

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
„УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ХІМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ”

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ
З ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА МАТЕМАТИКА» ЗА РОЗДІЛОМ
«ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ»
ДЛЯ СТУДЕНТІВ УСІХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ ДЕННОЇ ТА ЗАОЧНОЇ
ФОРМ НАВЧАННЯ

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики
Протокол № 3 від 17.10.16

Дніпро ДВНЗ УДХТУ 2017

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Вища математика» за розділом «Диференціальне числення функції багатьох змінних» для студентів усіх спеціальностей денної та заочної форм навчання / Укл.: Т.О. Гранкіна, Л.О. Купріна, С.С. Насонова. – Дніпро: ДВНЗ УДХТУ, 2017. – 48 с.

Укладачі: Т.О. Гранкіна
Л.О. Купріна
С.С. Насонова, канд. техн. наук

Відповідальний за випуск В.І. Олевський, д-р техн. наук

Навчальне видання

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Вища математика» за розділом «Диференціальне числення функції багатьох змінних» для студентів усіх спеціальностей денної та заочної форм навчання

Укладачі: ГРАНКІНА Тетяна Олександрівна
КУПРІНА Лариса Олександрівна
НАСОНОВА Світлана Сергіївна

Технічний редактор Л.Я. Гоцуцова
Комп'ютерна верстка Л.Я. Гоцуцова

Підписано до друку 10.04.17. Формат 60×84/16. Папір ксерокс. Друк різнограф. Умов. друк. арк. 2,11. Обл.-вид. арк. 2,14. Тираж 100 прим. Зам. № 503. Свідоцтво ДК № 5026 від 16.12.2015.

ДВНЗ УДХТУ, 49005, Дніпро-5, просп. Гагаріна, 8.

Редакційно-видавничий відділ

ВСТУП

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Вища математика» за розділом «Диференціальне числення функції багатьох змінних» охоплюють навчальну програму з курсу вищої математики для студентів усіх спеціальностей денної та заочної форм навчання.

У методичних вказівках наведено теоретичний матеріал, який студенти повинні засвоїти при підготовці до практичних занять за розділом «Диференціальне числення функції багатьох змінних», а також розглянуто багато прикладів, які допоможуть студентам краще використовувати теоретичний матеріал.

У даній методичній розробці наведені також 12 індивідуальних завдань, кожне з яких містить 30 варіантів. Ці завдання можуть використовуватись як на практичних заняттях, так і в якості домашніх завдань. Вони допоможуть також при підготовці до тестування за практичним курсом, модульної контрольної роботи та екзамену.

1. ОЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

При вивченні багатьох процесів, які відбуваються у природі, доводиться мати справу з функціями двох і більше незалежних змінних.

Означення 1. Якщо кожній заданій парі $(x; y)$ значень двох, незалежних одна від одної, змінних величин x та y з деякої множини D відповідає одне певне значення величини z з множини E , то z називається функцією двох незалежних змінних x та y і позначається $z=f(x; y)$. Множина D називається областю визначення функції z , а множина E – областю її значень. Змінні x та y щодо функції z називаються її аргументами.

У загальному випадку область визначення функції z може подаватися деякою множиною точок $(x; y)$ площини xOy . В окремих випадках областю визначення може бути і вся площина xOy .

Означення 2. Якщо область визначення – це частина площини xOy , обмежена деякою лінією, то ця лінія називається межею області. Точки області, які не лежать на межі, називаються внутрішніми точками області. Область, яка складається тільки із внутрішніх точок, називається відкритою. Якщо область складається із внутрішніх точок та точок, які лежать на межі, то область називається замкненою.

Приклад 1. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Розв'язок:

Очевидно, що функція z визначена лише тоді, коли $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, тобто коли $x^2 + y^2 \leq 4$. Цю нерівність задовольняють координати тих точок площини xOy , що містяться всередині і на межі круга радіусом 2 і з центром на початку координат (рис. 1.1).

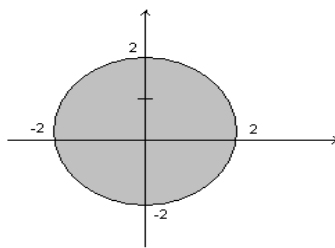


Рис. 1.1

Приклад 2. Знайти область визначення функції $z = \ln(y - x)$.

Розв'язок:

Відомо, що логарифм визначений тільки для додатних чисел. Тому повинна задовольнятися нерівність $y - x > 0$ або $x < y$. Це означає, що областю визначення функції z є половина площини xOy , розміщена над прямою $y=x$ і яка не містить у собі точок цієї прямої (рис. 1.2).

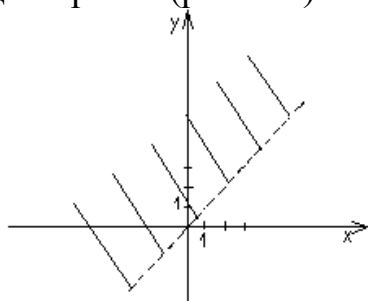


Рис. 1.2

Сама функція двох змінних може бути зображена у просторі у вигляді поверхні, що визначається рівнянням $z=f(x;y)$ – рівнянням поверхні.

Наприклад, поверхня, що визначається рівнянням $z = x^2 + y^2$ – параболоїд обертання (рис. 1.3).

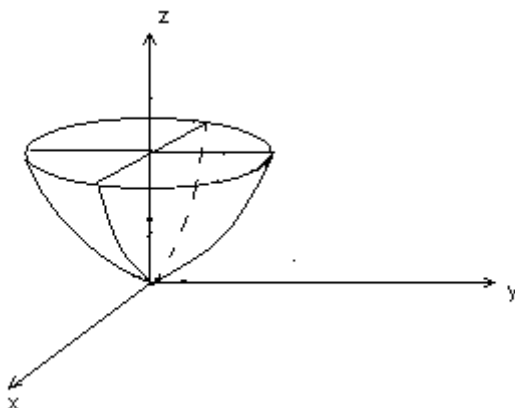


Рис. 1.3

В більшості випадків побудова поверхонь викликає великі складнощі. Тому часто обмежуються дослідженням ліній рівня функції $z=f(x;y)$. Лінія рівня – це множина точок $(x ; y)$ площини xOy , в яких функція набуває одного й того

ж значення, тобто лінії рівня визначаються рівнянням $f(x;y)=C$, де C – довільна стала.

Означення 3. Якщо кожній заданій сукупності $(x;y;z)$ значень трьох, незалежних одна від одної, змінних величин x, y, z з деякої множини D відповідає одне певне значення величини u з множини E , то u називається функцією трьох незалежних змінних x, y та z і позначається $u=f(x;y;z)$. Множина D називається областю визначення функції u , а множина E – областю її значень. Область D визначення функції трьох змінних x, y та z – це деяка множина точок $(x;y;z)$ простору $Oxyz$. Поверхня рівня функції $u=f(x;y;z)$ – це множина точок $(x;y;z)$ простору $Oxyz$, в яких вона набуває одного й того ж значення. Поверхні рівня визначаються рівнянням $f(x;y;z)=C$, де C – довільна стала.

Аналогічно можна ввести означення функції і більшого, ніж 3, числа змінних.

Надалі основна увага буде зосереджена на функціях двох змінних.

2. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Означення 4. Частинним приростом функції $z=f(x;y)$ по змінній x у точці $M(x;y)$ називається різниця

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y). \quad (2.1)$$

Означення 5. Частинним приростом функції $z=f(x;y)$ по змінній y у точці $M(x;y)$ називається різниця

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y). \quad (2.2)$$

Означення 6. Повним приростом функції $z=f(x;y)$ у точці $M(x;y)$ називається різниця

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y). \quad (2.3)$$

Означення 7. Окіл радіуса r точки $M_0(x_0;y_0)$ – це сукупність усіх точок $M(x;y)$, які задовольняють нерівність $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r$, тобто сукупність усіх внутрішніх точок, які лежать на полі круга радіуса r з центром у точці $M_0(x_0;y_0)$.

Нехай функція $z=f(x;y)$ визначена у деякій області D площини xOy і нехай точка $M_0(x_0;y_0) \in D$.

Означення 8. Число A називається границею функції $f(x;y)$ при наближенні точки $M(x;y)$ до точки $M_0(x_0;y_0)$, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ можна знайти таке число $\delta > 0$ (δ залежить від ε), що для всіх точок $M(x;y)$, координати яких задовольняють нерівність $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$, тобто точок $M(x;y)$ із δ – околу точки $M_0(x_0;y_0)$ (за винятком, можливо, самої точки $M_0(x_0;y_0)$), виконується нерівність

$$|f(x; y) - A| < \varepsilon.$$

Якщо A – границя функції $f(x; y)$ при $M(x; y) \rightarrow M_0(x_0; y_0)$, то це записується так:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = A \quad (2.4)$$

Означення 9. Нехай точка $M_0(x_0; y_0) \in D$ – області визначення функції $f(x; y)$. Функція $z=f(x; y)$ називається неперервною у точці $M_0(x_0; y_0)$, якщо границя функції в ній існує і дорівнює значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = f(x_0; y_0), \quad (2.5)$$

причому точка $M(x; y)$ наближається до точки $M_0(x_0; y_0)$ довільним чином, залишаючись в області визначення функції.

Якщо $x = x_0 + \Delta x, y = y_0 + \Delta y$, то (2.5) матиме вигляд:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) = f(x_0; y_0) \quad (2.6)$$

або

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)) = 0 \quad (2.7)$$

Використовуючи формулу (2.3) повного приросту функції $z=f(x; y)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$, маємо $\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$ і, крім того, позначивши $\Delta \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ (якщо $\Delta x \rightarrow 0$ і $\Delta y \rightarrow 0$, тоді $\Delta \rho \rightarrow 0$ і, навпаки, якщо $\Delta \rho \rightarrow 0$, то $\Delta x \rightarrow 0$ і $\Delta y \rightarrow 0$), рівність (2.7) можна записати у вигляді:

$$\lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \Delta z = 0. \quad (2.8)$$

Означення 10. Функція, неперервна у кожній точці деякої області, називається неперервною у цій області.

Означення 11. Точка $M_1(x_1; y_1)$, в якій порушується умова (2.5) неперервності функції $z=f(x; y)$, називається точкою розриву цієї функції.

Приклад 3. Довести, що функція $z=x^2+y^2$ неперервна у будь-якій точці $(x; y)$ площини xOy .

Розв'язок:

Ця функція визначена в усіх точках площини xOy . Її повний приріст для будь-яких $x, y, \Delta x, \Delta y$ має вигляд:

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y) = ((x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2) - (x^2 + y^2) = \\ &= x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + y^2 + 2y \cdot \Delta y + (\Delta y)^2 - x^2 - y^2 = 2x \cdot \Delta x + 2y \cdot \Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \end{aligned}$$

Перейшовши до границі, коли $\Delta x \rightarrow 0$ і $\Delta y \rightarrow 0$, дістанемо $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0$

і отже, дана функція неперервна у будь-якій точці $(x; y)$ площини xOy .

Означення 12. Частинною похідною першого порядку по змінній x (або частинною похідною по змінній x) функції двох змінних $z=f(x; y)$ називається границя відношення частинного приросту $\Delta_x z$ до приросту цієї змінної Δx , якщо приріст Δx довільним чином прямує до нуля і якщо границя існує.

Частинна похідна для функції $z=f(x; y)$ по змінній x позначається так:

$$z'_x; f'_x(x; y); \frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial x}.$$

За означенням 12

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x}. \quad (2.9)$$

Означення 13. Частинною похідною першого порядку по змінній y (або частинною похідною по змінній y) функції двох змінних $z=f(x; y)$ називається границя відношення частинного приросту $\Delta_y z$ до приросту цієї змінної Δy , якщо приріст Δy довільним чином прямує до нуля та якщо границя існує.

Позначається така похідна так:

$$z'_y; f'_y(x; y); \frac{\partial z}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial y}.$$

За означенням 13

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}. \quad (2.10)$$

Зауваження. $\Delta_x z$ обчислюється у припущенні, що змінна y – стала, а $\Delta_y z$ – у припущенні, що змінна x – стала. Тому при обчисленні частинних похідних функції двох змінних можна користуватися вже відомими правилами й формулами диференціювання функції однієї змінної, вважаючи при цьому іншу змінну сталою.

Аналогічно, частинні похідні функцій більшого числа змінних визначаються та обчислюються у припущенні, що змінюється лише одна з незалежних змінних, а інші при цьому є сталими.

Приклад 4. Знайти частинні похідні першого порядку функції

$$z = 2x^3y - 3x^2y^4 + 4x^4 - 10y + 5.$$

Розв'язок:

Припускаючи, що y – стала і застосовуючи правила й формули диференціювання функції однієї змінної x , знаходимо частинну похідну по x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= (2x^3y)'_x - (3x^2y^4)'_x + (4x^4)'_x - (10y)'_x + (5)'_x = 2y \cdot (x^3)'_x - 3y^4 (x^2)'_x + 16x^3 - 0 + 0 = \\ &= 2y \cdot 3x^2 - 3y^4 \cdot 2x + 16x^3 = 6x^2y - 6xy^4 + 16x^3 \end{aligned}$$

Припускаючи, що x – стала і застосовуючи правила й формули диференціювання функції однієї змінної y , знаходимо частинну похідну по y :

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= (2x^3 y)'_y - (3x^2 y^4)'_y + (4x^4)'_y - (10y)'_y + (5)'_y = 2x^3 (y)'_y - 3x^2 \cdot (y^4)'_y + 0 - 10 + 0 = \\ &= 2x^3 \cdot 1 - 3x^2 \cdot 4y^3 - 10 = 2x^3 - 12x^2 y^3 - 10\end{aligned}$$

Приклад 5. Знайти частинні похідні функції $z = \sin \frac{x}{y} \cdot \cos \frac{y}{x}$.

Розв'язок:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \left(\sin \frac{x}{y} \right)'_x \cdot \cos \frac{y}{x} + \sin \frac{x}{y} \cdot \left(\cos \frac{y}{x} \right)'_x = \cos \frac{x}{y} \cdot \left(\frac{x}{y} \right)'_x \cdot \cos \frac{y}{x} + \sin \frac{x}{y} \cdot \left(-\sin \frac{y}{x} \right) \cdot \left(\frac{y}{x} \right)'_x = \\ &= \frac{1}{y} \cdot (x)'_x \cdot \cos \frac{x}{y} \cdot \cos \frac{y}{x} - y (x^{-1})'_x \cdot \sin \frac{x}{y} \cdot \sin \frac{y}{x} = \frac{1}{y} \cdot 1 \cdot \cos \frac{x}{y} \cdot \cos \frac{y}{x} - y (-x^{-2}) \cdot \sin \frac{x}{y} \cdot \sin \frac{y}{x} = \\ &= \frac{1}{y} \cdot \cos \frac{x}{y} \cdot \cos \frac{y}{x} + \frac{y}{x^2} \cdot \sin \frac{x}{y} \cdot \sin \frac{y}{x}; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \left(\sin \frac{x}{y} \right)'_y \cdot \cos \frac{y}{x} + \sin \frac{x}{y} \cdot \left(\cos \frac{y}{x} \right)'_y = \cos \frac{x}{y} \cdot \left(\frac{x}{y} \right)'_y \cdot \cos \frac{y}{x} + \sin \frac{x}{y} \cdot \left(-\sin \frac{y}{x} \right) \cdot \left(\frac{y}{x} \right)'_y = \\ &= x (y^{-1})'_y \cdot \cos \frac{x}{y} \cdot \cos \frac{y}{x} - \frac{1}{x} (y)'_y \cdot \sin \frac{x}{y} \cdot \sin \frac{y}{x} = -x \cdot y^{-2} \cdot \cos \frac{x}{y} \cdot \cos \frac{y}{x} - \frac{1}{x} \cdot 1 \cdot \sin \frac{x}{y} \cdot \sin \frac{y}{x} = \\ &= -\frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y} \cdot \cos \frac{y}{x} - \frac{1}{x} \sin \frac{x}{y} \cdot \sin \frac{y}{x}.\end{aligned}$$

Приклад 6. Знайти частинні похідні функції $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Розв'язок:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{(x)'_x \cdot \sqrt{x^2 + y^2} - x \cdot (\sqrt{x^2 + y^2})'_x}{(\sqrt{x^2 + y^2})^2} = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot (x^2 + y^2)'_x}{x^2 + y^2} = \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x}{x^2 + y^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{(\sqrt{x^2 + y^2})^2 - x^2}{x^2 + y^2} = \\ &= \frac{x^2 + y^2 - x^2}{(x^2 + y^2) \cdot \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2) \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{(x)'_y \cdot \sqrt{x^2 + y^2} - x \cdot (\sqrt{x^2 + y^2})'_y}{(\sqrt{x^2 + y^2})^2} = \frac{0 - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot (x^2 + y^2)'_y}{x^2 + y^2} = \frac{-\frac{x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2y}{x^2 + y^2} = \\ &= \frac{-xy}{(x^2 + y^2) \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}.\end{aligned}$$

Приклад 7. Знайти частинні похідні функції $z = \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2} + \arcsin \frac{x+y}{xy}$.

Розв'язок:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial x} &= \left(\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2} \right)'_x + \left(\arcsin \frac{x+y}{xy} \right)'_x = \frac{1}{2\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2}} \cdot \left(1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2 \right)'_x + \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2}} \cdot \left(\frac{x+y}{xy} \right)'_x = \\
 &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2}} \left(-2 \cdot \frac{x+y}{xy} \cdot \left(\frac{x+y}{xy} \right)'_x \right) + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2}} \cdot \left(\frac{x+y}{xy} \right)'_x = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{x+y}{xy} \cdot \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right)'_x \right) + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right)'_x = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2}} \left(-\frac{x+y}{xy} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \right) + \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2}} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{x+y}{xy} - 1 \right) = \\
 &= \frac{xy}{\sqrt{(xy)^2 - (x+y)^2} \cdot x^2} \cdot \frac{(x+y) - xy}{xy} = -\frac{xy - (x+y)}{x^2 \cdot \sqrt{xy - (x+y)} \cdot \sqrt{xy + (x+y)}} = \\
 &= -\frac{\sqrt{xy - x - y}}{x^2 \cdot \sqrt{xy + x + y}};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= \left(\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy} \right)^2} \right)'_y + \left(\arcsin \frac{x+y}{xy} \right)'_y = \frac{1}{2\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy} \right)^2}} \cdot \left(1 - \left(\frac{x+y}{xy} \right)^2 \right)'_y + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy} \right)^2}} \cdot \left(\frac{x+y}{xy} \right)'_y = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy} \right)^2}} \cdot \left(-2 \frac{x+y}{xy} \cdot \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right)'_y \right) + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy} \right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right)'_y = \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy} \right)^2}} \left(-\frac{x+y}{xy} \cdot \left(-\frac{1}{y^2} \right) + \left(-\frac{1}{y^2} \right) \right) = \frac{1}{-y^2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy} \right)^2}} \left(1 - \frac{x+y}{xy} \right) = \\
&= -\frac{xy}{y^2 \cdot \sqrt{(xy)^2 - (x+y)^2}} \cdot \frac{xy - (x+y)}{xy} = -\frac{xy - (x+y)}{y^2 \cdot \sqrt{xy - (x+y)} \cdot \sqrt{xy + (x+y)}} = \\
&= -\frac{\sqrt{xy - x - y}}{y^2 \cdot \sqrt{xy + x + y}}.
\end{aligned}$$

Приклад 8. Довести, що функція $z = (x^2 + y^2) \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{y}$ задовольняє рівняння

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$$

Розв'язок:

Знайдемо спочатку частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= (x^2 + y^2)'_x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{y} + (x^2 + y^2) \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{x}{y} \right)'_x = 2x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{y} + (x^2 + y^2) \cdot \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{x}{y} \right)} \cdot \left(\frac{x}{y} \right)'_x = \\
&= 2x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{y} + \frac{x^2 + y^2}{\cos^2 \left(\frac{x}{y} \right)} \cdot \frac{1}{y} (x)'_x = 2x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{y} + \frac{x^2 + y^2}{y \cdot \cos^2 \left(\frac{x}{y} \right)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= (x^2 + y^2)'_y \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{y} + (x^2 + y^2) \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{x}{y} \right)'_y = 2y \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{y} + (x^2 + y^2) \cdot \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{x}{y} \right)} \cdot \left(\frac{x}{y} \right)'_y = \\ &= 2y \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{y} + \frac{x^2 + y^2}{\cos^2 \left(\frac{x}{y} \right)} \cdot x \cdot (y^{-1})'_y = 2y \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{y} + \frac{x^2 + y^2}{\cos^2 \left(\frac{x}{y} \right)} \cdot x \cdot (-y^{-2}) = 2y \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{y} - \frac{x(x^2 + y^2)}{y^2 \cdot \cos^2 \left(\frac{x}{y} \right)}.\end{aligned}$$

Підставимо вирази для z , $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ у задане рівняння

$$\begin{aligned}& x \cdot \left(2x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{y} + \frac{x^2 + y^2}{y \cdot \cos^2 \left(\frac{x}{y} \right)} \right) + y \cdot \left(2y \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{y} - \frac{x(x^2 + y^2)}{y^2 \cdot \cos^2 \left(\frac{x}{y} \right)} \right) = 2 \cdot (x^2 + y^2) \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{y}; \\ & 2x^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{y} + \frac{x(x^2 + y^2)}{y \cdot \cos^2 \left(\frac{x}{y} \right)} + 2y^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{y} - \frac{x \cdot (x^2 + y^2)}{y \cdot \cos^2 \left(\frac{x}{y} \right)} = 2 \cdot (x^2 + y^2) \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{y}; \\ & 2 \cdot (x^2 + y^2) \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{y} = 2 \cdot (x^2 + y^2) \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{y};\end{aligned}$$

Таким чином, доведено, що дана функція задовольняє задане рівняння.

3. ПОВНИЙ ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Нехай функція $z=f(x;y)$ має неперервні частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ у даній області, тоді її повний приріст Δz у точці $M(x;y)$ можна подати у вигляді:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \gamma_1 \cdot \Delta x + \gamma_2 \cdot \Delta y, \quad (3.11)$$

де $\gamma_1 \rightarrow 0$ і $\gamma_2 \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$ і $\Delta y \rightarrow 0$.

Означення 14. Функція $z=f(x;y)$ називається диференційовною у точці $M(x;y)$, якщо її повний приріст Δz у даній точці можна подати у вигляді суми двох доданків: величини $\frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$, лінійної відносно Δx і Δy та величини

$\gamma_1 \cdot \Delta x + \gamma_2 \cdot \Delta y$, нескінченно малої вищого порядку відносно $\Delta \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Головна лінійна частина приросту називається повним диференціалом цієї функції і позначається dz або $df(x;y)$:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y. \quad (3.12)$$

Означення 15. Прирости незалежних змінних Δx і Δy називаються диференціалами незалежних змінних x і y та позначаються dx і dy відповідно. Тоді повний диференціал (3.12) функції двох змінних має вигляд:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (3.13)$$

Рівність (3.11), використовуючи (3.12), можна подати у вигляді:

$$\Delta z = dz + \gamma_1 \cdot \Delta x + \gamma_2 \cdot \Delta y. \quad (3.14)$$

З точністю до нескінченно малої вищого порядку відносно $\Delta \rho$ можна записати наближену рівність:

$$\Delta z \approx dz. \quad (3.15)$$

Наближену формулу (3.15) запишемо у точці $M_0(x_0; y_0)$:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0) &\approx \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0; y_0)} \cdot \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0; y_0)} \cdot \Delta y \quad \text{або} \\ f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) &\approx f(x_0; y_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0; y_0)} \cdot \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0; y_0)} \cdot \Delta y. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Формулу (3.16) широко використовують у наближених обчисленнях.

Приклад 9. Знайти повний диференціал функції $z = \lg(5x - 4y) + 6^{yx}$.

Розв'язок:

Спочатку знайдемо частинні похідні:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= (\lg(5x - 4y))'_x + (6^{yx})'_x = \frac{(5x - 4y)'_x}{\cos^2(5x - 4y)} + 6^{yx} \cdot \ln 6 \cdot (yx)'_x = \frac{5}{\cos^2(5x - 4y)} + 6^{yx} \cdot y \cdot \ln 6; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= (\lg(5x - 4y))'_y + (6^{yx})'_y = \frac{(5x - 4y)'_y}{\cos^2(5x - 4y)} + 6^{yx} \cdot \ln 6 \cdot (yx)'_y = \frac{-4}{\cos^2(5x - 4y)} + 6^{yx} \cdot x \cdot \ln 6; \end{aligned}$$

Використовуючи формулу (3.13), маємо

$$dz = \left(\frac{5}{\cos^2(5x - 4y)} + 6^{yx} \cdot y \cdot \ln 6 \right) dx + \left(-\frac{4}{\cos^2(5x - 4y)} + 6^{yx} \cdot x \cdot \ln 6 \right) dy.$$

Приклад 10. Обчислити наближено $\sqrt{3.95^2 + 3.15^2}$.

Розв'язок:

Розглянемо допоміжну функцію $f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Щоб скористатись формулою (3.16), покладемо $x_0 = 4$, $y_0 = 3$. Тоді:

$$f(x_0; y_0) = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5, \quad \Delta x = 3.95 - 4 = -0.05, \quad \Delta y = 3.15 - 3 = 0.15.$$

Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot (x^2 + y^2)_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0; y_0)} = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{4}{5};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)_y = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot (x^2 + y^2)_y = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0; y_0)} = \frac{3}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{3}{5};$$

За формулою (3.16) маємо:

$$\sqrt{3.95^2 + 3.15^2} \approx 5 + \frac{4}{5} \cdot (-0.05) + \frac{3}{5} \cdot 0.15 = 5 - 4 \cdot 0.01 + 3 \cdot 0.03 = 5 - 0.04 + 0.09 = 5.05$$

Отже, $\sqrt{3.95^2 + 3.15^2} \approx 5.05$.

4. ПОХІДНА СКЛАДЕНОЇ ФУНКЦІЇ

Похідна складеної функції $z = f(x, y)$, де $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, обчислюється за допомогою формули

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \quad (4.17)$$

Приклад 11. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = \sin^2 x + 2 \cos y$, $x = t^2 + 3t - 4$,
 $y = t^2 - 4t + 5$.

Розв'язок:

Знайдемо необхідні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2 \sin y, \quad \frac{dx}{dt} = 2t + 3, \quad \frac{dy}{dt} = 2t - 4.$$

Тоді

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= (2t+3)\sin 2x - 2(2t-4)\sin y = (4t+6)\sin x \cos x - (4t-8)\sin y = \\ &= 4t(\sin x \cos x - \sin y) + 3\sin 2x + 8\sin y, \quad de \\ x &= t^2 + 3t - 4, \quad y = t^2 - 4t + 5.\end{aligned}$$

Розглянемо більш складний випадок. Нехай $z = f(x, y)$, а $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Тоді за формулою (4.17) дістанемо

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \quad (4.18)$$

Приклад 12. Нехай $f(x, y) = x \cdot y^2$, $x = \sqrt{uv}$, $y = \frac{u-v}{u+v}$.

Розв'язок:

Знайти $\frac{\partial f}{\partial u}$ та $\frac{\partial f}{\partial v}$.

Знайдемо

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy, \quad \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{2\sqrt{uv}} \cdot v, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2\sqrt{uv}} \cdot u,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{(u+v) - (u-v)}{(u+v)^2} = \frac{2v}{(u+v)^2},$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{-(u+v) - (u-v)}{(u+v)^2} = \frac{-2u}{(u+v)^2}.$$

Тоді за допомогою формул (4.18) отримаємо:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{2}y^2 \cdot \sqrt{\frac{v}{u}} + 2xy \cdot \frac{2v}{(u+v)^2} = \frac{1}{2} \frac{(u-v)^2}{(u+v)^2} \cdot \sqrt{\frac{v}{u}} + 4\sqrt{uv} \frac{(u-v)v}{(u+v)^3},$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{1}{2}y^2 \cdot \sqrt{\frac{u}{v}} + 2xy \cdot \frac{-2u}{(u+v)^2} = \frac{1}{2} \frac{(u-v)^2}{(u+v)^2} \sqrt{\frac{u}{v}} - 4\sqrt{uv} \cdot \frac{u-v}{(u+v)^3} \cdot u =$$

$$= \frac{1}{2(u+v)^3} \sqrt{\frac{u}{v}} ((u+v)(u-v)^2 - 8vu(u-v)).$$

Формули (4.17), (4.18) можна узагальнити і для функцій з більшою кількістю змінних.

Відповідним чином знаходяться диференціали складених функцій.

Оскільки

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv,$$

то використовуючи формули (4.18) отримаємо:

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \right) dv.$$

Звідки

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \quad (4.19)$$

де $dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv.$

Формули (3.13) та (4.19) мають однаковий вигляд незалежно від того, будуть x та y незалежними змінними чи диференційовними функціями змінних u і v .

5. ПОХІДНА НЕЯВНОЇ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Неявні функції можна записати у вигляді:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0. \quad (5.20)$$

Питання про існування та диференційовність неявної функції n змінних розв'язується аналогічно до того, як це було зроблено для неявної функції однієї змінної, заданої рівнянням $F(x, y) = 0$, де, як відомо,

$$y' = - \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \quad (5.21)$$

Нехай задано рівняння

$$F(x, y, z) = 0. \quad (5.22)$$

При знаходженні частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial x}$ (або $\frac{\partial z}{\partial y}$) величина y (або величина x) вважається сталою. Тому з рівняння (5.22) за допомогою (5.21) дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \quad (5.23)$$

Для неявної функції (5.20) маємо:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n, y)}{F'_y(x_1, x_2, \dots, x_n, y)}, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (5.24)$$

Приклад 13. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції $z = f(x, y)$, якщо

$$\cos(xyz) + 2xz = 3yz.$$

Розв'язок:

Із умови отримаємо:

$$F(x, y, z) = \cos(xyz) + 2xz - 3yz = 0.$$

Звідси

$$\begin{aligned} F'_x &= -\sin(xyz) \cdot yz + 2z, \\ F'_y &= -\sin(xyz) \cdot xz - 3z, \\ F'_z &= -\sin(xyz) \cdot xy + 2x - 3y. \end{aligned}$$

Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-yz \sin(xyz) + 2z}{-xy \sin(xyz) + 2x - 3y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz \sin(xyz) + 3z}{-xy \sin(xyz) + 2x - 3y}.$$

Повний диференціал має вигляд:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = -\frac{z((-y \sin(xyz) + 2)dx - (x \sin(xyz) + 3)dy)}{-xy \sin(xyz) + 2x - 3y}.$$

6. ПОХІДНА ЗА НАПРЯМОМ

При розв'язанні багатьох прикладних задач використовується поняття скалярного поля. Це область простору, кожній точці якої поставлено у відповідність значення деякої скалярної величини. Прикладами скалярного поля може бути поле температур тіла, поле атмосферного тиску і т. д.

Для того, щоб задати скалярне поле, досить задати скалярну функцію $u(x, y, z)$. Поле називають стаціонарним, якщо воно не залежить від часу. Скалярне поле, яке змінюється з часом, називають нестаціонарним.

Важливою характеристикою скалярного поля є швидкість зміни поля в

заданому напрямі.

Нехай задано скалярне поле $u = u(x, y, z)$. Візьмемо в ньому точку $A(x_0, y_0, z_0)$ та вектор $\bar{\ell}$, який виходить з цієї точки. Напрямок $\bar{\ell}$ задамо за допомогою кутів α, β, γ , які він утворює з додатними напрямками осей координат. Візьмемо точку $B(x_1, y_1, z_1)$ яка лежить на прямій, що проходить через A в напрямі $\bar{\ell}$. Нехай відстань AB дорівнює h . Тоді

$$\overrightarrow{AB} = (x_1 - x_0)\bar{i} + (y_1 - y_0)\bar{j} + (z_1 - z_0)\bar{k}$$

та

$$\overrightarrow{AB} = h \cos \alpha \bar{i} + h \cos \beta \bar{j} + h \cos \gamma \bar{k}.$$

Звідси

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h \cos \alpha, \\ y_1 = y_0 + h \cos \beta, \\ z_1 = z_0 + h \cos \gamma. \end{cases}$$

Обчислимо приріст функції $u(x, y, z)$ при переході від A до B

$$\Delta u(A) = u(B) - u(A).$$

Означення 16. Якщо існує границя відношення $\frac{\Delta u}{h}$ при $h \rightarrow 0$, то цю границю називають похідною функції $u(x, y, z)$ в точці A за напрямом $\bar{\ell}$ і позначають $\frac{\partial u(A)}{\partial \ell}$, тобто

$$\frac{\partial u(A)}{\partial \ell} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta u(A)}{h}. \quad (6.25)$$

Зазначимо, що коли напрям $\bar{\ell}$ співпадає з напрямом осі Ox ($\bar{i}$), то границя (6.25) дорівнюватиме частинній похідній функції u за змінною x у точці A . Аналогічно, якщо $\bar{\ell}$ співпадає з $\bar{j}$, або $\bar{k}$, то формула (6.25) визначатиме $\frac{\partial u(A)}{\partial y}$ та $\frac{\partial u(A)}{\partial z}$.

Величина $\left| \frac{\partial u}{\partial \ell} \right|$ визначає величину швидкості зміни функції $u(x, y, z)$ за напрямом $\bar{\ell}$, а знак $\frac{\partial u}{\partial \ell}$ вказує на зростання чи спадання величини u .

Виведемо формулу для обчислення похідної за напрямом. Користуючись виразом

$$\begin{aligned} \Delta u(A) &= u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - u(x_0, y_0, z_0) = \\ &= \frac{\partial u(A)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u(A)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u(A)}{\partial z} \Delta z + \omega(x_0, y_0, z_0, \Delta x, \Delta y, \Delta z)h, \end{aligned}$$

де $h = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, $\lim_{\rho \rightarrow 0} \omega = 0$, а також взявши $\Delta x = h \cos \alpha$,

$\Delta y = h \cos \beta$, $\Delta z = h \cos \gamma$, отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma. \quad (6.26)$$

Приклад 14. Обчислити похідну функції $u(x, y, z) = xy + \sqrt{y^2 + z^2}$ в точці $A(1, 0, 2)$ за напрямом $\bar{\ell} = \bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$.

Розв'язок:

На основі (6.26) обчислимо $\frac{\partial u(A)}{\partial \ell}$.

Так

$$\frac{\partial u(A)}{\partial x} = y|_A = 0, \quad \frac{\partial u(A)}{\partial y} = \left(x + \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right) \Big|_A = 1 + \frac{0}{\sqrt{0+4}} = 1,$$

$$\frac{\partial u(A)}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \Big|_A = \frac{2}{\sqrt{0+4}} = 1.$$

Значення $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ знайдемо з формул:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\bar{\ell}|} = \frac{1}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{1}{\sqrt{6}};$$

$$\cos \beta = \frac{a_y}{|\bar{\ell}|} = \frac{1}{\sqrt{6}};$$

$$\cos \gamma = \frac{a_z}{|\bar{\ell}|} = -\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Тоді
$$\frac{\partial u(A)}{\partial \ell} = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 1 \cdot \frac{(-2)}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \approx -0,408.$$

7. ГРАДІЄНТ ФУНКЦІЇ

Праву частину формули (6.26) можна розглядати як скалярний добуток двох векторів:

$$\bar{\ell} = \cos \alpha \bar{i} + \cos \beta \bar{j} + \cos \gamma \bar{k},$$

$$\bar{N} = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k}.$$

Означення 17. Вектор $\bar{N}$ називають градієнтом функції $u(x, y, z)$ в точці A і позначають $\text{grad } u$. Отже

$$\overline{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k}. \quad (7.27)$$

Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \overline{grad} u \cdot \bar{\ell}. \quad (7.28)$$

Нехай φ – кут між $\bar{\ell}$ та $\bar{N}$, тоді $\cos \varphi = \frac{\bar{\ell} \cdot \bar{N}}{|\bar{\ell}| |\bar{N}|} = \frac{\partial u / \partial \ell}{|\overline{grad} u|}$. Звідси $\frac{\partial u}{\partial \ell}$ досягає максимального значення при $\varphi = 0$ ($\cos \varphi = 1$). Таким чином

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \ell} \right)_{\max} = |\overline{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2}.$$

Це означає, що швидкість зростання скалярного поля в довільній точці є максимальною у напрямі градієнта.

Приклад 15. В якому напрямі відбувається найбільше зростання температури $T = y^2 + 3xz$ у точці $A(2, 1, -1)$.

Розв'язок:

Найбільше зростання скалярного поля відбувається у напрямі вектора-градієнта, що виходить з точки A . Знайдемо $\overline{grad} T(A)$. Маємо

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 3z, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 3x. \quad \text{Тоді}$$

$$\overline{grad} T(A) = (3z|_{z=-1}) \bar{i} + (2y|_{y=1}) \bar{j} + (3x|_{x=2}) \bar{k} = -3\bar{i} + 2\bar{j} + 6\bar{k}.$$

8. ДОТИЧНА ПЛОЩИНА ТА НОРМАЛЬ ДО ПОВЕРХНІ

Означення 18. Дотичною площиною до поверхні $F(x; y; z) = 0$ у деякій її точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ називається площина, яка містить усі дотичні прямі до кривих, що розташовані на даній поверхні і проходять через точку M_0 .

Якщо дотична площина до поверхні $F(x; y; z) = 0$ у точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ існує, то її рівняння має вигляд:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{M_0} \cdot (x - x_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{M_0} \cdot (y - y_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{M_0} \cdot (z - z_0) = 0. \quad (8.29)$$

Означення 19. Нормаль до поверхні $F(x; y; z) = 0$ у точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – це пряма лінія, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і перпендикулярна дотичній площині до заданої поверхні у точці M_0 .

Якщо нормаль до поверхні $F(x; y; z) = 0$ у точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ існує, то її рівняння мають вигляд:

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{M_0}} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{M_0}} = \frac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{M_0}}. \quad (8.30)$$

Приклад 16. Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$ у точці $M_0(3;4;-7)$.

Розв'язок:

Запишемо рівняння поверхні у вигляді $\sqrt{x^2 + y^2} - xy - z = 0$.

Тоді $F(x;y;z) = \sqrt{x^2 + y^2} - xy - z$. Знайдемо частинні похідні цієї функції:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)'_x - (xy)'_x - (z)'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot (x^2 + y^2)'_x - y(x)'_x - 0 =$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} - y \cdot 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - y;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{M_0} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} - 4 = \frac{3}{5} - 4 = -\frac{17}{5};$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)'_y - (xy)'_y - (z)'_y = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot (x^2 + y^2)'_y - x(y)'_y - 0 =$$

$$= \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} - x \cdot 1 = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - x;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{M_0} = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} - 3 = \frac{4}{5} - 3 = -\frac{11}{5};$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)'_z - (xy)'_z - (z)'_z = 0 - 0 - 1 = -1;$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{M_0} = -1.$$

Згідно з формулою (8.29) рівняння дотичної площини має вигляд:

$$-\frac{17}{5}(x-3) - \frac{11}{5}(y-4) - 1 \cdot (z+7) = 0 \text{ або } 17x + 11y + 5z - 60 = 0.$$

Згідно з формулою (8.30) рівняння нормалі мають вигляд:

$$\frac{x-3}{-\frac{17}{5}} = \frac{y-4}{-\frac{11}{5}} = \frac{z+7}{-1} \text{ або } \frac{x-3}{17} = \frac{y-4}{11} = \frac{z+7}{5}.$$

9. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ n-ГО ПОРЯДКУ

Частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції $z=f(x;y)$ є деякими функціями змінних x та y і, в свою чергу, можуть мати частинні похідні і по x , і по y , які називаються частинними похідними другого порядку від функції $z=f(x;y)$. Позначаються і визначаються похідні другого порядку так:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x; y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right); \quad (9.31)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x; y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right); \quad (9.32)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x; y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right); \quad (9.33)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x; y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right). \quad (9.34)$$

Теорема 1. Якщо функція $z=f(x;y)$ та її частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ неперервні у точці $M(x;y)$ і в деякому околі цієї точки, то у цій точці

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}. \quad (9.35)$$

Частинні похідні другого порядку знову можна диференціювати по x та по y . При цьому отримаємо частинні похідні третього порядку, яких для функції двох змінних $z=f(x;y)$ буде вісім:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right); \quad (9.36)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right); \quad (9.37)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right); \quad (9.38)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right); \quad (9.39)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right); \quad (9.40)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right); \quad (9.41)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right); \quad (9.42)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right). \quad (9.43)$$

Означення 20. Частинною похідною n -го порядку функції $z=f(x;y)$ називається частинна похідна першого порядку від частинної похідної $(n-1)$ -го порядку.

Приклад 17. Для функції $z = \frac{y}{x} + x \cdot \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right)$ довести, що

$$x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Розв'язок:

Знайдемо спочатку частинні похідні першого та другого порядків заданої функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{y}{x}\right)'_x + (x)'_x \cdot \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right) + x \cdot \left(\ln\left(1 + \frac{y}{x}\right)\right)'_x = y \cdot (x^{-1})'_x + 1 \cdot \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right) + x \cdot \frac{1}{1 + \frac{y}{x}} \cdot y(x^{-1})'_x =$$

$$= -yx^{-2} + \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right) + \frac{x^2}{x+y} (-yx^{-2}) = -\frac{y}{x^2} + \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x+y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{y}{x}\right)'_y + x \cdot \left(\ln\left(1 + \frac{y}{x}\right)\right)'_y = \frac{1}{x} (y)'_y + x \cdot \frac{1}{1 + \frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{x} \cdot (y)'_y = \frac{1}{x} \cdot 1 + \frac{x^2}{x+y} \cdot \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x} + \frac{x}{x+y};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\left(\frac{y}{x^2}\right)'_x + \left(\ln\left(1 + \frac{y}{x}\right)\right)'_x - \left(\frac{y}{x+y}\right)'_x = -y(x^{-2})'_x + \frac{1}{1 + \frac{y}{x}} \cdot y(x^{-1})'_x - y((x+y)^{-1})'_x =$$

$$= -y \cdot (-2x^{-3}) + \frac{x}{x+y} \cdot y(-x^{-2}) + y(x+y)^{-2} \cdot 1 = \frac{2y}{x^3} - \frac{y}{x(x+y)} + \frac{y}{(x+y)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\left(\frac{y}{x^2}\right)'_y + \left(\ln\left(1 + \frac{y}{x}\right)\right)'_y - \left(\frac{y}{x+y}\right)'_y = -\frac{1}{x^2} (y)'_y + \frac{1}{1 + \frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{x} \cdot (y)'_y - \frac{(y)'_y \cdot (x+y) - y \cdot (x+y)'_y}{(x+y)^2} =$$

$$= -\frac{1}{x^2} \cdot 1 + \frac{x}{x+y} \cdot \frac{1}{x} \cdot 1 - \frac{1 \cdot (x+y) - y \cdot 1}{(x+y)^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+y} - \frac{x+y-y}{(x+y)^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+y} - \frac{x}{(x+y)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{1}{x}\right)'_y + \left(\frac{x}{x+y}\right)'_y = 0 + x((x+y)^{-1})'_y = -x \cdot (x+y)^{-2} \cdot (x+y)'_y = -x(x+y)^{-2} \cdot 1 = -\frac{x}{(x+y)^2}.$$

Тепер розглянемо вираз та підставимо знайдені похідні:

$$\begin{aligned}
x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= x^2 \left(\frac{2y}{x^3} - \frac{y}{x(x+y)} + \frac{y}{(x+y)^2} \right) + 2xy \cdot \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+y} - \frac{x}{(x+y)^2} \right) + \\
&+ y^2 \cdot \left(-\frac{x}{(x+y)^2} \right) = \frac{2y}{x} - \frac{xy}{x+y} + \frac{x^2 y}{(x+y)^2} - \frac{2y}{x} + \frac{2xy}{x+y} - \frac{2x^2 y}{(x+y)^2} - \frac{xy^2}{(x+y)^2} = \\
&= \frac{xy}{x+y} - \frac{x^2 y}{(x+y)^2} - \frac{xy^2}{(x+y)^2} = \frac{xy}{x+y} - \frac{xy(x+y)}{(x+y)^2} = \frac{xy}{x+y} - \frac{xy}{x+y} = 0
\end{aligned}$$

що і треба було довести.

Приклад 18. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \sin^2(ax + by)$.

Розв'язок:

Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= (\sin^2(ax + by))'_x = 2 \sin(ax + by) \cdot (\sin(ax + by))'_x = \\
&= 2 \sin(ax + by) \cdot \cos(ax + by) \cdot (ax + by)'_x = \sin 2(ax + by) \cdot a = a \cdot \sin 2(ax + by); \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= (\sin^2(ax + by))'_y = 2 \sin(ax + by) \cdot (\sin(ax + by))'_y = \\
&= 2 \sin(ax + by) \cdot \cos(ax + by) \cdot (ax + by)'_y = \sin 2(ax + by) \cdot b = b \cdot \sin 2(ax + by).
\end{aligned}$$

А тепер знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= (a \cdot \sin 2(ax + by))'_x = a \cdot \cos 2(ax + by) \cdot (2(ax + by))'_x = a \cdot \cos 2(ax + by) \cdot 2a = \\
&= 2a^2 \cdot \cos 2(ax + by); \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= (a \cdot \sin 2(ax + by))'_y = a \cdot \cos 2(ax + by) \cdot (2(ax + by))'_y = a \cdot \cos 2(ax + by) \cdot 2b = \\
&= 2ab \cdot \cos 2(ax + by); \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= (b \cdot \sin 2(ax + by))'_x = b \cdot \cos 2(ax + by) \cdot (2(ax + by))'_x = b \cdot \cos 2(ax + by) \cdot 2a = \\
&= 2ab \cdot \cos 2(ax + by); \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= (b \cdot \sin 2(ax + by))'_y = b \cdot \cos 2(ax + by) \cdot (2(ax + by))'_y = b \cdot \cos 2(ax + by) \cdot 2b = \\
&= 2b^2 \cdot \cos 2(ax + by).
\end{aligned}$$

Таким чином

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 2a^2 \cdot \cos 2(ax + by); \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2ab \cdot \cos 2(ax + by);
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2b^2 \cdot \cos 2(ax + by).$$

10. ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Означення 21. Точка $M_0(x_0; y_0)$ називається точкою локального максимуму функції $z=f(x; y)$, якщо існує такий окіл точки M_0 , в якому для будь-якої точки $M(x; y)$ (крім самої точки $M_0(x_0; y_0)$) виконується нерівність

$$f(x; y) < f(x_0; y_0). \quad (10.44)$$

Означення 22. Точка $M_0(x_0; y_0)$ називається точкою локального мінімуму функції $z=f(x; y)$, якщо існує такий окіл точки M_0 , в якому для будь-якої точки $M(x; y)$ (крім самої точки $M_0(x_0; y_0)$) виконується нерівність

$$f(x; y) > f(x_0; y_0). \quad (10.45)$$

Означення 23. Локальні мінімуми і максимуми функції називаються її локальними екстремумами. Точка, в якій досягається локальний екстремум функції, називається точкою локального екстремуму.

Приклад 19. Показати, що функція $z = (x-2)^2 + (y-3)^2 + 4$ досягає у точці $M_0(2; 3)$ локального мінімуму.

Розв'язок:

Дійсно, $f(2; 3) = (2-2)^2 + (3-3)^2 + 4 = 4$, крім того для всіх $x \neq 2$ і $y \neq 3$ маємо $(x-2)^2 > 0$ і $(y-3)^2 > 0$, а $f(x; y) = (x-2)^2 + (y-3)^2 + 4 > 0 + 0 + 4 = 4 = f(2; 3)$, тобто $f(x; y) > f(2; 3)$ для всіх $x \neq 2$ і $y \neq 3$. Отже, $z_{\min} = f(2; 3) = 4$.

Теорема 2 (необхідні умови локального екстремуму). Якщо диференційовна функція $z=f(x; y)$ має в точці $M_0(x_0; y_0)$ локальний екстремум, то для неї виконуються рівності:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M_0} = 0$$

$$i$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{M_0} = 0 \quad (10.46)$$

Означення 24. Точки, в яких виконуються рівності (10.46), або в яких $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ не існують, називаються критичними або стаціонарними точками для функції $z=f(x; y)$.

Теорема 3 (достатні умови локального екстремуму). Нехай у точці $M_0(x_0; y_0)$ і деякому її околі функція $z=f(x; y)$ має неперервні частинні похідні до третього порядку включно; нехай, крім того, $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M_0} = 0$ і $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{M_0} = 0$. Позначимо

через $A = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{M_0}$, $B = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{M_0}$, $C = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{M_0}$ і $\Delta = AC - B^2$. Тоді:

- 1) функція $z=f(x; y)$ досягає в точці $M_0(x_0; y_0)$ локального максимуму, якщо $\Delta > 0$ і $A < 0$;
- 2) функція $z=f(x; y)$ досягає в точці $M_0(x_0; y_0)$ локального мінімуму, якщо $\Delta > 0$ і $A > 0$;
- 3) функція $z=f(x; y)$ не має в точці $M_0(x_0; y_0)$ локального екстремуму, якщо $\Delta < 0$;
- 4) функція $z=f(x; y)$ може досягати і може не досягати в точці $M_0(x_0; y_0)$ локального екстремуму, якщо $\Delta = 0$ (в цьому випадку потрібно провести додаткові дослідження).

Приклад 20. Дослідити на екстремум функцію $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$.

Розв'язок:

Спочатку знайдемо критичні точки, для чого використаємо необхідні умови (10.46) локального екстремуму.

Так як $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 3$, то маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \text{ розв'язком якої є } \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}.$$

Отже, точка $M_0\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$ – критична точка.

Тепер перевіримо для цієї точки достатні умови локального екстремуму.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{M_0} = 2 = A;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1; \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{M_0} = 1 = B;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2; \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{M_0} = 2 = C.$$

Маємо $\Delta = A \cdot C - B^2 = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0$ і $A = 2 > 0$, а отже, в точці $M_0\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$

задана функція має локальний мінімум і $z_{\min} = f\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right) = -\frac{7}{3}$.

Приклад 21. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Розв'язок:

Знайдемо критичні точки, використовуючи необхідні умови локального екстремуму.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

і, отже, маємо 2 критичні точки $M_1(0;0)$ і $M_2(1;1)$.

$$\text{Знайдемо частинні похідні другого порядку } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

умов локального екстремуму.

$$A_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{M_1} = 6 \cdot 0 = 0; \quad B_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{M_1} = -3; \quad C_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{M_1} = 6 \cdot 0 = 0;$$

$\Delta_1 = A_1 \cdot C_1 - B_1^2 = 0 - (-3)^2 = -9 < 0$ і згідно з теоремою 3 у точці $M_1(0;0)$ задана функція локального екстремуму не має.

Тепер розглянемо, чи виконуються достатні умови локального екстремуму у точці $M_2(1;1)$.

$$A_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{M_2} = 6 \cdot 1 = 6; \quad B_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{M_2} = -3; \quad C_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{M_2} = 6 \cdot 1 = 6;$$

$$\Delta_2 = A_2 \cdot C_2 - B_2^2 = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 27 > 0 \quad \text{і} \quad A_2 = 6 > 0.$$

Згідно з теоремою 3 у точці $M_2(1;1)$ задана функція досягає локального мінімуму і $z_{\min} = f(1;1) = -1$.

Приклад 22. Дослідити на екстремум функцію $z = -x^4 - y^4$.

Розв'язок:

Згідно з теоремою 2 необхідні умови існування локального екстремуму виглядають так:

$$\begin{cases} -4x^3 = 0 \\ -4y^3 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язком цієї системи рівнянь є $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$

Отже, критична точка $M_0(0;0)$.

Знайдемо другі частинні похідні:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -12x^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -12y^2.$$

$$\text{Тоді } A = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{M_0} = 0; \quad B = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{M_0} = 0; \quad C = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{M_0} = 0 \quad \text{і} \quad \Delta = A \cdot C - B^2 = 0.$$

Згідно з теоремою 3 потрібні додаткові дослідження. Проведемо їх:
 $f(0;0)=0$ а для всіх $x \neq 0$ і $y \neq 0$
 $-x^4 < 0$ і $-y^4 < 0$; отже $f(x;y) = -x^4 - y^4 < 0 = f(0;0)$, тобто $f(x;y) < f(0;0)$ для всіх $x \neq 0$ і $y \neq 0$. Згідно з означенням 21 у точці $M_0(0;0)$ задана функція досягає локального максимуму і $z_{\max} = f(0;0) = 0$.

11. НАЙБІЛЬШЕ ТА НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ У ЗАМКНЕНІЙ ОБЛАСТІ

Функція, неперервна в замкненій області D , обов'язково має найбільше і найменше значення в цій області.

Найбільше і найменше значення неперервної у замкненій області функції досягають у внутрішніх точках області (або на межі області), збігаючись відповідно з максимальним або мінімальним значеннями функції.

Тому для пошуку найбільшого і найменшого значень функції в певній замкненій області треба знайти всі внутрішні критичні точки, обчислити в них значення функції, порівняти їх з найбільшим і найменшим значеннями функції на межі області. Найбільше і найменше з цих значень будуть найбільшим та найменшим значеннями неперервної функції в даній замкненій області.

Приклад 23. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = (x - y^2) \sqrt[3]{(x-1)^2}$ в області, обмеженій лініями $y^2 = x$, $x = 2$.

Розв'язок:

$$z'_x = \sqrt[3]{(x-1)^2} + (x-y^2) \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)}} (3(x-1) + 2(x-y^2)) = \frac{1}{3} \frac{5x - 2y^2 - 3}{\sqrt[3]{(x-1)}}$$

$$z'_y = -2y \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}.$$

Для знаходження стаціонарних точок прирівнюємо до нуля частинні похідні даної функції. Одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} 5x - 2y^2 - 3 = 0, & x \neq 1, \\ 2y \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2} = 0. \end{cases}$$

Звідси маємо $x=3/5, y=0$, стаціонарна точка $A(\frac{3}{5}, 0)$ належить заданій

області значення функції у ній дорівнює $z(A) = \frac{3\sqrt[3]{20}}{25}$.

Критичними точками для заданої функції є і точки хорди $x=1$, бо в цих точках $z'_x = \infty, z'_y = 0$. У всіх точках цієї хорди $z=0$.

Дослідимо функцію на межі області, яка складається з частини параболи і хорди тієї ж параболи.

На параболі, рівняння якої $y^2 = x$, $z = (x - y^2)\sqrt[3]{(x-1)^2}$ функція має вигляд $z \equiv 0$, тобто на цій частині межі області задана функція дорівнює нулю $z=0$.

На хорді, рівняння якої $x=2$, функція має вигляд $z = 2 - y^2$. Значення цієї функції в стаціонарній точці $y=0$ і в граничних точках $y=\sqrt{2}, y=-\sqrt{2}$ відповідно дорівнюють $z(0)=2, z(\sqrt{2})=0, z(-\sqrt{2})=0$. Порівнюючи всі знайдені значення функції визначимо, що задана функція має найбільше значення $z=2$ (досягається в точці $(2;0)$) і найменше значення $z=0$ (досягається на хорді $x=1$ і на частині параболи $y^2 = x$).

12. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1. Знайти та побудувати область визначення функції:

1.	$z = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+y}$	16.	$z = \ln(y^2 - 2x) + 4$
2.	$z = \arcsin \frac{x}{y^2 + 1}$	17.	$z = \ln \frac{9}{x^2 + y^2 - 4}$
3.	$z = \sqrt{36 - 9y^2 - 4x^2}$	18.	$z = \arccos(x^2 - y)$
4.	$z = \ln(y^2 - 2x - 6)$	19.	$z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 - 2x + y^2}}$
5.	$z = \sqrt{y - 2x^3}$	20.	$z = \ln(xy - 1)$
6.	$z = \ln(-3x + 4y - 12)$	21.	$z = \arcsin\left(\frac{2y}{1+x^2} - 1\right)$
7.	$z = \sqrt{(2x - y)(y + x)}$	22.	$z = \sqrt{3 + x + y^2}$
8.	$z = \arcsin(1 - x) + \arccos(1 + y)$	23.	$z = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$

9.	$z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$	24.	$z = \ln x + \ln(y-x)$
10.	$z = \ln(2x^2 - y + 6)$	25.	$z = \sqrt{x-2}\sqrt{y}$
11.	$z = \arccos \frac{y-2}{x}$	26.	$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 8y}$
12.	$z = \frac{1}{\sqrt{x-3}} + \frac{1}{\sqrt{2-y}}$	27.	$z = \sqrt{3x-y} + \sqrt{2-y}$
13.	$z = \sqrt{1-(x^2 + y^2)}$	28.	$z = \sqrt{36 + 9y^2 - 4x^2}$
14.	$z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}$	29.	$z = \ln(\sqrt{x} - y)$
15.	$z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 4)(9 - x^2 - y^2)}$	30.	$z = \arccos(x + y)$

Завдання 2. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

1.	a)	$z = 3x^{14} - 2y^{11} + 4x^3y^4 - x + 7y + 6$
	б)	$z = 7^{2x-y} \cdot \sin y^{10}$
	в)	$z = \frac{3x^3 - 9y}{x^7 + y^7}$
2.	a)	$z = x^{15} \cdot y^3 - 3x^6 - 6y^8 + 5x + 9y + 12$
	б)	$z = (x^4 - 3y^2)^5$
	в)	$z = \frac{\cos y^3}{7x^6}$
3.	a)	$z = 6y^3 - xy^4 + 4y - 2x^5y^6$
	б)	$z = y \cdot e^{x^4 - 3y^3}$
	в)	$z = \frac{\sin y^4}{x^3}$
4.	a)	$z = x^6y^6 - 3y^3 - 8x^5 - 2x^7y^7 - 6$
	б)	$z = y^2 \cdot \operatorname{tg} x^2$
	в)	$z = e^{\cos(x^3 - 8xy)}$
5.	a)	$z = 3x^3y^2 - 3x^3 + 4y^6 - 8x + 9y - 13$

	б)	$z = y^7 \cdot \sqrt{\cos x^2}$
	в)	$z = 11^{\sin x + 14y^3}$
6.	а)	$z = 8x - 5y - 3x^4y^6 + 5xy - 14$
	б)	$z = e^{5y} \cdot 4^{4y-3x}$
	в)	$z = \ln \sqrt[3]{7 - 2x^6 - 3y^4}$
7.	а)	$z = x^3 - 5y^2 + 7x^6y^8 - 6y + 11$
	б)	$z = \arcsin e^{x^2 - 4xy + 2}$
	в)	$z = \frac{y^4 - 2x}{1 + e^x}$
8.	а)	$z = 12 - 13x - 14y + 3x^5y^3 + 8y^8$
	б)	$z = e^x \cdot (\cos y + x \sin y)$
	в)	$z = \frac{2(x + \sin y)}{4 - x \cdot \sin y}$

9.	а)	$z = x^4y^9 - 2x^5 + 4y^5 - 7 + 7x - 12y$
	б)	$z = x^5y^7 \cdot \operatorname{ctg}(x^4 - 3y^4)$
	в)	$z = \operatorname{arctg} \cos(x^3y^4)$
10.	а)	$z = 12x - 11y - 3x^4y^5 + 4x^3 - 5y^2 + 2$
	б)	$z = \frac{4xy}{x^2 + y^2}$
	в)	$z = \cos(x^2 + 2y^6) \cdot e^{x^5 \cdot y}$
11.	а)	$z = 5 - 3x + 7y + 6x^3y^5 - 8y^2$
	б)	$z = \operatorname{arctg} 2^{x+4y}$
	в)	$z = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$
12.	а)	$z = 2x^2 - 3x^3y^5 - 6y^2 + 5x + 9y$
	б)	$z = \ln(\sqrt{x} + 4x^8y^4)$
	в)	$z = \frac{x^4 - 8y^3}{4x + 5y}$
13.	а)	$z = 4x^9 + 3x^7y^3 - 10x^3y^2 - y^9 - 11xy + 13$
	б)	$z = 3xy^2 \cdot \cos(4x + 9y)$
	в)	$z = \frac{x^4 + 8xy^3}{x^2 - 2y^2}$

14.	a)	$z = 9 - 4x^9 + 6y^7 - 3x^2y^3 - 19x$
	б)	$z = 2y\sqrt{x} \cdot (3^y + x^4)$
	в)	$z = \frac{4x^5 - 2y^2}{(x - y)^5}$
15.	a)	$z = x^4 + 3y^4 - 2x^5y^2 - 4xy + 26$
	б)	$z = \operatorname{tg} \sqrt{e^x + \arcsin y}$
	в)	$z = \frac{e^{x-3y}}{2x + 5y}$
16.	a)	$z = 6x + 5y - 4x^{11}y^5 + 13y^3 - x^6$
	б)	$z = \sqrt{7x - 8y} \cdot \cos(2x^4 + 2y^3 + 5)$
	в)	$z = \frac{4}{x^6 - y^7}$

17.	a)	$z = 3x + 9 - 6y^4 + 3x^{13} - 7x^3y^5$
	б)	$z = 8^{\ln(xy^4 + 2)}$
	в)	$z = \frac{2y^2 - x}{y^4 - 2x^3}$
18.	a)	$z = 4x^3 - 3x^3y^2 + 4x^4y^5 - y^311x$
	б)	$z = \operatorname{ctg}(x^3 - 2e^y)$
	в)	$z = \frac{x^4 - 8xy^3}{x - 2y}$
19.	a)	$z = 3x + 2y - 5xy + x^6 - y^{14} + 4$
	б)	$z = \arcsin x^4 \cdot \ln(2x - 5y)$
	в)	$z = \frac{e^x}{xy^4 + 4}$
20.	a)	$z = 2 - 8x + 9y - 4x^3y^8 + 3x^6 - y^7$
	б)	$z = e^{3x-9y^3} \cdot \operatorname{ctg}(x^7 \cdot y^5)$
	в)	$z = \frac{5x - y^5}{4xy - 3}$
21.	a)	$z = x^5 + y^5 - 5x^3y^3 - 14x + 4y + 9$
	б)	$z = e^{2x^2+y^2} \cdot \cos(x - y)$

	B)	$z = \frac{x - y}{(x + y)^4}$
22.	a)	$z = 22 - 4x^2y^7 + 11x^3 - 8y^8 + 7xy$
	б)	$z = 2^x \cdot (x^3 + 6xy^4)$
	B)	$z = \frac{e^{x^2 - y^2}}{x + y}$
23.	a)	$z = 10 - 2x + 16y - 4x^6y^7 - 3y^9$
	б)	$z = 3^{x-y} \cdot e^{5x^3y}$
	B)	$z = \frac{3 - 2x^2y^3}{3x^4 - 5y^2}$
24.	a)	$z = 7x + 6y - 10x^3 - 9y^4 + x^2y^7 + 3$
	б)	$z = \frac{\sin y - x}{3x + 5y^2}$
	B)	$z = \sqrt{y} \cdot \arctg x^2$

25.	a)	$z = 6x^3y^4 - 13x^3 - 20y^4 - 19y + 1$
	б)	$z = (x + y)^4 \cdot e^{2x-4y}$
	B)	$z = \frac{3x^3 - 2y^3}{7 + x}$
26.	a)	$z = 2x^8y^7 - 3x^4 - 6y^2 - 5x + 8y$
	б)	$z = \frac{(x - 2y)^4}{3x^2 - y^2}$
	B)	$z = \sqrt{13 - 2e^y + 3x^4y^3}$
27.	a)	$z = 10 - x^{10} \cdot y^{11} + 9y + 8x^3 - 5y^5$
	б)	$z = 4^{x+y} \cdot \tg y^7$
	B)	$z = \frac{2y - 3x^2}{y + 2x}$
28.	a)	$z = 15x^2y - 40x + 13y - x^9y^{10} + 6x^3$
	б)	$z = \tg \sqrt{3x^5 + 2y^3}$
	B)	$z = \frac{3x}{x^6 - 4y^6}$

29.	a)	$z = 9x - 12y - 3x^7 y^{10} - 13x^2 - 5y^3$
	б)	$z = \sin \frac{y}{x} \cdot e^{x^4 y}$
	в)	$z = \frac{1 + 6x^2}{4x^6 y + 5}$
30.	a)	$z = x^5 \cdot y^2 - 7y^4 - 2x^6 + 5x - 4y + 2$
	б)	$z = y \ln \operatorname{tg} \frac{y}{x}$
	в)	$z = \frac{2}{x^3 + 2y^3}$

Завдання 3. З'ясувати, чи задовольняє функція $z = f(x; y)$ даному рівнянню:

1.	$z = x \cdot 3^{\frac{x}{y^2}}$	$2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$
2.	$z = x^3 \cdot \sin \frac{y}{x^2}$	$x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = 3z$
3.	$z = e^{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
4.	$z = (x + y) \cdot e^{\frac{\delta}{\delta}}$	$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$
5.	$z = \cos \sqrt{x^2 + y^2}$	$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
6.	$z = e^{\frac{x}{y}} \cdot \ln y$	$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{\ln y}$
7.	$z = \frac{y^2}{3x} + 2^{xy}$	$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^{20} = 0$
8.	$z = x \cdot \sin \frac{y}{x} - x^2 - y^2$	$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$

9.	$z = \frac{x^2}{y^2}$	$2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$
10.	$z = \frac{y^2}{3x} + \sin(xy)$	$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$
11.	$z = \operatorname{ctg}(xy) + x$	$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = x$
12.	$z = y \cdot 10^{x^2 - y^2}$	$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot z$
13.	$z = \frac{y}{\cos(x^2 - y^2)}$	$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$
14.	$z = x + \operatorname{arctg}(xy)$	$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = x$
15.	$z = (x + y) \cdot \cos \frac{x}{y}$	$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$
16.	$z = y \cdot \cos(x - y)$	$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y}$
17.	$z = \frac{x^2}{2y} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$	$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 y$
18.	$z = y \cdot e^{x^2 - y^2}$	$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$
19.	$z = x \cdot e^{\frac{y}{x}} - x^2 - y^2$	$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$
20.	$z = \operatorname{tg}(x^2 + y^2)$	$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
21.	$z = x + \arcsin(xy)$	$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = x$
22.	$z = x^2 \cdot 5^{\frac{y}{x^2}}$	$x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$
23.	$z = \arcsin \frac{x - y}{x + y}$	$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
24.	$z = \ln \frac{x}{y} + x^3 - y^3$	$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 3(x^3 - y^3)$

25.	$z = 8^{\sqrt{x^2+y^2}}$	$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
26.	$z = y \cdot \sin(x^2 - y^2)$	$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xz$
27.	$z = \frac{y}{4^{x^2-y^2}}$	$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$
28.	$z = y \cdot \operatorname{tg}(x^2 - y^2)$	$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xz$
29.	$z = \frac{y^2}{3x} + \sqrt{xy}$	$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$
30.	$z = x \cdot 7^{\frac{y}{x^2}}$	$x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = z$

Завдання 4. Знайти частинні похідні першого порядку та повний диференціал функції:

1.	$z = \arcsin \sqrt{x^2 + y}$	16.	$z = \ln \cos(y^x)$
2.	$z = \operatorname{arctg}(x^2 + \sqrt{xy})$	17.	$z = y \operatorname{arctg} \frac{y+2}{x}$
3.	$z = \ln(xy^2 - \sin y)$	18.	$z = \sin 3^{xy^2}$
4.	$z = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{xy}$	19.	$z = \operatorname{tg} x^{2y+1}$
5.	$z = \cos \frac{x^2 + y}{x - y^2}$	20.	$z = \ln \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right)$
6.	$z = 2^{\operatorname{tg} \frac{x}{y}}$	21.	$z = \sqrt[4]{x-y} \cos^2 y$
7.	$z = \frac{\ln(x+y)}{\ln x - \ln y}$	22.	$z = \frac{x^3 y - x}{y^3 - 2xy}$
8.	$z = \cos \frac{x+y}{xy}$	23.	$z = \sqrt[3]{\frac{x-y}{x+y}}$
9.	$z = \sin(\ln(x^2 + xy))$	24.	$z = \operatorname{arctg}(x\sqrt{y})$

10.	$z = e^{\frac{\operatorname{tg} x}{y}}$	25.	$z = x^2 \sin^2 y + y \operatorname{tg} x$
11.	$z = \sqrt{x} \cdot e^{x^2+y^3}$	26.	$z = \cos \sqrt{xy^3}$
12.	$z = \operatorname{tg} \sqrt{\frac{x}{y^3}}$	27.	$z = e^{x^2} \cdot \sqrt{\frac{y}{x}}$
13.	$z = \ln(\sin e^{xy})$	28.	$z = \operatorname{tg}(xy \ln x)$
14.	$z = \operatorname{tg} \ln \frac{x}{y}$	29.	$z = \sin(xy) + \operatorname{tg} \frac{x}{y}$
15.	$z = \frac{x\sqrt{y} - 2}{y^2 + y\sqrt{x}}$	30.	$z = \frac{\cos xy}{x + y}$

Завдання 5. Обчислити наближено значення функції $z=f(x;y)$ у заданій точці $(x_1;y_1)$, якщо використати значення функції у точці $(x_0;y_0)$:

№ п/п	$z=f(x;y)$	$(x_1;y_1)$	$(x_0;y_0)$
1	$z = \sqrt{5e^x + y^2}$	(0.02;2.03)	(0;2)
2	$z = \sqrt{x^y + \ln x}$	(1.04;1.99)	(1;2)
3	$z = \sqrt{\sin^2 x + 8e^y}$	(1.55;0.015)	$(\frac{\pi}{2};0)$
4	$z = x^y$	(0.97;1.05)	(1;1)
5	$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$	(0.95;1.02)	(1;1)
6	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$	(4.05;3.07)	(4;3)
7	$z = \ln(x^3 + y^3)$	(0.09;0.99)	(0;1)
8	$z = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$	(1.02;0.05)	(1;0)
9	$z = \sqrt{x^3 + y^3}$	(1.02;1.97)	(1;2)
10	$z = x^y$	(1.04;.2.03)	(1;2)
11	$z = x^3 \cdot y^2$	(1.05;0.98)	(1;1)
12	$z = e^{xy}$	(1.02;0.93)	(1;1)
13	$z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$	(4.01;2.99)	(4;3)

14	$z = \frac{x+3y}{y-3x}$	(1.98;3.97)	(2;4)
15	$z = \ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1)$	(0.99;1.01)	(1;1)
16	$z = (2 - \sqrt{x})^y$	(1.03;2.98)	(1;3)
17	$z = \frac{10}{x^3 + y^3}$	(5.02;4.96)	(5;5)
18	$z = \ln(\sqrt{x} - \sqrt[3]{y})$	(4.04;1.03)	(4;1)
19	$z = \sqrt[7]{x^4 + y^5 + 15}$	(2.97;2.02)	(3;2)
20	$z = y^x$	(2.02;1.04)	(2;1)
21	$z = \frac{x}{x^4 + y^2}$	(1.97;3.03)	(2;3)
22	$z = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{y}$	(0.96;1.02)	(1;1)
23	$z = \ln(\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{y} - 1)$	(1.02;0.96)	(1.1)
24	$z = \sqrt[5]{x^3 + y^2 + 1}$	(3.03;2.04)	(3;2)
25	$z = \ln(x^3 + \sqrt[3]{y} - 8)$	(1.98;0.97)	(2;1)
26	$z = \sqrt{x} \cdot y^x$	(4.02;0.97)	(4;1)
27	$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$	(1.1;0.9)	(1;1)
28	$x = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$	(1.05;2.99)	(1;3)
29	$z = \sqrt{\cos^2 x + 3e^y}$	(0.04;0.02)	(0;0)
30	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$	(2.99;4.01)	(3;4)

Завдання 6. Знайти частинні похідні функції z , яка задана неявно:

Завдання 7

1	Дана функція $z = \arctg \frac{u}{v}$, де $u = x \sin y$, $v = x \cos y$. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.
2	Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{dz}{dx}$, якщо $z = \arcsin \frac{x}{y}$, де $y = 1 + x^2$.
3	Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z = f(u, v)$, де $u = \ln(x^3 - y^3)$, $v = x^3 y^2$.
4	Знайти повну похідну $\frac{dz}{dx}$ функції $z = x \sin v \cos w$, якщо $v = \ln(x^2 + 1)$, $w = 1 - x^2$.

1.	$yz = x \operatorname{tg} z + yx^2$;	16.	$(x^2 + y^2)^2 - z^4 = z + 7$;
2.	$x^2 z + y^2 z = 4z^3$;	17.	$4z^3 + xy^2 z - 2x^3 y^3 + 2 = 0$;
3.	$z^3 = x^3 - 3xyz + y^3$;	18.	$ze^y = xe^z + ye^x$;
4.	$(2 - z^2)x^2 - y^2 z = 0$;	19.	$z = \ln(xz + \sin y)$;
5.	$z = \operatorname{arctg} \frac{yz}{x}$;	20.	$z^3 = \sqrt{z^2 + y^2} - xy$;
6.	$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 4)^2 = 6$	21.	$z^2 = (x - 3)^2 + (y + 2)^2$;
7.	$3x^4 - 4y^3 z + 4xyz^3 - 3 = 0$;	22.	$2x^3 + yz^3 - 5xyz^2 - 25 = 0$;
8.	$4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z$;	23.	$y^3 + 2xy^2 z - 3x^2 z^2 + 17 = 0$;
9.	$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 9xyz$;	24.	$x^3 z^2 - 4y^3 z + 2xy^2 - 8 = 0$;
10.	$z = \frac{4}{x^2 + y^2 + z^2}$;	25.	$z^3 = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} + \frac{x + y}{z}$;
11.	$z = \frac{xy}{y - z} + \frac{yz}{x - z}$;	26.	$z = \arcsin \frac{x^2 + z}{y}$;
12.	$x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$	27.	$z^2 = \sqrt{xy + z} - 4$;
13.	$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = 3$	28.	$x^2 + y^2 - xz - yz^3 = 0$;
14.	$(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5$;	29.	$3(x^2 - z)y^2 = z^2$;
15.	$(x^2 - y^2 + z^2)^2 = 2xyz$;	30.	$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = (x^2 + y^2)^3 + 1$;
5	Знайти $\frac{du}{dt}$, якщо $u = \operatorname{tg} \frac{y}{x}$, $x = \ln t$, $y = t^3$.		

6	Знайти $\frac{du}{dt}$, якщо $u = x^2 - y^2$, де $x = e^t$, $y = \sin t$.
7	Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = \arctg \frac{x}{y}$, де $x = e^{3t} + 1$, $y = e^{3t} - 1$.
8	Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z = \ln \frac{u+v}{u-v}$, де $u = x$, $v = x^2 - y^2$.
9	Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = \arctg \frac{y}{x}$, де $x = e^{2t} + 1$, $y = e^{2t} - 1$.
10	Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{dz}{dx}$, якщо $z = \arctg \frac{x+1}{y}$, де $y = e^{(x+1)^2}$.
11	Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z = \ln \sqrt{\frac{u}{v}}$, де $u = a + by$, $v = ax - by$.
12	Знайти dz , якщо $z = f(u, v)$, де $u = \sin \frac{x}{y}$, $v = \sqrt{\frac{x}{y}}$.
13	Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z = f(u, v)$, де $u = \ln(x^2 - y^2)$, $v = xy^2$.
14	Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z = \arctg \frac{u}{v}$, де $u = x \sin y$, $v = x \cos y$.
15	Знайти $\frac{du}{dt}$, якщо $u = \frac{z}{x^2 + y^2}$, де $x = 2 \cos t$, $z = t \cdot 2$, $y = 2 \sin t$.
16	Знайти $\frac{du}{dx}$, якщо $u = \lg(3x + 2y^2 - z)$, де $y = \frac{1}{x}$, $z = x$.
17	Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{dz}{dx}$, якщо $z = \arcsin \frac{x^3}{y}$, де $y = 1 - x^2$.
18	Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z = f(u, v)$, де $u = \ln(x^2 + y^3)$, $v = x^3 y^4$.
19	Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z = u \ln \frac{v}{u}$, де $u = \sin^3 xy$, $v = \sin(xy)^4$.
20	Знайти $\frac{dz}{dx}$ якщо $z = \arcsin \frac{x^4}{y}$, де $y = x^2 + x$.
21	Знайти повну похідну $\frac{dz}{dx}$ функції $z = x \sin v \cos w$, якщо $v = \ln(x^2 + 1)$, $w = -\sin x^2 + 1 - x$.
22	Знайти $\frac{du}{dt}$, якщо $u = \cos \frac{y}{x}$, $x = \ln \sin t$, $y = t^3$.
23	Знайти $\frac{du}{dx}$, якщо $u = \arctg(xy)$, $y = \sin x$.
24	Знайти $\frac{du}{dt}$, якщо $u = x^2 + 4xy + y^2$, де $x = e^t$, $y = \sin t$.
25	Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z = \ln \frac{u-v}{u+v}$, де $u = \lg x$, $v = x^2 + y^2$.
26	Знайти dz , якщо $z = f(u, v)$, де $u = \sin \frac{x}{y}$, $v = \cos \sqrt{\frac{x}{y}}$.

27	Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z=f(u,v)$, де $u=\ln(x^2 + \sin y^2)$, $v=xy^2$.
28	Знайти dz , якщо $x=u+v$, $y=u^2+v^2$, $z=u^3+v^3$.
29	Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z=\cos(\sin \frac{x}{y})$, $x=\sin t$, $y=(t^2+1)^{\frac{1}{2}}$.
30	Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z=\operatorname{ctg} \frac{u}{v}$, де $u=xsiny$, $v=xcosy$.

Завдання 8. Знайти частинні похідні другого порядку:

1.	a) $z = \frac{x^2}{y^2}$;	б) $z = \ln(\sqrt{x^2 + y^2} + x)$;
2.	a) $z = \frac{x-y}{x+y}$;	б) $z = e^{-\frac{x^3}{y}}$;
3.	a) $z = \frac{y}{x} \sin y$;	б) $z = \frac{x^2}{\operatorname{tg} y}$;
4.	a) $z = \frac{y}{x} \sin y$;	б) $z = e^{\frac{x}{y+2}}$;
5.	a) $z = \ln(\sqrt{x} + y^2)$;	б) $z = \sqrt[3]{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}$;
6.	a) $z = \sin(x \cdot e^{-y})$;	б) $z = \frac{x^2 - y}{x+1}$;
7.	a) $z = (\sqrt{x^3} + xy^2)$;	б) $z = 5^{x-\frac{2}{y}}$;
8.	a) $z = \sqrt{x^2 - 3xy}$;	б) $z = \frac{y}{x^2} \operatorname{arctg} y$;
9.	a) $z = \sqrt[3]{xy^2} - \frac{x^2}{y}$;	б) $z = 2^{xy^2}$;
10.	a) $z = \sin(x + 2y^2)$;	б) $z = y^2 \ln(x - y)$;
11.	a) $z = \frac{\ln x}{x+y}$;	б) $z = \sin(x^2 y)$;
12.	a) $z = e^{y^2} \operatorname{ctg} x$;	б) $z = \ln(x^3 + y)$;
13.	a) $z = \sqrt[3]{\frac{y^2}{x}} - x^2 y$;	б) $z = x \operatorname{arctg} y$;

14.	a) $z = \frac{\sin x}{x^2 + y}$;	б) $z = 2^{\frac{x^2}{y}}$;
15.	a) $z = x^2 \operatorname{tg} y$;	б) $z = e^{\frac{x}{y^4}}$;
16.	a) $z = \sqrt{3xy + 2y^2}$;	б) $z = e^{x^2}(x - y^2)$;
17.	a) $z = \sin \sqrt{xy}$;	б) $z = y \ln \frac{x}{y}$;
18.	a) $z = \sqrt{\frac{x}{y} - y}$;	б) $z = \frac{e^x}{x + y^2}$;
19.	a) $z = \cos\left(\frac{\ln x}{y}\right)$;	б) $z = (2 + y)^{x^2}$;
20.	a) $z = \cos(x^2 y)$;	б) $z = \frac{e^{x^2}}{y}$;
21.	a) $z = \frac{x - y}{x^2 y^2}$;	б) $z = e^{\frac{x}{y}}$;
22.	a) $z = \frac{\cos x}{x \sin y}$;	б) $z = \ln\left(x^2 - \frac{1}{y}\right)$;
23.	a) $z = 2^{\frac{x^2}{y^3}}$;	б) $z = x \ln \frac{y}{x}$;
24.	a) $z = \sin(xy + 2y^2)$;	б) $z = e^{2x^2 y}$;
25.	a) $z = \operatorname{tg} \frac{2x}{y}$;	б) $z = (x + y)e^{xy}$;
26.	a) $z = \ln(y + \sqrt{y^2 + x})$;	б) $z = \cos \frac{2y}{x}$;
27.	a) $z = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{y}$;	б) $z = (x + 2y) \ln x$;
28.	a) $z = y \cdot \sqrt{x^2 + y}$;	б) $z = \sin(xy + 2y^2)$;
29.	a) $z = e^{2x^2 - 5xy}$;	б) $z = (y + 2) \cos(xy)$;
30.	a) $z = (x + y^2) \cdot e^x$;	б) $z = (x - 2) \sin(x^2 y)$.

Завдання 9. Для даної поверхні $F(x, y, z)=0$ записати рівняння дотичної площини і нормалі у точці A :

1.	$x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ $A(1;2;-1)$	16.	$x^2 + y^2 - xz - yz = 0;$ $A(0;2;2)$
2.	$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = 3;$ $A(1;1;1)$	17.	$z = \sqrt{xy} - 4;$ $A(9;4;2)$
3.	$(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5;$ $A(1;1;2)$	18.	$3(x^2 - 1)y^2 = z^2;$ $A(2;1;3)$
4.	$z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy;$ $A(3;4;-7)$	19.	$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = (x^2 + y^2)^3 + 1;$ $A(1;1;1)$
5.	$y = xtgz;$ $A\left(1;1;\frac{\pi}{4}\right)$	20.	$(x^2 + y^2)^2 - z^4 = z + 7;$ $A(1;2;2)$
6.	$x^2z + y^2z = 4;$ $A(-2;0;1)$	21.	$z = \frac{x}{y} - \frac{y}{x};$ $A(1;1;0)$
7.	$z = x^3 - 3xy + y^3;$ $A(1;1;-1)$	22.	$z = xe^y + ye^x;$ $A(1;0;1)$
8.	$(2 - z^2)x^2 - y^2 = 0;$ $A(1;1;1)$	23.	$z = \ln(x + \sin y);$ $A(1;0;0)$
9.	$z = acrtg \frac{y}{x};$ $A\left(1;1;\frac{\pi}{4}\right)$	24.	$(x^2 - y^2 + z^2)^2 = 2xyz;$ $A(1;2;1)$
10.	$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 4)^2 = 6;$ $A(3;0;2)$	25.	$z^2 = (x - 3)^2 + (y + 2)^2;$ $A(1;-2;2)$
11.	$3x^4 - 4y^3z + 4xyz^3 - 3 = 0;$ $A(1;1;1)$	26.	$2x^3 + yz^3 - 5xyz^2 - 25 = 0;$ $A(2;-1;1)$
12.	$4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z;$ $A(2;3;6)$	27.	$y^3 + 2xy^2z - 3x^2z^2 + 4 = 0;$ $A(-1;1;1)$
13.	$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 3;$ $A(1;1;1)$	28.	$x^3z^2 - 4y^3z + 2xy^2 + 14 = 0;$ $A(-1;1;2)$
14.	$z = \frac{4}{x^2 + y^2};$ $A(1;1;2)$	29.	$4z^3 + xy^2z + 2x^3y^3 + 2 = 0;$ $A(1;-1;0)$
15.	$z = \frac{xy}{y - x} + 1;$ $A(1;2;3)$	30.	$z = \arcsin \frac{x^2}{y};$ $A(1;2;\frac{\pi}{6})$

Завдання 10. Знайти

- а) градієнт функції $z = f(x, y)$ у точці А;
 б) похідну функції $z = f(x, y)$ у точці А за напрямком вектора $\vec{d}$.

1.	$z = x^2 \sqrt{y} - y^2 \sqrt{x},$	$\vec{a} = (-4; -3);$	$A(1; 1);$
2.	$z = \sqrt{x^2 + y^2},$	$\vec{a} = (-1; -2);$	$A(2; 1);$
3.	$z = \ln(ye^x + e^y),$	$\vec{a} = (-5; 12);$	$A(0; 0);$
4.	$z = 13 \operatorname{arctg}(\sqrt{xy}),$	$\vec{a} = (3; -4);$	$A(3; 1);$
5.	$z = \frac{x}{y} - \frac{y}{x},$	$\vec{a} = (-4; -3);$	$A(1; 1);$
6.	$z = \arcsin \frac{x^2}{y},$	$\vec{a} = (1; -1);$	$A(1; 2);$
7.	$z = \ln(x^2 - y^3),$	$\vec{a} = (12; -5);$	$A(2; 1);$
8.	$z = xe^y + ye^x,$	$\vec{a} = (4; -3);$	$A(1; 0);$
9.	$z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},$	$\vec{a} = (2; -1);$	$A(-4; 3);$
10.	$z = x^3 - 2xy + y^2,$	$\vec{a} = (5; 12);$	$A(-2; 1);$
11.	$z = \ln(xy^2 + 1),$	$\vec{a} = (3; 4);$	$A(0; 1);$
12.	$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$	$\vec{a} = (-4; -3);$	$A(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2});$
13.	$z = \frac{1}{x^2 - y^2},$	$\vec{a} = (-1; -2);$	$A(4; 2);$
14.	$z = \arccos \frac{2y}{x^2},$	$\vec{a} = (-5; 12);$	$A(2; 1);$
15.	$z = \ln(x + e^y),$	$\vec{a} = (3; -4);$	$A(0; 0);$
16.	$z = \operatorname{arctg}(x^2 y),$	$\vec{a} = (-4; -3);$	$A(-1; \sqrt{3});$
17.	$z = x^3 + xy + y^4,$	$\vec{a} = (1; -1);$	$A(-2; 1);$
18.	$z = \frac{\arcsin x^2}{y},$	$\vec{a} = (12; -5);$	$A(\frac{1}{\sqrt{2}}; 1);$
19.	$z = \ln(x^3 y^2 + 1),$	$\vec{a} = (4; -3);$	$A(1; -1);$
20.	$z = \frac{\sqrt{x}}{\operatorname{arctgy}},$	$\vec{a} = (2; -1);$	$A(1; 1);$

21.	$z = \frac{\sqrt{xy}}{x+y},$	$\bar{a} = (5;12);$	$A(2;2);$
22.	$z = \arcsin \frac{y^2}{x},$	$\bar{a} = (3;4);$	$A(2;-1);$
23.	$z = \ln(x + \sin y),$	$\bar{a} = (-4;-3);$	$A(1;0);$
24.	$z = \frac{\arcsin y}{\sqrt{x}},$	$\bar{a} = (-1;-2);$	$A(\frac{1}{4}; \frac{1}{2});$
25.	$z = \frac{\arctg x}{\sqrt{y}},$	$\bar{a} = (-5;12);$	$A(1;1);$
26.	$z = \frac{\arccos \frac{1}{x}}{y},$	$\bar{a} = (3;-4);$	$A(\frac{1}{2}; \frac{1}{2});$
27.	$z = \ln(2y + e^x),$	$\bar{a} = (-4;-3);$	$A(0;0);$
28.	$z = \arctg(x^2 y^2),$	$\bar{a} = (1;-1);$	$A(1;-1);$
29.	$z = \arccos \frac{2x}{y^2}$	$\bar{a} = (12;-5);$	$A(1;-2);$
30.	$z = \ln(x^2 - y^3),$	$\bar{a} = (4;-3);$	$A(2;1);$

Завдання 11. Знайти екстремуми функції:

1.	а) б)	$z = 4x^2 + 6xy - 3y^2 + 4x + 6y + 3$ $z = 2x^3 + 12xy^2 - 4y^3 - 9x^2 - 18y^2 + 2$
2.	а) б)	$z = x^2 - 4xy + 5y^2 + 2x + 4y - 2$ $z = 2x^3 - 12xy^2 - 8y^3 + 21x^2 - 12y^2 + 1$
3.	а) б)	$z = -4x^2 + 2xy - 2y^2 + 4x + 6y - 4$ $z = -7x^3 - 3xy^2 + 2y^3 + 24x^2 + 12y^2 - 3$
4.	а) б)	$z = x^2 - 4xy + 5y^2 + 2y + 5$ $z = -4x^3 - 6xy^2 + y^3 + 18x^2 + 9y^2 - 2$
5.	а) б)	$z = -3x^2 + 4xy - 2y^2 + 2x + 4y - 2$ $z = -10x^3 + 12xy^2 - 16y^3 + 9x^2 - 36y^2 - 1$

6.	a) б)	$z = x^2 - 4xy + 5y^2 - 2x - 2$ $z = -4x^3 + 6xy^2 - 3y^3 + 6x^2 - 3y^2 + 3$
7.	a) б)	$z = -2x^2 + 4xy - 3y^2 - 4x - 2y + 1$ $z = -4x^3 + 9xy^2 - 6y^3 + 12x^2 - 9y^2 - 2$
8.	a) б)	$z = x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x + 6y - 2$ $z = -5x^3 + 12xy^2 - 8y^3 + 12x^2 - 12y^2 + 2$
9.	a) б)	$z = -2x^2 + 4xy - 3y^2 + 4x + 6y + 3$ $z = -2x^3 + 4xy^2 - 8y^3 + 5x^2 - 20y^2 - 3$
10.	a) б)	$z = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 4y - 1$ $z = -6x^3 + 12xy^2 - 8y^3 + 15x^2 - 12y^2 + 2$
11.	a) б)	$z = -2x^2 - y^2 + 4x + 6y - 1$ $z = -4x^3 + 18xy^2 - 15y^3 + 6x^2 - 9y^2 + 1$
12.	a) б)	$z = -x^2 + 2xy - 2y^2 + 4x + 6y - 2$ $z = -10x^3 + 36xy^2 + 8y^3 + 21x^2 - 84y^2 + 2$
13.	a) б)	$z = 2x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 2y + 3$ $z = 4x^3 + 6xy^2 + y^3 + 18x^2 + 9y^2 + 2$
14.	a) б)	$z = 5x^2 - 4xy + y^2 + 2y - 10$ $z = -4x^3 + 6xy^2 - 3y^3 - 6x^2 + 3y^2 - 5$
15.	a) б)	$z = 2x^2 - 2xy + y^2 + 2y - 6$ $z = -2x^3 - 12xy^2 - 16y^3 + 27x^2 - 36y^2 + 2$
16.	a) б)	$z = 5x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 2y + 1$ $z = -4x^3 - 9xy^2 + 3y^3 + 24x^2 + 18y^2 - 6$
17.	a) б)	$z = 2x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 4y - 1$ $z = 14x^3 + 12xy^2 - 2y^3 - 15x^2 + 15y^2 + 2$
18.	a) б)	$z = 4x^2 - 6xy + 3y^2 + 4x + 6y - 2$ $z = -2x^3 - 12xy^2 - 4y^3 + 9x^2 + 18y^2 - 7$
19.	a) б)	$z = 2x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 6y - 4$ $z = -7x^3 - 3xy^2 - 2y^3 + 24x^2 + 12y^2 + 2$
20.	a) б)	$z = 3x^2 - 4xy + 2y^2 + 2x + 4y - 6$ $z = -10x^3 + 6xy^2 + 2y^3 + 12x^2 - 3y^2 + 5$
21.	a) б)	$z = 2x^2 - 4xy + 3y^2 - 4x - 2y + 5$ $z = -2x^3 + 12xy^2 + 12y^3 + 3x^2 - 6y^2 - 7$

22.	a) б)	$z = 2x^2 - 6xy + 5y^2 - 2x + 3$ $z = 2x^3 - 12xy^2 - 8y^3 + 21x^2 - 12y^2 + 1$
23.	a) б)	$z = x^2 - 4xy + 2x + 5y^2 + 4y + 1$ $z = -7x^3 - 3xy^2 + 2y^3 + 24x^2 + 12y^2 - 3$
24.	a) б)	$z = -2x^2 + 2xy - y^2 + 4x + 6y - 10$ $z = -4x^3 - 6xy^2 + y^3 + 18x^2 + 9y^2 - 2$
25.	a) б)	$z = x^2 - 4xy + 5y^2 + 2y - 5$ $z = -10x^3 + 12xy^2 - 16y^3 + 9x^2 - 36y^2 - 1$
26.	a) б)	$z = 5x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 10$ $z = -4x^3 + 6xy^2 - 3y^3 + 6x^2 - 3y^2 + 3$
27.	a) б)	$z = -4x^2 + 6xy - 3y^2 + 4x + 6y + 1$ $z = -4x^3 + 9xy^2 - 6y^3 + 12x^2 - 9y^2 - 2$
28.	a) б)	$z = -4x^2 + 2xy - 2y^2 + 4x + 6y + 2$ $z = -5x^3 + 12xy^2 - 8y^3 + 12x^2 - 12y^2 + 2$
29.	a) б)	$z = -3x^2 + 4xy - 2y^2 + 2x + 4y + 3$ $z = -2x^3 + 4xy^2 - 8y^3 + 5x^2 - 20y^2 - 3$
30.	a) б)	$z = -2x^2 + 4xy - 3y^2 - 4x - 2y + 1$ $z = -2x^3 + 4xy^2 - 8y^3 + 5x^2 - 20y^2 - 3$

Завдання 12

Знайти найбільше значення функції.		
1.	$z = x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 5$	у замкненому трикутнику, обмеженому осями координат і прямою $x + y = 4$
2.	$z = x^2 + y^2 - xy + x + y$	у замкненому трикутнику, обмеженому прямими $x = 1, y = 0, x + 3y = 6$
3.	$z = x^2 + y^2 - 4xy - 4$	у квадраті, обмеженому осями координат і прямими $x = 4, y = 4$
4.	$z = x^2 + 4xy - y^2 - 6x + y$	у замкненому трикутнику, обмеженому осями координат і прямою $x + y = 1$
5.	$z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$	у прямокутнику з вершинами $A(1;-3), B(1,2), C(4,2), D(4,-3)$
6.	$z = x^3 + y^3 - 3xy$	у прямокутнику $D \begin{cases} 0 \leq x \leq 2, \\ -1 \leq y \leq 2; \end{cases}$

7.	$z = x - 2y + 5$	у замкненому трикутнику, обмеженому осями координат і прямою $y - x = 1$
8.	$z = x^2 + y^2 - xy - x - y$	у замкненому трикутнику, обмеженому прямою $x + y = 3$ та осями координат
9.	$z = xy$	у колі $x^2 + y^2 \leq 9$
10.	$z = xy^2$	у колі $x^2 + y^2 \leq 1$
11.	$z = y^2 + 2x^2 - 7x$	у замкненій області, обмеженій еліпсом $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$
12.	$z = y + 2x^2 - 3x$	у замкненій області, обмеженій параболою $y = x^2$ та прямою $y = 1$
13.	$z = xy + y^2 - 5y + 2$	у замкненій області, обмеженій параболою $x = y^2$ та прямою $x = 4$
14.	$z = 9x^2 + 2y^2 + 3$	у замкненій області, обмеженій еліпсом $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$
15.	$z = 4x^2 + y^2 - 10x$	у замкненій області, обмеженій гіперболою $x^2 - y^2 = 9$ та прямою $x = 5$
Знайти найменше значення функції.		
16.	$z = x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 5$	у замкненому трикутнику, обмеженому осями координат і прямою $x + y = 4$
17.	$z = x^2 + y^2 - xy + x + y$	у замкненому трикутнику, обмеженому прямими $x = 1, y = 0, x + 3y = 6$
18.	$z = x^2 + y^2 - 4xy - 4$	у квадраті, обмеженому осями координат і прямими $x = 4, y = 4$
19.	$z = x^2 + 4xy - y^2 - 6x + y$	у замкненому трикутнику, обмеженому осями координат і прямою $x + y = 1$
20.	$z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$	у прямокутнику з вершинами $A(1; -3), B(1, 2), C(4, 2), D(4, -3)$
21.	$z = x^3 + y^3 - 3xy$	у прямокутнику $D \begin{cases} 0 \leq x \leq 2, \\ -1 \leq y \leq 2; \end{cases}$
22.	$z = x - 2y + 5$	у замкненому трикутнику, обмеженому осями координат і прямою $y - x = 1$
23.	$z = x^2 + y^2 - xy - x - y$	у замкненому трикутнику, обмеженому прямою $x + y = 3$ та осями координат
24.	$z = xy$	у колі $x^2 + y^2 \leq 9$
25.	$z = xy^2$	у колі $x^2 + y^2 \leq 1$

26.	$z = y^2 + 2x^2 - 7x$	у замкненій області, обмежений еліпсом $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$
27.	$z = y + 2x^2 - 3x$	у замкненій області, обмежений параболою $y = x^2$ та прямою $y = 1$
28.	$z = xy + y^2 - 5y + 2$	у замкненій області, обмежений параболою $x = y^2$ та прямою $x = 4$
29.	$z = 9x^2 + 2y^2 + 3$	у замкненій області, обмежений еліпсом $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$
30.	$z = 4x^2 + y^2 - 10x$	у замкненій області, обмежений гіперболою $x^2 - y^2 = 9$ та прямою $x = 5$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бубняк Т. І. Вища математика : Навчальний посібник/ Т. І. Бубняк. – К. : Новий світ, 2000, 2004.
2. Вища математика: Підручник. У 2-х книгах. Кн.1 : Основні розділи / Г.Й. Призва, В.В. Плахотник, Л.Д. Гординський та ін.; За ред. Г.Л. Кулініча. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К. : Либідь, 2003.
3. Вища математика: Навчальний посібник. У 2-х ч. Ч. 1 : Основні означення, приклади і задачі / Г.Л. Кулініч, Л.О. Максименко, В.В. Плахотник, Г.Й. Призва. – К. : Либідь, 1992.
4. Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах : Лінійна й векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних. Прикладні задачі : Навчальний посібник / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. – К. : Книги України ЛТД, 2009.
5. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч.1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высш. шк., 1986, 2000, 2005.
6. Дубовик В. П. Вища математика. У 3 ч. Ч. 1, 2: Навчальний посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Харків : Веста, 2008; К. : Ігнатекс-Україна, 2013.
7. Овчинников П.П. та ін. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1: / Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М.; За заг. ред. Овчинникова П.П.). – К.: Техніка, 2003.
8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1: Учебное пособие для втузов. – М.: Наука, 1985.
9. Сборник задач по курсу высшей математики / Г.И. Кручкович, Н.И. Гутарина, П.Е. Дюбюк и др. – М.: Высш. шк., 1973.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
1. ОЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ.....	3
2. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ	5
3. ПОВНИЙ ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ	11
4. ПОХІДНА СКЛАДЕНОЇ ФУНКЦІЇ.....	13
5. ПОХІДНА НЕЯВНОЇ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ	15
6. ПОХІДНА ЗА НАПРЯМОМ	16
7. ГРАДІЄНТ ФУНКЦІЇ	18
8. ДОТИЧНА ПЛОЩИНА ТА НОРМАЛЬ ДО ПОВЕРХНІ.....	19
9. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ n -ГО ПОРЯДКУ	21
10. ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ.....	24
11. НАЙБІЛЬШЕ ТА НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ У ЗАМКНЕНІЙ ОБЛАСТІ	27
12. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ	28
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	48