маємо $e^{-\frac{y}{x}} = \ln x + C$.

Приклад 2. $(y + \sqrt{x^2 - y^2})dx - xdy = 0$.

Тут $P(x, y) = y + \sqrt{x^2 - y^2}$, $Q(x, y) = -x$. Обидві функції – однорідні першого виміру. Покладемо $t = \frac{y}{x}$, звідки $y = xt$, $dy = xdt + tdx$. Підставимо в рівняння:

$$(xt + \sqrt{x^2 - x^2t^2})dx - x(xdt + tdx) = 0,$$

$$x(t + \sqrt{1 - t^2})dx - x(xdt + tdx) = 0,$$

$$(t + \sqrt{1 - t^2} - t)dx - xdt = 0,$$

$$\sqrt{1 - t^2} dx - xdt = 0.$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи маємо:

$$\frac{dx}{x} - \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = 0;$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = C;$$

$$\ln|x| - \arcsin t = C.$$

Або, з урахуванням того, що $t = \frac{y}{x}$:

$$\ln|x| - \arcsin \frac{y}{x} = C.$$

ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду $y' + p(x)y = q(x)$, де $p(x)$ і $q(x)$ – задані і неперервні на деякому проміжку функції.

Метод Бернуллі розв'язку лінійних рівнянь

Шукаємо розв'язок рівняння у вигляді добутку двох функцій $u(x)$ і $v(x)$, тобто використовуємо підстановку виду $y = u(x) \cdot v(x)$.

Тоді вираз для похідної матиме вигляд $y' = u'v + uv'$

Після підстановки виразів для y і y' в рівняння і, групуючи доданки в ньому, наприклад, наступним чином

$$u'v + u(v' + pv) = q,$$

одержимо два рівняння з відокремлюваними змінними:

$$v' + pv = 0;$$

$$u'v = q.$$

Приклад. Розв'язати рівняння $y' - y = xe^x$.

Це лінійне рівняння $p(x) = -1$, $q(x) = xe^x$. Використаємо підстановку $y = u(x) \cdot v(x)$; $y' = u'v + uv'$.

Підставимо y і y' в рівняння і групуємо доданки наступним чином:

$$u'v + \underline{uv'} - \underline{uv} = xe^x;$$

$$u'v + u(v' - v) = xe^x.$$

Вираз у дужках вважаємо рівним нулю: $v' - v = 0$.

Відокремлюючи змінні, маємо:

$$\frac{dv}{v} = dx;$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int dx;$$

$$\ln|v| = x.$$

Звідси маємо: $v = e^x$. З урахуванням знайденого виразу для $v(x)$ маємо рівняння для визначення функції $u(x)$:

$$u' \cdot e^x = xe^x,$$

$$\frac{du}{dx} = x,$$

$$\int du = \int x dx,$$

$$u = \frac{x^2}{2} + C,$$

де C – константа інтегрування. Загальний розв'язок рівняння матиме вигляд

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C \right) e^x.$$

РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ

Рівняння Бернуллі – це рівняння виду: $y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^n$

де $p(x)$, $q(x)$ – задані функції. При $n=1$ рівняння Бернуллі перетворюється в рівняння з відокремлюваними змінними.

При $n=0$ маємо лінійне рівняння.

Якщо $n \neq 0$ і $n \neq 1$, то заміною $z = y^{1-n}$ рівняння Бернуллі (6.11) приводиться до лінійного рівняння відносно нової функції z . Але на практиці немає необхідності замінювати змінну. Рівняння Бернуллі краще розв'язувати, як і лінійне, за допомогою підстановки

$$y = u(x)v(x),$$

не приводячи його спочатку до лінійного рівняння.

Приклад. Розв'язати рівняння $xy' - y = x^3 y^2$.

Записавши дане рівняння у вигляді

$$y' - \frac{1}{x}y = x^2 y^2,$$

досить легко визначити, що це – рівняння Бернуллі,

$$\text{де } p(x) = -\frac{1}{x}; \quad q(x) = x^2; \quad n = 2.$$

Використаємо підстановку $y = u(x)v(x)$, тоді $y' = u'v + uv'$. Підставляємо вираз для y і y' в дане рівняння і, аналогічно тому, як це робили при розв'язку лінійного рівняння, групуємо доданки:

$$\underline{u'v} + uv' - \frac{1}{x}uv = x^2 u^2 v^2;$$

$$v\left(u' - \frac{1}{x}u\right) + uv' = x^2 u^2 v^2.$$

Вираз у дужках, як і раніше, вважаємо рівним нулю:

$$u' - \frac{1}{x}u = 0; \quad \frac{du}{u} = \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|u| = \ln|x|,$$

$$u = x.$$

Для визначення функції $v(x)$ маємо рівняння $uv' = x^2 u^2 v^2$ або враховуючи розв'язок для $u(x)$:

$$xv' = x^2 x^2 v^2;$$

$$\frac{dv}{v^2} = x^3 dx;$$

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int x^3 dx.$$

Після інтегрування маємо:

$$-\frac{1}{v} = \frac{x^4}{4} + C,$$

$$v = -\frac{4}{x^4 + 4C}.$$

Тоді загальний розв'язок має вигляд:

$$y = -\frac{4x}{x^4 + 4C}.$$

ЛІНІЙНІ ОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Розглянемо л.о.д.р., в якому коефіцієнти є сталі.

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$$

Частинні розв'язки знаходимо у вигляді :

$$y(x) = e^{kx}, \text{ де } k \text{ є розв'язком характеристичного рівняння (х.р.)}$$

$$k^n + p_1 k^{n-1} + \dots + p_{n-1} k + p_n = 0$$

Це алгебраїчне рівняння має n коренів (деякі з них ,або й усі, можуть бути комплексними).

1. корені $k_1, k_2, \dots, k_n$ різні , дійсні

Маємо n функцій $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}$, які є лінійно незалежними частинними розв'язками рівняння, отже складають ф.с.р. л.о.д.р. Загальний розв'язок (з.р-к) такий :

$$y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x}.$$

Приклад. $y'' + y' = 0$

Відповідне х.р. таке :

$$k^2 + k = 0,$$

$$k(k+1) = 0, \begin{cases} k=0 \\ k+1=0 \end{cases} \begin{cases} k_1=0 \\ k_2=-1 \end{cases}, \text{ усі корені х.р. дійсні.}$$

Отже з.р-к д.р. (3.3.3) буде такий :

$$\text{Відповідь: } y = C_1 + C_2 e^{-x}.$$

2. корені $k_1, k_2, \dots, k_n$ комплексні

Відомо, що комплексні корені рівняння з дійсними коефіцієнтами присутні спряженими парами $\alpha + \beta \cdot i$ та $\alpha - \beta \cdot i$. Кожна з таких пар коренів х.р. дасть два ч.р-ки д.р.:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x \text{ та } y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Приклад. $y'' + 2y' + 5y = 0$

Відповідне х.р. таке :

$$k^2 + 2k + 5 = 0,$$

$$k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i,$$

отже $\alpha = -1, \beta = 2$ і маємо з.р-к д.р. (3.3.5) :

$$\text{Відповідь: } y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

3. випадок кратних коренів

Якщо дійсний корінь х.р. k_1 повторюється m разів, то відповідні йому ч.р-ки л.о.д.р. будуть такі:

$$e^{k_1 x}, x e^{k_1 x}, x^2 e^{k_1 x}, \dots, x^m e^{k_1 x}.$$

Якщо пара комплексних коренів х.р. $\alpha \pm \beta \cdot i$ повторюється m разів, то відповідні йому ч.р-ки л.о.д.р. будуть такі:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots,$$

$$x^m e^{\alpha x} \cos \beta x, x^m e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Приклад: $5y''' + y'' = 0$

$$5k^3 + k^2 = 0, \quad k_1 = k_2 = 0, \quad k_3 = -\frac{1}{5}$$

$$y_1 = e^{0x} = 1, \quad y_2 = x e^{0x} = x, \quad y_3 = e^{-\frac{1}{5}x}.$$

З.р-к л.о.д.р. (3.3.7) такий: $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x/5}$.

Індивідуальне завдання № 7 «Диференційні рівняння»

Варіант 1 1) $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ 2) $x dx - 3y dy = 3x^2 y dy - xy^2 dx$ 3) $x \ln y \cdot y' = x^3 y; \quad y(0) = e$ 4) $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4 \frac{y}{x} + 2$ 5) $y dx + 2(\sqrt{xy} - x) dy = 0, \quad y(1) = 1$ 6) $y' + y = 3x$ 7) $y' - \frac{y}{x} = x^2, \quad y(1) = 0$ 8) $y'' + 4y' + 29y = 0,$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = 15.$	Варіант 2 1) $y' = \operatorname{ctg} x.$ 2) $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0.$ 3) $x^3 y' + y = 7, \quad y(1) = 5.$ 4) $xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}.$ 5) $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}, \quad y(1) = 0.$ 6) $y' - \frac{1}{x}y = x^2.$ 7) $y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$ 8) $y'' + 16y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1.$
Варіант 3 1) $y' = x \cdot \cos x.$ 2) $\sqrt{4+y^2} dx - y dy = x^2 y dy.$	Варіант 4 1) $y' = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}.$ 3) $xy' + y = y^2, \quad y(1) = 0,5.$

3) $(2xy + y)y' = 3 - y^2, \quad y(0) = 2.$ 4) $y' = \frac{x + y}{x - y}.$ 5) $\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0, \quad y(1) = 1.$ 6) $y' + \frac{1}{x}y = e^{x^2}$ 7) $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad y(0) = 0.$ 8) $y'' + 4y' = 0, \quad y(0) = 7, \quad y'(0) = 8.$	2) $\sqrt{3 + y^2}dx - ydy = x^2 ydy.$ 4) $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y.$ 5) $x dy = \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx, \quad y(1) = 0.$ 7) $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$ 6) $y' - y \operatorname{tg} x = \sin^2 x.$ 7) $y' - \frac{1}{x+1}y = e^x(x+1), \quad y(0) = 1.$ 8) $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$
Варіант 5 1) $y' = \sin^2 x.$ 2) $6x dx - 6y dy = 2x^2 y dy - 3xy^2 dx.$ 3) $xy' \ln y - y = 0, \quad y(1) = e^2.$ 4) $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3.$ 5) $x dy = \left(y + \sqrt{y^2 - 4x^2}\right)dx.$ 6) $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$ 7) $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = \frac{3}{2}.$ 8) $y'' - 2y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$	Варіант 6 1) $y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$ 2) $x\sqrt{3 + y^2}dx + y\sqrt{2 + x^2}dy = 0.$ 3) $(2 - e^x)\sin y \cdot y' = e^x \cos^3 y, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}.$ 4) $xy' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}.$ 5) $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0, \quad y(1) = 2.$ 6) $y' - \frac{y}{x} = x \sin x.$ 7) $y' - \frac{1}{x+1}y = e^x(x+1), \quad y(0) = 1.$ 8) $y'' + y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$
Варіант 7 1) $y' = \sin x \cdot \cos x.$ 2) $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x}dx = 0.$ 3) $y \sin x dx + (\cos x - 1)dy = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$ 4) $y' = \frac{x + 2y}{2x - y}.$ 5) $(y^2 - 3x^2)dy + 2xy dx = 0, \quad y(0) = 1.$ 6) $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}.$ 7) $y' + \frac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi}.$	Варіант 8 1) $y' = \frac{1}{x^3}.$ 2) $6x dx - 6y dy = 3x^2 y dy - 2xy^2 dx.$ 3) $(1 + e^x)yy' = e^x, \quad y(0) = 1.$ 4) $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y.$ 5) $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2), \quad y(1) = 1.$ 6) $y' + \frac{y}{x} = x^2.$ 7) $y' + \frac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1.$

8) $y'' + 4y' = 0, y(0) = 7, y'(0) = 8.$	8) $y'' + y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0.$
Варіант 9 1) $y' = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}.$ 2) $x\sqrt{5+y^2}dx + y\sqrt{4+x^2}dy = 0.$ 3) $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0, y(1) = 0.$ 4) $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4.$ 5) $xy'(\ln y - \ln x) = y, y(e) = 1.$ 6) $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x.$ 7) $y' - \frac{y}{x+1} = e^x(x+1), y(0) = 1.$ 8) $y'' - 5y' + 6y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2.$	Варіант 10 1) $y' = \cos^3 x.$ 2) $y(4 + e^x)dy - e^x dx = 0.$ 3) $2y' \cdot \sqrt{x} = y, y(4) = 1.$ 4) $xy' = \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}.$ 5) $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8, y(1) = 1.$ 6) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x.$ 7) $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^2}{1+x^2}, y(0) = \frac{2}{3}.$ 8) $y'' + 2y' + 10y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1.$
Варіант 11 1) $y' = \cos 2x.$ 2) $2xdx - 2ydy = x^2ydy - xy^2dx.$ 3) $y' = (2y+1)\operatorname{tg} x, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$ 4) $y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}.$ 5) $(xy' - y)\arctg \frac{y}{x} = x, y(1) = 0.$ 6) $xy' - 2y = 2x^4.$ 7) $y' - \frac{2x-5}{x^2}y = 5, y(2) = 4.$ 8) $y'' - 2y' = 0, y(0) = y'(0) = 2.$	Варіант 12 1) $y' = \frac{x}{x^2-4}.$ 2) $\sqrt{4-x^2}y' + xy^2 + x = 0.$ 3) $y' \cos x = y \sin x, y(\pi) = 3.$ 4) $xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y.$ 5) $xy' = y + x \sin^2 \frac{y}{x}, y(1) = \frac{\pi}{4}.$ 6) $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x.$ 7) $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}e^x, y(1) = e.$ 8) $y'' + 3y' + 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -1.$
Варіант 13 1) $y' = \operatorname{tg} x.$ 2) $x\sqrt{4+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0.$ 3) $(1+e^x)y' \cdot y = e^x, y(0) = 1.$ 4) $y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6.$ 5) $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}, y(1) = \frac{\pi}{2}.$	Варіант 14 1) $y' = e^{5-2x}.$ 2) $(e^x + 8)dy - ye^x dx = 0.$ 3) $x^2y' + y^2 = 0, y(-1) = 1.$ 4) $y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}.$ 5) $(2\sqrt{xy} - y)dx + xdy = 0, y(1) = 1.$

6) $y' - \frac{y}{x} = x^2$. 7) $y' - \frac{y}{x} = -2 \frac{\ln x}{x}$, $y(1)=1$. 8) $4y'' - 7y' + 3y = 0$, $y(0)=1$, $y'(0)=-1$.	6) $xy' + \frac{y}{x+1} = x$. 7) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}$, $y(1)=4$. 8) $2y'' + 2y' + y = 0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.
Варіант 15 1) $y' = \ln x$. 2) $\sqrt{5+y^2} + yy'\sqrt{1-x^2} = 0$. 3) $(1-x)dy - ydx = 0$, $y(0)=1$. 4) $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8$. 5) $y^2 + x^2 y' = xy y'$, $y(1)=1$. 6) $y' - \frac{y}{x+1} = e^x(x+1)$. 7) $y' + \frac{2}{x}y = x^3$, $y(1)=-\frac{5}{6}$. 8) $y'' + 49y = 0$, $y\left(\frac{\pi}{14}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{14}\right) = 2$.	Варіант 16 1) $y' = (x-2) \cdot \cos x$. 2) $6xdx - ydy = yx^2 dy - 3xy^2 dx$. 3) $y'(x^2 - 4) = 2xy$, $y(0)=0$. 4) $y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}$. 5) $xy' = y\left(1 + \ln \frac{y}{x}\right)$, $y(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}$. 6) $y' + y \operatorname{ctg} x = 3 \sin^4 x$. 7) $y' + \frac{y}{x} = 3x$, $y(1)=1$. 8) $9y'' + 25y = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
Варіант 17 1) $y' = \frac{x}{\sqrt{3-x^2}}$ 2) $y \ln y + xy' = 0$. 3) $\cos^2 x(1 + \operatorname{tg} x)y' = y$, $y(0)=3$. 4) $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$. 5) $(2x - y)y' = x + 2y$, $y(1)=0$. 6) $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^3 x$. 7) $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$, $y(1)=3$. 8) $y'' - 6y' + 13y = 0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.	Варіант 18 1) $y' = \frac{1}{1 + \sqrt{x}}$. 2) $(1 + e^x)y' = ye^x$. 3) $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$, $y(\pi)=0$. 4) $xy' = \frac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}$. 5) $xy' = y \ln \frac{y}{x}$, $y(1)=1$. 6) $y' + y \operatorname{ctg} x = \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}$. 7) $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$, $y(1)=1$. 8) $y'' + 4y = 0$, $y(0)=7$, $y'(0)=8$.
Варіант 19 1) $y' = x \cdot e^{x^2}$. 2) $\sqrt{1-x^2}y' + xy^2 + x = 0$. 3) $y' = y \cos x$, $y(0)=1$.	Варіант 20 1) $y' = \frac{1}{x^2 - 1}$. 2) $6xdx - 2ydy = 2yx^2 dy - 3xy^2 dx$.

4) $y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12$. 5) $y' = \frac{y}{x} - 1, y(1) = 0$. 6) $y' + \frac{2}{x}y = x^3$. 7) $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, y(1) = 1$. 8) $y'' - 6y' + 13y = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.	3) $y' - \frac{4xy}{x^2 - 1} = 0, y(\sqrt{2}) = 1$. 4) $xy' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}$. 5) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y, y(1) = 0$. 6) $y' - \frac{y}{x} = x \sin x$. 7) $y' + 2xy = -2x^3, y(1) = e^{-1}$. 8) $y'' + 4\pi^2 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2\pi$.
Варіант 21 1) $y' = x \cdot \sin x$. 2) $y(1 + \ln y) + xy' = 0$. 3) $dx - \sqrt{1 - x^2} dy = 0, y(1) = \frac{\pi}{2}$. 4) $xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y$. 5) $(x^2 + 6xy + y^2)dx = 4xydy, y(1) = 0$. 6) $y' - y \operatorname{ctg} x = \frac{\cos^2 x}{\sin x}$. 7) $y' + \frac{xy}{2(1-x)^2} = \frac{x}{2}, y(0) = \frac{2}{3}$. 8) $y'' + 4y' = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2$.	Варіант 22 1) $y' = \sin^3 x$. 2) $(3 + e^x)yy' = e^x$. 3) $y' \cos x = y \ln y, y(0) = e$. 4) $y' = \frac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}$. 5) $xy' = y + x \cos \frac{y}{x}, y(1) = \frac{\pi}{2}$. 6) $y' + xy = 4x$. 7) $y' + xy = -x^3, y(0) = 3$. 8) $5y'' - 6y' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2$.
Варіант 23 1) $y' = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$. 2) $\sqrt{3 + y^2} + \sqrt{1 - x^2} yy' = 0$. 3) $(2x^2 y - 3y)y' = 6x - 2x^2 y, y(1) = 0$. 4) $xy' = \frac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}$. 5) $xy' - y = x e^{\frac{y}{x}}, y(e) = 1$. 6) $y' - y \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} y$. 7) $y' - \frac{2}{x+1}y = e^x(x+1)^2, y(0) = 1$. 8) $y'' - 22y' + 121y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$.	Варіант 24 1) $y' = x \cdot \ln x$. 2) $x dx - y dy = yx^2 dy - xy^2 dx$. 3) $xy' - y^2 = y, y(2) = 1$. 4) $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$. 5) $xy' = y\left(1 + \ln \frac{y}{x}\right), y(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}$. 6) $y' - \frac{y}{x} = x \sin x$. 7) $y' + 2xy = x e^{-x^2} \sin x, y(0) = 1$. 8) $y'' + 4y' + 13y = 0, y(0) = y'(0) = 0$.

Варіант 25 1) $y' = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$. 2) $\sqrt{5+y^2}dx + 4(x^2y + y)dy = 0$. 3) $\cos^2 x(1 + \operatorname{tg} x)y' = y, \quad y(0) = 3$. 4) $4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5$. 5) $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}$. 6) $y' + \frac{y}{x} = 3x$. 7) $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, \quad y(0) = \frac{1}{2}$. 8) $7y'' + 6y' - y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2$.	Варіант 26 1) $y' = x \cdot \sin x^2$. 2) $(1 + e^x)yy' = e^x$. 3) $y' - \frac{4xy}{x^2 - 1} = 0, \quad y(\sqrt{2}) = 1$. 4) $xy' = \frac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}$. 5) $y' = \frac{y}{x} - 1, \quad y(1) = 0$. 6) $y' - \frac{2y}{x} = x^2$. 7) $y' - y \cos x = -\sin 2x, \quad y(0) = 3$. 8) $y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$.
Варіант 27 1) $y' = \frac{1}{x^2 - 4}$. 2) $3(x^2y + y)dy + \sqrt{2+y^2}dx = 0$. 3) $2y' \cdot \sqrt{x} = y, \quad y(4) = 1$. 4) $y' = \frac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}$. 5) $(x^2 + 6xy + y^2)dx = 4xydy, \quad y(1) = 0$. 6) $y' = 2xy + x^3$. 7) $y' - 4xy = -4x^3, \quad y(0) = -\frac{1}{2}$. 8) $y'' - 6y' + 13y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.	Варіант 28 1) $y' = \cos^2 x$. 2) $2xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx$. 3) $y'(x^2 - 4) = 2xy, \quad y(0) = 0$. 4) $xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y$. 5) $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8, \quad y(1) = 1$. 6) $y' - y \operatorname{ctg} x = \frac{\cos^2 x}{\sin x}$. 7) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1$. 8) $y'' + 4y' = 0, \quad y(0) = 7, \quad y'(0) = 8$.
Варіант 29 1) $y' = x^2 \cdot e^x$. 2) $2x + 2xy^2 + \sqrt{2-x^2}y' = 0$. 3) $(2x^2y - 3y)y' = 6x - 2x^2y, \quad y(1) = 0$. 4) $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 10$. 5) $xy' = y\left(1 + \ln \frac{y}{x}\right), \quad y(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}$. 6) $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^3 x$.	Варіант 30 1) $y' = \operatorname{ctg} 3x$ 2) $20xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 5xy^2dx$. 3) $y' \cos x = y \ln y, \quad y(0) = e$. 4) $y' = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}$. 5) $xy' - y = xe^{\frac{y}{x}}, \quad y(e) = 1$. 6) $y' + \frac{2}{x}y = x^3$.

7) $y' - y \cos x = \sin 2x$, $y(0) = -1$.	7) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}$, $y(1) = 1$.
8) $y'' - 2y' + 3y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.	8) $y'' + 4y' + 13y = 0$, $y(0) = y'(0) = 0$.

ТЕМА 8. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТІ

Теорія ймовірностей – математична наука, яка вивчає закономірності випадкових явищ. Одним із основних понять теорії ймовірностей є поняття випадкової події.

Забезпечення певного комплексу умов називають *випробуванням* або *дослідом*, а можливий результат випробування *подією*. Наприклад, підкидання монети є випробуванням, а випадання «герба» або «решка» – подіями. Події позначаються, як правило, великими латинськими літерами: A, B, C...

Подія U називається *вірогідною*, якщо при здійсненні визначеного набору умов вона завжди відбудеться. Подія V називається *неможливою*, якщо при здійсненні визначеного набору умов вона ніколи не відбудеться. Подію називають *випадковою*, якщо при здійсненні визначеного набору умов вона може відбутися, а може не відбутися в даному випробуванні.

Наприклад, кубик підкидається 1 раз, то:

- а) випадання числа очок не більшого 6 – достовірна подія;
- б) випадання числа очок більшого 6 – неможлива подія.

Дві події називають *рівноможливими*, якщо ні одна з них не є більш можливою ніж інша.

Дві події називають *сумісними*, якщо поява однієї з них не виключає появи іншої в одному й тому самому випробуванні. Дві події називають *несумісними*, якщо вони не можуть відбутися одночасно в одному й тому самому випробуванні. Наприклад, при одному підкиданні монети не можуть одночасно з'явитись герб і решка. Попарно несумісні випадкові події $A_1, A_2, \dots, A_n$ утворюють *повну групу подій*, якщо внаслідок випробування одна з них обов'язково відбудеться. Наприклад, події «виграш», «програш» і «нічия» (для певного гравця) утворюють повну групу подій у випробуванні – грі в шахи двох суперників.

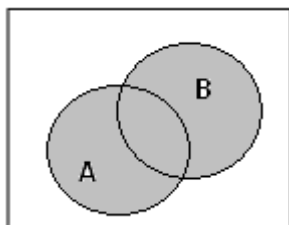
Елементарними подіями (наслідками) у певному випробуванні називають усі можливі результати цього випробування, які не можна розкласти на простіші. Множину всіх можливих елементарних подій ω називають *простором елементарних подій* (або *універсальною подією*), позначають Ω . Наприклад, гральний кубик підкидають один раз. Елементарні події: ω_1 – випаде 1, ω_2 – 2, ω_3 – 3, ω_4 – 4, ω_5 – 5, ω_6 – 6. Простір елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

Елементарні події, при появі яких відбувається певна подія, називають *сприятливими* для цієї події.

Сумою двох випадкових подій A і B називають таку подію, яка полягає в появі хоча б однієї з подій A або B , і позначають $A+B$ або $A \cup B$ (рис. 1.1).

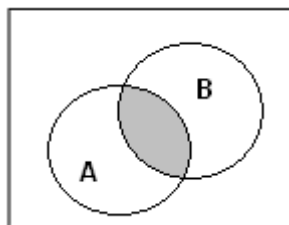
Добутком двох випадкових подій A і B називають таку подію, яка полягає в сумісній появі подій A і B , і позначають $A \cdot B$ або $A \cap B$ (рис. 1.2).

Різницею двох випадкових подій A і B називають подію, яка полягає в тому, що відбувається подія A і не відбувається подія B , і позначають $A-B$ або $A \setminus B$ (рис. 1.3).



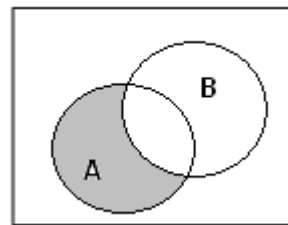
$$C = A \cup B$$

Рис. 1.1



$$C = A \cap B$$

Рис. 1.2



$$C = A \setminus B$$

Рис. 1.3

Подію $\bar{A}$ називають *протилежною* до події A в даному випробуванні, якщо вона відбувається тоді, коли не відбувається подія A , тобто $\bar{A} = \Omega - A$. Очевидно, що протилежні події несумісні та утворюють повну групу подій.

Для додавання та множення подій виконуються закони:

1. $A+B=B+A$, $AB=BA$ – комутативний;
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$, $(AB)C=A(BC)$ – асоціативний;
3. $(A+B)C=AC+BC$ – дистрибутивний.

Множина S є *алгеброю подій*, коли

1. $U \in S$ (алгебра подій містить вірогідну подію);
2. Якщо $A \in S, B \in S$, то $A+B \in S$, $AB \in S$, $A \setminus B$.

При обчисленні ймовірностей подій досить часто потрібно підраховувати кількість елементарних подій (сприятливих деякій події або всіх можливих подій). Здебільшого це зумовлює великі складнощі, подолати які допомагає комбінаторика. Вона вивчає способи підрахунку кількості розміщень, перестановок, сполучень.

Нагадаємо, що $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, причому $0! = 1$.

Правило добутку. Нехай із деякої скінченної множини

1-й об'єкт можна вибрати k_1 способами,

2-й об'єкт – k_2 способами,

.....

n -й об'єкт – k_n способами.

Тоді довільний набір, перерахованих об'єктів, із даної множини можна вибрати $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$ способами.

Приклад. Скільки існує тризначних чисел з різними цифрами?

Розв'язання. В десятковій системі числення десять цифр: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. На першому місці може стояти будь-яка з 9 цифр, крім нуля.

На другому – будь-яка цифра з тих, що залишилися 9 цифр, крім вибраної. На останньому місці – будь-яка цифра із 8 цифр, що залишилися.

За правилом добутку, $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ тризначних чисел мають різні цифри.

Правило суми. При виконанні умов (1), будь-який із об'єктів можна вибрати $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ способами.

Приклад. Скільки існує способів вибору одного олівця з коробки, яка містить 4 червоних, 6 синіх, 5 зелених олівців.

Розв'язання. Один олівець за правилом суми, можна вибрати $4+6+5=15$ способами.

Зазвичай у комбінаториці розглядають експеримент з вибору навмання k елементів з n . При цьому елементи:

- а) не повертаються назад (схема вибору без повернення);
- б) повертаються назад (схема вибору з поверненням).

I. Схема вибору без повернення

Розміщеннями із n елементів по k називають множини із m елементів, вибраних із n елементів, які можуть розрізнятися між собою як складом елементів, так і їх порядком. Визначають формулою

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Приклад. В змаганнях приймає участь 10 чоловік, троє з них займуть 1, 2, 3 місце. Скільки існує різних варіантів?

Розв'язання. Число різноманітних варіантів дорівнює

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720.$$

Перестановками із n елементів називають множини із n елементів, що відрізняються лише їх порядком. Визначають за формулою

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!.$$

Приклад. Скількома способами можна розставити 5 книг на полиці?

Розв'язання. Кількість способів дорівнює числу перестановок з п'яти елементів, тобто

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Сполученнями із n елементів по k називають множини із m елементів, вибраних із n елементів, які розрізняються між собою тільки складом елементів. Визначають формулою

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Приклад. У турнірі брали участь 10 шахістів, і кожні 2 шахісти зустрічались один раз. Скільки партій було зіграно в турнірі?

Розв'язання. Партій було зіграно стільки, скільки можна взяти неупорядкованих 2-елементарних підмножин з 10-елементної множини, тобто

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2! \cdot (10-2)!} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 8!} = \frac{50}{2} = 45.$$

II. Схема вибору з поверненням

Якщо при виборі k елементів з n – елементи повертаються назад і упорядковуються, то говорять, що це *розміщення з поверненням*.

$$\overline{A}_n^k = n^k.$$

Приклад. В готелі 8 кімнат, кожна з яких може розмістити 3 чоловіки. Скільки існує варіантів розміщення трьох гостей, що прибули?

Розв'язання. Кожен наступний гість із 3 може бути поміщений у будь-яку із 8 кімнат, тому число розміщень з поверненням, за формулою розміщення з поверненням, дорівнює

$$\overline{A}_8^3 = 8^3 = 512.$$

Якщо при виборі k елементів з n елементи повертаються назад без упорядкування, то говорять, що це *сполучення з повторенням*. Число сполучень з повторенням із n елементів по k визначається за формулою

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

Приклад. В магазині продають 10 видів тортів. Покупець вибав чек на три торти. Вважаючи, що будь-який набір рівноможливий, визначити число можливих заказів.

Розв'язання. Число рівноможливих заказів дорівнює

$$C_{10+3-1}^3 = C_{12}^3 = \frac{12!}{(12-3)! \cdot 3!} = \frac{9! \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{9! \cdot 3!} = 220.$$

Нехай маємо n елементів, причому елемент a_1 повторюється n_1 раз, елемент a_2 – n_2 раз, ..., a_k – n_k раз; $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Тоді елементи a_1 можна переставити $P_{n_1} = (n_1)!$ способами, елементи a_2 – $P_{n_2} = (n_2)!$, ..., елементи a_k – $P_{n_k} = (n_k)!$

Тобто число перестановок з повтореннями менше числа перестановок без повторень в $n_1!n_2!\dots n_k!$ раз. Число перестановок з повтореннями з n елементів

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}.$$

Приклад. Скільки різних слів (які містять 4 букви) можна утворити із букв слова «МАМА»?

Розв'язання. В даному випадку відома формула числа перестановок безсильна, так як елементи в перестановках повторюються (при перестановці букв А і А або М і М ніяких змін не відбувається).

Маємо, $n=4$, $n_1=2$, $n_2=2$, тому можна утворити $P_4(2,2) = \frac{4!}{2!2!} = 6$ різних слів.

Класичне означення ймовірності

Нехай події $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_n \in S$ утворюють множину елементарних подій. Тоді події із (3.1), які призводять до настання події A , називаються сприятливими наслідками для події A , $m(A)$ – кількість сприятливих наслідків.

Ймовірність події A дорівнює відношенню кількості елементарних наслідків, сприятливих цій події, до кількості всіх рівно можливих елементарних наслідків у даному випробуванні.

Імовірність події A позначають $P(A)$, тому за означенням $P(A) = \frac{m}{n}$, де m – кількість елементарних наслідків, сприятливих події A ; n – кількість усіх елементарних наслідків у даному випробуванні.

З класичного означення ймовірності випливають властивості ймовірності

$$1. 0 \leq P(A) \leq 1.$$

$$2. P(\Omega) = 1.$$

$$3. P(\bar{\Omega}) = 0$$

$A + \bar{A} = \Omega$ – достовірна подія, тому

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \text{ або } P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Приклад. В ящику 15 деталей, серед яких 10 пофарбовані. Робітник навмання бере 3 деталі. Знайти ймовірність того, що деталі пофарбовані.

Розв'язання. Подія A – 3 деталі пофарбовані.

$$m(A) = C_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!3!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 120 \text{ – число сприятливих подій.}$$

$$n = C_{15}^3 = \frac{15!}{(15-3)!3!} = \frac{12! \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{12! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 455 \text{ – загальне число всіх можливих}$$

наслідків.

Маємо

$$P(A) = \frac{m(A)}{n} = \frac{120}{455} = \frac{24}{91}.$$

Приклад. В групі 12 студентів, 8 з яких відмінники. По списку відбирають 9 студентів. Знайти ймовірність того, що відберуть 5 відмінників.

Розв'язання. Подія A – відібрали 5 відмінників.

$$m(A) = C_8^5 \cdot C_4^4 = \frac{8!}{(8-5)!5!} \cdot 1 = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5!} = 56,$$

де C_8^5 – число можливих наборів із 8 відмінників по 5;

C_4^4 – число можливих наборів по 4 із інших студентів.

n – загальне число способів вибору 12 студентів із 9 дорівнює

$$n = C_{12}^9 = \frac{12!}{(12-9)!9!} = \frac{9! \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 9!} = 220.$$

$$P(A) = \frac{m(A)}{n} = \frac{56}{220} = \frac{14}{55}.$$

Геометричне означення ймовірності

Нехай множина всіх елементарних наслідків випробування нескінченна і утворює деяку множину Ω , усі елементарні наслідки рівноможливі. Причому події A сприяють на ті елементарні події, які утворюють множину $A \subseteq \Omega$. Тоді ймовірність події A дорівнює відношенню міри множини A до міри множини Ω , тобто

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

Мірою множини на прямій, площині, у просторі є відповідно довжина, площа, об'єм геометричної фігури, яку утворює ця множина.

Приклад. Два дійсних числа випадковим чином вибираються з інтервалу $[0;5]$. Яка ймовірність того, що:

- а) сума двох чисел менша 4;
- б) добуток двох чисел більший 5;
- в) різниця двох чисел менша 2, а їх добуток більший 3.

Розв'язання. Позначимо через x перше число, вибране випадковим чином з інтервалу $[0;5]$, а через y – друге число. Тоді $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 5$. Внаслідок нескінченної кількості таких дійсних чисел треба скористатися означенням геометричної ймовірності. У цьому разі множиною всіх можливих наслідків випробування є квадрат (рис. 2.2-2.4) зі стороною 5, площа якого дорівнює 25, тобто

$$m(\Omega) = 25.$$

а) Нехай подія $A = \{\text{сума двох чисел менша 4}\}$. Тоді маємо $A = \{(x,y): x+y < 4\}$, або $A = \{y < 4-x\}$. Отже, елементарні наслідки випробування, що сприяють події A , утворюють фігуру (зафарбовану на рис. 2.2), площа якої

$$m(A) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8.$$

Застосовуючи формулу для геометричної ймовірності, отримуємо

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{8}{25}.$$

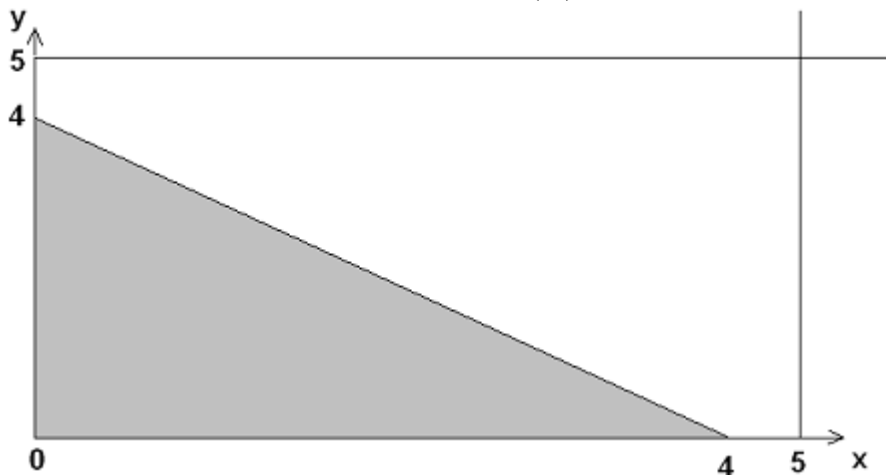


Рис. 3.1

б) Нехай подія $B = \{\text{добуток двох чисел більше } 5\}$. Тоді $B = \{(x;y): xy > 5\}$, або $B = \{(x;y): y > 5/x\}$.

Множині всіх наслідків, що сприяють події B , відповідає фігура ABC (зафарбована на рис. 2.3), де лінія AC – графік функції $y=5/x$. Обчислимо площу цієї фігури за допомогою визначеного інтеграла:

$$m(B) = \int_1^5 \left(5 - \frac{5}{x}\right) dx = (5x - 5 \ln x) \Big|_1^5 = 20 - 5 \ln 5.$$

Отже,

$$P(B) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{20 - 5 \ln 5}{25} \approx 0,478.$$

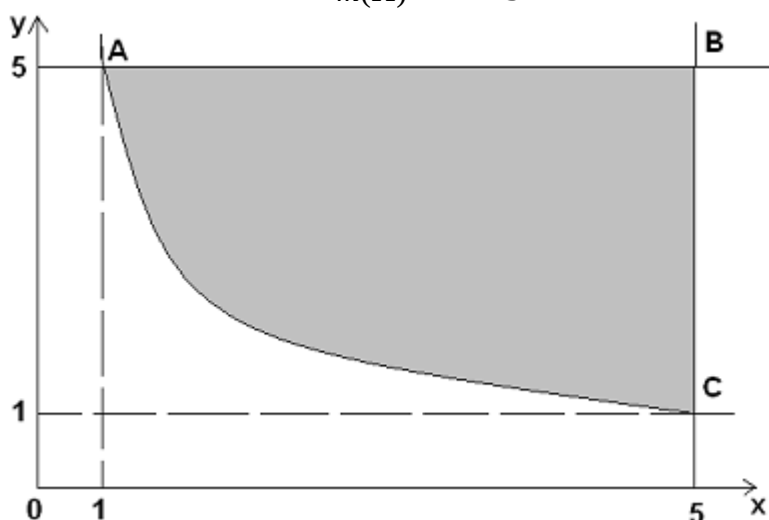


Рис. 3.2

в) Нехай подія $C = \{\text{різниця двох чисел менша 2, а їх добуток більший 3}\}$, тоді

$C = \{(x,y): |x - y| < 2, xy > 3\}$, звідки отримуємо нерівності

$$y < x + 2, \quad y > x - 2, \quad y > \frac{x}{3}.$$

Множина точок, координати яких задовольняють зазначені нерівності, утворює фігуру $ABCDE$ (рис. 2.4). Пряма AE задається рівнянням $y=x+2$, CD – рівнянням $y=x-2$, а лінія $MEDN$ – графіком функції $y = \frac{3}{x}$. Абсциса точки M визначається з рівності $\frac{3}{x} = 5$, тобто $x = \frac{3}{5}$. Ордината точки N визначається з рівності $y = \frac{3}{5}$. Абсцису точки E як точки перетину двох ліній $y = \frac{3}{x}$ і $y=x+2$ визначаємо з рівняння $x+2 = \frac{3}{x}$, звідки $x=1$. Аналогічно визначаємо абсцису точки D як точки перетину двох ліній $y=x-2$ і $y = \frac{3}{x}$, тобто $x=3$.

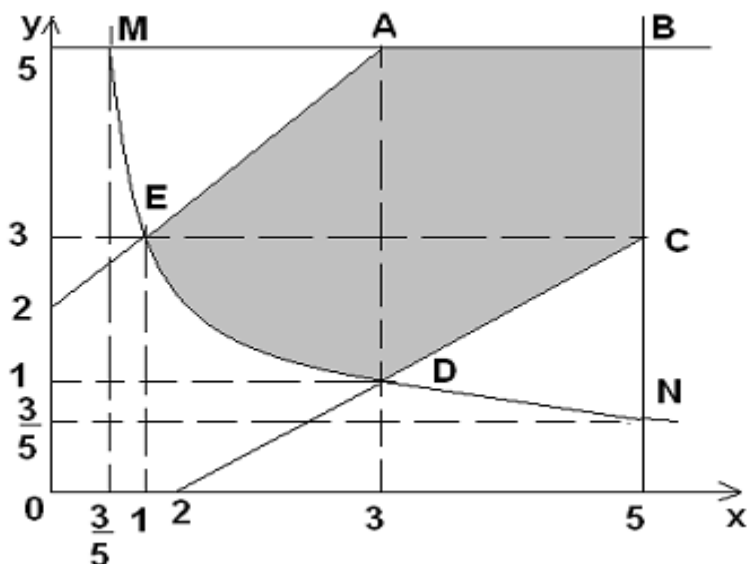


Рис. 3.3

Для визначення ймовірності події C обчислимо площу області ABCDE.

Очевидно, що

$$S_{ABCDE} = S_{MBN} - S_{MAE} - S_{CND} = S_{MBN} - 2S_{CND}, \quad \text{оскільки} \quad S_{MAE} = S_{CND}. \quad \text{Тоді}$$

$$S_{MBN} = \int_{\frac{3}{5}}^5 \left(5 - \frac{3}{x}\right) dx = 22 + 3 \ln 3 - 6 \ln 5; \quad S_{CND} = \int_3^5 \left(x - 2 - \frac{3}{x}\right) dx = 4 + 3 \ln 3 - 3 \ln 5. \quad \text{Отже,}$$

$$m(C) = 22 + 3 \ln 3 - 6 \ln 5 - 8 - 6 \ln 3 + 6 \ln 5 = 14 - 3 \ln 3, \quad \text{а} \quad P(C) = \frac{14 - 3 \ln 3}{25} \approx 0.428.$$

Статистичне означення ймовірності

Оскільки класичне означення ймовірності передбачає, що всі елементарні наслідки випробування рівноможливі, що важко обґрунтувати, то розглядають ще й *статистичне означення ймовірності*.

Відносною частотою події A називають відношення кількості випробувань, у яких подія A відбулася, до кількості всіх проведених випробувань. Відносну частоту події A позначають $W(A)$. Тоді $W(A) = \frac{m}{n}$, де m – кількість випробувань, у яких відбулася подія A; n – кількість усіх проведених випробувань.

Число, навколо якого групуються значення частоти події A при великій кількості випробувань, називають ймовірністю події A: $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} W(A)$.

Приклад. При перевірці готової продукції було виявлено 5 бракованих одиниць товару з 200 перевірених. Знайти відносну частоту бракованих одиниць товару.

Розв'язання. Нехай подія A полягає у тому, що виявлено браковану одиницю товару. Тоді відносна частота події A

$$W(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{200} = 0,025.$$

ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Теорема 1. Ймовірність суми двох несумісних подій A і B дорівнює сумі їх ймовірностей

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Наслідок 1. Якщо $A_1, A_2, \dots, A_n$ – попарно несумісні, то ймовірність їх суми дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Наслідок 2. Ймовірність суми попарно несумісних подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, які утворюють повну групу, дорівнює 1, тобто

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

Наслідок 3. Події A і $\bar{A}$ несумісні та утворюють повну групу подій, тому

$$P\left(A + \bar{A}\right) = P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Звідси

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Теорема 2. Ймовірність суми двох сумісних подій A і B дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їхнього добутку:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Введемо поняття залежних і незалежних подій.

Випадкові події A і B називають *залежними*, якщо ймовірність появи однієї з них залежить від появи або не появи іншої. В іншому випадку події A та B називаються *незалежними*.

Теорема 3. Ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку їх ймовірностей

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Наслідок. Ймовірність добутку n незалежних подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ дорівнює добутку їх ймовірностей:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

Умовною ймовірністю події B за умови, що подія A вже відбулась, називається число $\frac{P(A \cdot B)}{P(A)}$, яке позначається

$$\frac{P(A \cdot B)}{P(A)} = P(B / A) = P_A(B).$$

Теорема 4. Ймовірність добутку двох залежних подій A і B дорівнює добутку ймовірності однієї з цих подій на умовну ймовірність іншої події за умови, що перша подія відбулася, тобто

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B / A) = P(B) \cdot P(A / B).$$

Наслідок

Якщо події A і B незалежні, то з теореми 4 слідує теорема 3.

Теорема 5. Ймовірність добутку n залежних подій $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ дорівнює добутку послідовних умовних ймовірностей

$$P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_{n-1} \cdot \bar{A}_n) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2 / \bar{A}_1) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n / \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_{n-1}).$$

Теорема 6. Ймовірність появи хоча б однієї з подій $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ дорівнює різниці між одиницею і ймовірністю добутку заперечень подій $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$

$$P(A) = 1 - P\left(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_n\right) = 1 - P\left(\bar{A}_1\right) \cdot P\left(\bar{A}_2 / \bar{A}_1\right) \cdot \dots \cdot P\left(\bar{A}_n / \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_{n-1}\right).$$

Наслідок. Ймовірність появи хоча б однієї з подій $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ незалежних у сукупності, дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних подій:

$$P(A) = 1 - P\left(\bar{A}_1\right) \cdot P\left(\bar{A}_2\right) \cdot \dots \cdot P\left(\bar{A}_n\right).$$

Приклад. З 200 студентів 1-го курсу 120 вивчають англійську мову, 100 – німецьку, 60 – обидві мови. Знайти ймовірність, що довільно взятий студент вивчає або англійську, або німецьку мову.

Розв'язання. A – студент вивчає англійську;

B – студент вивчає німецьку.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{120}{200} + \frac{100}{200} - \frac{60}{200} = 0,8.$$

Приклад. У першій урні міститься 7 білих і 3 чорних кульки; у другій – 5 білих і 5 чорних кульок; у третій – 4 білих і 6 чорних. З кожної урни навмання виймають по одній кульці. Знайти ймовірність того, що серед вибраних кульок виявиться:

а) лише одна біла кулька (подія C);

б) дві білі кульки (подія D);

в) три білі кульки (подія E);

г) хоча б одна біла кулька (подія F).

Розв'язання. Нехай подія $A_1 = \{\text{вийняли білу кульку з першої урни}\}$, $A_2 = \{\text{вийняли білу кульку з другої урни}\}$, $A_3 = \{\text{вийняли білу кульку з третьої урни}\}$. Тоді $P(A_1) = \frac{7}{10} = 0.7$, $P(A_2) = \frac{5}{10} = 0.5$, $P(A_3) = \frac{4}{10} = 0.4$. Події A_1, A_2, A_3 – незалежні.

а) Складні події $A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$, $\bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3$, $\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3$ – попарно несумісні. Скористуємось формулами (4.7),(4.8).

$$P(C)=P(A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3)=P(A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3)+P(\bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3)+P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3)=0.7 \cdot (1-0.5) \cdot (1-0.4) + (1-0.7) \cdot 0.5 \cdot (1-0.4) + (1-0.7) \cdot (1-0.5) \cdot 0.4=0.36;$$

$$\text{б) } P(D)=P(A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3)=0.7 \cdot 0.5 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.5 \cdot 0.4 + 0.7 \cdot 0.5 \cdot 0.4=0.41;$$

$$\text{в) } P(E)=P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)=0.7 \cdot 0.5 \cdot 0.4=0.14;$$

$$\text{г) } P(F)=1-P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3)=1-0.9=0.91.$$

Приклад. В урні 10 куль, з яких 2 білого кольору, а решта чорного. Навмання взято 2 кулі. Знайти ймовірність, що обидві кулі чорного кольору.

Розв'язання. Нехай елементарні події: A_1 – перша куля чорна. A_2 – друга куля чорна. Тоді подія $A = A_1 \cdot A_2$ – обидві кулі чорні. Ймовірність того, що друга куля чорна, буде залежати від того якого кольору перша куля. Якщо перша куля чорна, то ймовірність того, що друга куля також чорна, дорівнює умовній ймовірності події A_2 при умові, що подія A_1 вже відбулася:

$$P(A_2 / A_1) = \frac{7}{9},$$

так як після появи події A_1 – всього куль залишається 9, з них 7 чорних. Звідси

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{28}{45}.$$

Індивідуальне завдання №8

«Підрахунок ймовірності за класичним означенням»

1. На шести однакових картках написані букви К, Л, О, С, Т. Картки перемішують і розкладають у ряд навмання. Яка ймовірність того, що можна буде прочитати слово «СКЛО»?
2. Підкидають два гральних кубики. Знайти ймовірність того, що сума очок на гранях, які випали, не більше десяти.
3. У партії з 50 виробів шість мають дефекти. Довільно вибирають 6 виробів. Підрахувати ймовірність того, що серед цих шести виробів 2 мають дефекти.
4. У ящику 6 білих та 8 чорних куль. З ящика виймають 2 кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кулі білі.
5. На шести однакових картках написані букви А, В, К, Н, І, С. картки перемішують та розкладають у ряд навмання. Яка ймовірність того, що ми одержимо слово «ВІСК»?
6. Підкидають два гральних кубики. Знайти ймовірність того, що сума очок на гранях, які випали, більше шести.

7. У ящику 15 деталей, 10 з них пофарбовані. Робітник навмання виймає 3 деталі. Знайти ймовірність того, що серед вийнятих деталей буде: а) дві пофарбовані; б) принаймні одна пофарбована; в) всі три пофарбовані.
8. В одній урні містяться 4 білих і 8 чорних куль, а в другій – 3 білих і 9 чорних. З кожної урни вийняли по одній кулі. Обчислити ймовірність того, що обидві кулі білі.
9. Набираючи номер телефону, абонент забув дві останні цифри і, пам'ятаючи лише, що ці цифри різні, набрав їх навмання. Яка ймовірність того, що номер набрано правильно?
10. Двічі підкидають гральний кубик. Яка ймовірність того, що сума очок при обох підкиданнях виявиться більше шести?
11. У мішку 5 однакових кубиків. На кожній грані кубика написана одна літера О, П, Р, С, Т. Знайти ймовірність того, що на вийнятих по одному і розташованих у лінію кубиках можна буде прочитати слово «СПОРТ».
12. У лотереї розігрується 100 білетів. Виграш випадає на 10 білетів. Куплено три білети. Яка ймовірність того, що принаймні один з них виграє?
13. В групі 25 студентів, з них 8 відмінників. По списку навмання відібрали 7 студентів. Знайти ймовірність того, що серед відібраних три відмінники.
14. З п'яти карток з буквами А, Б, В, Г, Д навмання одна за одною вибирають три і розкладають у ряд. Яка ймовірність того, що одержать слово «ДВА»?
15. Підкидають три гральних кубики. Знайти ймовірність того, що сума очок на гранях, які випали, дорівнює шістнадцяти.
16. У цеху працюють 6 чоловіків і 4 жінки. Навмання відбирають 7 робітників. Знайти ймовірність того, що серед відібраних буде 3 жінки.
17. Дитина грається з чотирма літерами розрізної азбуки: А, А, М, М. яка ймовірність того, що, випадково розкладаючи літери в ряд, вона одержить слово «МАМА»?
18. У партії 20 виробів, з них 5 мають дефект. Навмання вибирають три вироби. Знайти ймовірність того, що серед вибраних виробів виявиться принаймні один з дефектом.
19. Студент знає 20 з 25 питань програми. Обчислити ймовірність того, що студент знає запропоновані йому екзаменатором три питання.
20. З дев'яти карток з цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 вибирають навмання три. Яка ймовірність одержати число 327?
21. У підрозділі 60 солдат і 5 офіцерів. Варта складається з чотирьох осіб. Яка ймовірність події: варту призначено з трьох солдат та одного офіцера?
22. Маємо 10 троянд і 8 тюльпанів. З п'яти навмання взятих квіток збирають букет. Знайти ймовірність події: букет зібрано з двох троянд і трьох тюльпанів.

23. З шести карток з буквами А, Е, И, Л, Т, Р вибирають по одній чотири. Знайти ймовірність події: одержано слово «ТИРЕ».
24. У ящику 6 білих та 8 чорних куль. З ящика виймають 2 кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кулі білі.
25. У ящику міститься 15 тенісних м'ячів, серед них 9 нових. Навмання беруть 4 м'ячі. Яка ймовірність того, що серед них виявиться три нових м'ячі.
26. Серед 11 лотерейних квитків 8 виграшних. Навмання взято 4 квитки. Обчислити ймовірність того, що серед них 3 виграшних.
27. Двічі підкидають гральний кубик. Яка ймовірність того, що сума очок при обох підкиданнях виявиться більше дев'яти?
28. У мішку 5 однакових кубиків. На кожній грані кубика написана одна літера О, П, Р, С, Т. Знайти ймовірність того, що на вийнятих по одному і розташованих у лінію кубиках можна буде прочитати слово «СПОРТ».
29. У лотереї розігрується 100 білетів. Виграш випадає на 10 білетів. Куплено 4 білети. Яка ймовірність того, що принаймні один з них виграє?
30. В групі 25 студентів, з них 6 відмінників. По списку навмання відібрали 7 студентів. Знайти ймовірність того, що серед відібраних три відмінники.

Індивідуальне завдання № 9

«Теорема додавання та множення ймовірностей»

1. Три стрільці зробили по одному пострілу. Імовірність влучання кожного з них дорівнює відповідно 0,3; 0,4; 0,6. Знайти ймовірність того, що буде лише одне влучання в мішень.
2. В одній урні міститься 4 білих і 8 чорних куль, а в другій – 3 білих і 9 чорних. З кожної урни вийняли по одній кулі. Обчислити ймовірність того, що обидві кулі виявляться білими.
3. Імовірність влучання в мішень при одному пострілі першим стрільцем дорівнює 0,8, а другим – 0,9. Знайти ймовірність того, що лише один стрілець влучить у мішень.
4. Два стрільці зробили по одному пострілу. Ймовірність влучання в мішень першим стрільцем дорівнює 0,6, а другим 0,8. Знайти ймовірність того, що принаймні один стрілець влучить у мішень.
5. Два стрільці зробили по одному пострілу по мішені. Ймовірність влучання в мішень кожним із стрільців дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що обидва стрільці промахнулись.
6. Три баскетболісти повинні зробити по одному кидку м'яча. Імовірність влучання м'яча в корзину для першого, другого та третього баскетболістів відповідно дорівнює 0,9; 0,8; 0,7. Знайти ймовірність того, що принаймні один баскетболіст вдало кине м'яч.

7. Два стрільці стріляють по мішені. Ймовірність влучення в мішень першим стрільцем становить 0,7, другим – 0,8. Знайти ймовірність того, що лише один стрілець влучить у мішень.
8. Із трьох гармат зробили залп по цілі. Ймовірність влучання в ціль при одному пострілі з першої гармати дорівнює 0,8, для другої і третьої гармат ці ймовірності відповідно дорівнюють 0,7 і 0,9. Знайти ймовірність того, що тільки один снаряд влучить у ціль.
9. Студент знає 50 з 60 питань програми. Знайти ймовірність того, що студент знає два питання із трьох, що містяться в його екзаменаційному білеті.
10. У двох урнах містяться білі і чорні кулі: у першій урні 5 білих і 7 чорних, у другій урні 3 білих і 10 чорних. Із кожної урни одночасно виймають по одній кулі. Знайти ймовірність того, що хоча б одна з вийнятих куль буде чорною.
11. Із трьох гармат зробили залп по цілі. Ймовірність влучання в ціль при одному пострілі з першої гармати дорівнює 0,8, для другої і третьої гармат ці ймовірності відповідно дорівнюють 0,7 і 0,4. Знайти ймовірність того, що тільки два снаряди влучить в ціль.
12. Студент знає 30 питань з 50. Знайти ймовірність того, що він відповість хоча б на одне питання з чотирьох.
13. Ймовірність того, що студент складе перший іспит становить 0,4, другий – 0,9, третій – 0,7. Знайти ймовірність того, що принаймні два іспити буде здано.
14. Два мисливці стріляють у вовка, причому кожен робить один постріл. Для першого мисливця ймовірність влучання в ціль становить 0,7, для другого 0,6. Яка ймовірність влучання у вовка принаймні одного мисливця.
15. Експедиція видавництва відправила газети в три поштових відділення. Ймовірність своєчасної доставки до 1-го відділення дорівнює 0,95, до 2-го відділення – 0,9, до 3-го відділення – 0,8. Знайти ймовірність того, що тільки одне відділення отримає газети своєчасно.
16. У колоді 36 карт. Навмання виймають одну. Яка ймовірність того, що буде вийнята бубнова або дама?
17. Маємо два однакові ящики з кулями. У першому ящику міститься 2 білі і одна чорна куля, у другому – 1 біла та 4 чорних. Довільно обирають один ящик і виймають кулю. Знайти ймовірність того, що вийнята куля виявиться білою.
18. Два стрільці стріляють по мішені. Ймовірність влучення в мішень першим стрільцем становить 0,6, другим – 0,8. Знайти ймовірність того, що хоча б один стрілець влучить у мішень.
19. Два стрільці зробили по одному пострілу по мішені. Ймовірність влучання в мішень кожним із стрільців дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що тільки один стрілець влучить у мішень.

20. Із трьох гармат зробили залп по цілі. Ймовірність влучання в ціль при одному пострілі з першої гармати дорівнює 0,8, для другої і третьої гармат ці ймовірності відповідно дорівнюють 0,7 і 0,4. Знайти ймовірність того, що хоча б один снаряд влучить у ціль.
21. У першій урні містяться 3 білих і 1 чорна куля, у другій 6 білих і 4 чорних, у третій – 8 білих та одна чорна. З навімання вибраної урни виймають кулю. Яка ймовірність того, що вийнята біла куля.
22. Зроблено три постріли. Імовірність влучання при першому дорівнює 0,3, при другому – 0,5, при третьому – 0,7. Знайти ймовірність принаймні одного промаху.
23. Мисливці Олександр, Віктор і Павло влучають у качку, що летить, з ймовірностями відповідно $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$. Усі одночасно роблять постріл. Яка ймовірність того, що качку буде вбито?
24. Два стрільці стріляють по мішені. Ймовірність влучення в мішень першим стрільцем становить 0,4, другим – 0,6. Знайти ймовірність того, що обоє промахнуться.
25. Три стрільці зробили по одному пострілу. Імовірність влучання кожного з них дорівнює відповідно 0,5; 0,2; 0,7. Знайти ймовірність того, що буде лише два влучання в мішень.
26. Два стрільці стріляють по мішені. Ймовірність влучення в мішень першим стрільцем становить 0,75, другим – 0,85. Знайти ймовірність того, що хоча б один стрілець влучить у мішень.
27. Із трьох гармат зробили залп по цілі. Ймовірність влучання в ціль при одному пострілі з першої гармати дорівнює 0,7, для другої і третьої гармат ці ймовірності відповідно дорівнюють 0,7 і 0,5. Знайти ймовірність того, що хоча б один снаряд влучить у ціль.
28. У першій урні містяться 6 білих і 1 чорна куля, у другій 6 білих і 4 чорних, у третій – 8 білих та одна чорна. З навімання вибраної урни виймають кулю. Яка ймовірність того, що вийнята біла куля.
29. Зроблено три постріли. Імовірність влучання при першому дорівнює 0,4, при другому – 0,6, при третьому – 0,7. Знайти ймовірність принаймні одного промаху.
30. Три стрільці зробили по одному пострілу. Імовірність влучання кожного з них дорівнює відповідно 0,3; 0,2; 0,8. Знайти ймовірність того, що буде лише два влучання в мішень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление, т.1, 2. М.: Наука, 1982.
2. Кудрявцева В.А., Демидович В.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1969.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1,2. – М.: Высш. шк., 1980.
4. Берман Г.Е. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1977.
5. Бугір М.К. Математика для економістів: Посібник. – К.: Академія, 2003. – 520 с.
6. Высшая математика для экономистов: Учебник / Под ред. Н.Ш. Кремера. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ, 2003. – 471 с.
7. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1973.
8. Волощенко А. Б., Гетманцев В. Д., Кузубов В. И. Методические указания к решению задач с экономическим содержанием по разделу «Случайные события». – К.: КИНХ, 1979.
9. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 1977.
10. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. шк., 1975. – 332 с.
11. Методичні вказівки та індивідуальні завдання з курсу вищої математики (Розділ «Елементи теорії ймовірностей») / Укл.: Т.С. Науменко, І.В. Шапка. – Дніпропетровськ: ДВНЗ УДХТУ, 2016. – 32 с.
12. Методичні вказівки та завдання до контрольних робіт № 1 та № 2 з курсу «Вища математика» для студентів I курсу економічних спеціальностей заочної форми навчання / Укл.: О.А. Радуль. – Дніпропетровськ: ДВНЗ УДХТУ, 2010. – 68 с.
13. Методичні вказівки та індивідуальні завдання з курсу вищої математики за темою «Лінійна та векторна алгебра. Аналітична геометрія на площині та у просторі» для студентів економічних спеціальностей денної та заочної форм навчання / Укл.: Д.Г. Зеленцов, Н.Ю. Науменко, Л.І. Коротка, Т.Ю. Ускова, О.А. Радуль. – Дніпропетровськ: УДХТУ, 2007. – 45с.
14. Методичні вказівки до виконання індивідуальних завдань з дисципліни “Вища та прикладна математика” для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня *бакалавр* напрям підготовки 6.030601 «Менеджмент» спеціальність 7.0306010101 "Менеджмент організацій та адміністрування" / Укл.: Т.С. Науменко, І.В. Шапка. – Дніпропетровськ: ДВНЗ УДХТУ, 2016. – 37 с.