

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ХІМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ДИСЦИПЛІНИ
«ВИЩА МАТЕМАТИКА»
ЗА РОЗДІЛОМ «НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ»
ДЛЯ СТУДЕНТІВ ВСІХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ
ДЕННОЇ ТА ЗАОЧНОЇ ФОРМ НАВЧАННЯ

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики
Протокол № 3 від 17.10.16

Дніпро ДВНЗ УДХТУ 2017

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Вища математика» за розділом «Невизначений інтеграл» для студентів всіх спеціальностей денної та заочної форм навчання / Укл.: Гранкіна Т.О., Поліщук А.В., Шапка І.В. – Д.: ДВНЗ УДХТУ, 2017. – 52 с.

Укладачі: Т.О. Гранкіна
А.В. Поліщук, канд. техн. наук
І.В. Шапка

Відповідальний за випуск В.І. Олевський, д-р техн. наук

Навчальне видання

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Вища математика» за розділом «Невизначений інтеграл» для студентів всіх спеціальностей денної та заочної форм навчання

Укладачі: ГРАНКІНА Тетяна Олександрівна
ПОЛІЩУК Алла Вікторівна
ШАПКА Ірина Віталіївна

Технічний редактор В.П. Синицька
Комп'ютерна верстка В.П. Синицька

Підписано до друку 10.04.17. Формат 60×84¹/₁₆. Папір ксерокс. Друк різнограф.
Умов. друк. арк. 2,35. Обл.-вид. арк. 2,41. Тираж 100 прим. Зам. № 505.
Свідоцтво ДК № 5026 від 16.12.2015

ДВНЗ УДХТУ, просп. Гагаріна, 8, м. Дніпро, 49005

Редакційно-видавничий відділ

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1 ОЗНАЧЕННЯ ТА ВЛАСТИВОСТІ ПЕРВІСНОЇ ФУНКЦІЇ.....	5
2 ОЗНАЧЕННЯ ТА ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА	6
3 ІНТЕГРУВАННЯ ОСНОВНИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ	7
4 ОСНОВНІ ПРАВИЛА ІНТЕГРУВАННЯ	8
5 ТАБЛИЦЯ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ ВІД ОСНОВНИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ	9
6 ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ	11
7 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ІНТЕГРУВАННЯ У СКІНЧЕНОМУ ВИГЛЯДІ.....	17
8 ІНТЕГРУВАННЯ ВИРАЗІВ ВИГЛЯДУ $\frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c}$ і $\frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$	18
9 ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ	19
10 ІНТЕГРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ БІНОМІВ.....	27
11 ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ.....	28
12 ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ	32
13 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ	35
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	52

ВСТУП

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Вища математика» за розділом «Невизначений інтеграл» охоплюють навчальні програми з курсу вищої математики для студентів всіх спеціальностей денної та заочної форм навчання.

В методичних вказівках наведено теоретичний матеріал, який студенти повинні засвоїти при підготовці до практичних занять за розділом «Невизначений інтеграл», а також розглянуто багато прикладів обчислення невизначених інтегралів, які допоможуть студентам краще використовувати теоретичний матеріал.

Студентам слід пам'ятати, що, навіть за наявності чіткої теоретичної схеми при обчисленні невизначеного інтеграла певного типу, в кожному конкретному прикладі треба шукати найпростіший спосіб знаходження інтегралу. Не завжди очевидний метод інтегрування є найкращим. Кожний з прийомів інтегрування має чіткий алгоритм і свою область застосування, але він не завжди єдиний. Зокрема, метод заміни змінної є найпоширенішим та найгнучкішим і, внаслідок цього, одним з найскладніших і найнеоднозначніших. Існує багато інтегралів, які допускають кілька варіантів заміни змінної, і тому не завжди відразу вдається вказати найраціональнішу заміну.

У даній методичній розробці наведені також 30 варіантів індивідуальних завдань, кожний з яких містить 21 завдання на знаходження невизначених інтегралів. Ці завдання можуть використовуватись як на практичних заняттях, так і в якості домашніх завдань. Вони допоможуть також при підготовці до тестування за практичним курсом, модульної контрольної роботи та екзамену.

1 ОЗНАЧЕННЯ ТА ВЛАСТИВОСТІ ПЕРВІСНОЇ ФУНКЦІЇ

Означення 1. Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ (або первісною функції $f(x)$) на проміжку $[a;b]$, якщо для кожного x з цього проміжку

$$F'(x) = f(x),$$

або, що те ж саме, $f(x)dx$ є диференціалом функції $F(x)$, тобто

$$dF(x) = f(x)dx.$$

Наприклад, 1) для функції $f(x) = 5x^4$ первісними є такі функції:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= x^5 \Rightarrow F_1'(x) = 5x^4, \\ F_2(x) &= x^5 + 1 \Rightarrow F_2'(x) = 5x^4, \\ F_3(x) &= x^5 - 2 \Rightarrow F_3'(x) = 5x^4, \\ F_4(x) &= x^5 - 10 \Rightarrow F_4'(x) = 5x^4; \end{aligned}$$

2) первісними функції $f(x) = \sin x$ є функції $F_1(x) = -\cos x$, $F_2(x) = -\cos x + 5$, $F_3(x) = -\cos x - 15$, бо всі наведені функції мають однакову похідну, а саме $\sin x$.

Розглянуті приклади показують, що і у функції $f(x) = 5x^4$ і у функції $f(x) = \sin x$ існує множина первісних, які відрізняються сталим доданком.

Теорема 1. 1). Якщо на деякому проміжку $[a;b]$ функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то і функція $F(x) + C$, де C – будь-яка стала, також є первісною для $f(x)$.

2). Якщо $F(x)$ і $F_1(x)$ – первісні для $f(x)$, то $F_1(x) - F(x) = C$.

Доведення. 1). Якщо $F(x)$ первісна для $f(x)$, $x \in [a;b]$, то за означенням $F'(x) = f(x)$. Але $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x)$, тобто $F(x) + C$ також є первісна для $f(x)$.

2). Припустимо, що $F(x)$ і $F_1(x)$ – первісні для $f(x)$, $x \in [a;b]$, і $\Phi(x) = F_1(x) - F(x)$. Тоді

$$\forall x \in [a;b] \quad \Phi'(x) = F_1'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0,$$

тобто $\Phi'(x) \equiv 0$.

Доведемо, що $\Phi(x) \equiv C$ на $[a;b]$. Припустимо, що це не так, тобто на $[a;b]$ знайшлись дві точки x_1 і x_2 такі, що $\Phi(x_1) \neq \Phi(x_2)$. Тоді, за теоремою Лагранжа, поміж точками x_1 і x_2 існує така точка c , що

$$\Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi'(c)(x_2 - x_1).$$

Але $\Phi'(c) = 0$. Отже, $\Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0$, і тому $\Phi(x_1) = \Phi(x_2)$. Таким чином, ми отримали суперечність, яка показує, що функція $\Phi(x)$ стала на проміжку $[a; b]$, тобто $\Phi(x) \equiv C$. Отже $F_1(x) - F(x) = C$ і $F_1(x) = F(x) + C$ $x \in [a; b]$.

2 ОЗНАЧЕННЯ ТА ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Означення 2. Сукупність усіх первісних для функції $f(x)$, $x \in [a; b]$, називається невизначеним інтегралом для функції $f(x)$ на $[a; b]$ і позначається $\int f(x)dx$.

З цього означення та теореми 1 випливає, що $\int f(x)dx = F(x) + C$, де $F(x)$ – одна з первісних функцій $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$, а C – довільна стала.

Символом $\int$ позначено безпосередньо інтеграл, функція $f(x)$ називається підінтегральною функцією, $f(x)dx$ – підінтегральним виразом, x – змінною інтегрування.

Операцію знаходження усіх первісних функцій для функції $f(x)$ (або, що те ж саме, невизначеного інтеграла від функції $f(x)$) називають *інтегруванням* цієї функції. Операція інтегрування обернена до операції диференціювання.

Зазначимо, що невизначений інтеграл з геометричної точки зору – це множина кривих, кожен з яких називають інтегральною кривою, і будь-яку криву цієї множини можна отримати з будь-якої іншої кривої цієї ж множини паралельним зсувом уздовж осі Oy . І щоб з цієї множини виділити певну інтегральну криву $F(x)$, достатньо задати її значення $F(x_0)$ у будь-якій точці $x_0 \in [a; b]$.

З означення невизначеного інтеграла безпосередньо випливають наступні властивості:

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$ – Похідна від будь-якої первісної функції невизначеного інтегралу дорівнює підінтегральній функції.

Дійсно, якщо $F'(x) = f(x)$, то

$$(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x).$$

2. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$ – Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу.

$$\text{Дійсно, } d(\int f(x)dx) = (\int f(x)dx)'dx = f(x)dx.$$

3. $\int d(F(x)) = F(x) + C$ – Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої.

Дійсно, через те що $F(x)$ є первісна для $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$, маємо $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx \Rightarrow \int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C$.

3 ІНТЕГРУВАННЯ ОСНОВНИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

1. $\int 0 dx = C$.

Дійсно, $C' = 0$.

2. $\int 1 dx = \int dx = x + C$.

Дійсно, $x' = 1$.

3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, де $\alpha \in R$ і $\alpha \neq -1$.

Доведення. $\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)' = \frac{(\alpha+1)x^{\alpha+1-1}}{\alpha+1} = x^\alpha$.

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

Доведення. Треба довести, що $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$. Нагадаємо, що

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0 \\ -x, & \text{якщо } x < 0 \end{cases}$$

Отже, якщо $x > 0$, то $\ln|x| = \ln x$ і $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$; а якщо $x < 0$, то

$$\ln|x| = \ln(-x) \text{ і } (\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}. \text{ Таким чином, } (\ln|x|)' = \frac{1}{x},$$

тобто $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

Доведення. $\left(\frac{a^x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x \ln a = a^x$.

6. $\int e^x dx = e^x + C$.

Дійсно, $(e^x)' = e^x$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

Дійсно, $(\sin x)' = \cos x$.

8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

Дійсно, $(-\cos x)' = \sin x$.

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

Дійсно, $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

Дійсно, $(-\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$.

Дійсно, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(-\arccos x)' = -\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

12. $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$.

Дійсно, $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(-\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{-1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$.

4 ОСНОВНІ ПРАВИЛА ІНТЕГРУВАННЯ

1. Якщо $a \neq 0$ – стала, то

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

Доведення. $(\int a f(x) dx)' = a f(x)$ і $(a \int f(x) dx)' = a (\int f(x) dx)' = a f(x)$.

2. Алгебраїчна сума двох невизначених інтегралів дорівнює невизначеному інтегралу від алгебраїчної суми підінтегральних функцій:

$$\int f(x) dx \pm \int g(x) dx = \int (f(x) \pm g(x)) dx.$$

Доведення.

$$d(\int f(x) dx \pm \int g(x) dx) = d \int f(x) dx \pm d \int g(x) dx = f(x) dx \pm g(x) dx = (f(x) \pm g(x)) dx$$

Ця властивість справедлива для будь-якого скінченного числа доданків.

3. (Інваріантність формул інтегрування.) Якщо $\int f(x) dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну, то

$$\int f(\varphi(x)) d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C, \quad (4.1)$$

або скорочено $\int f(u) du = F(u) + C$.

Доведення. Нехай $u = \varphi(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну. Розглянемо інтеграл $\int f(u) du$. Через те, що $du = u' dx$, маємо

$$\int f(u) du = \int f(u) u' dx.$$

Покажемо, що функція $F(u) = F(\varphi(x))$ є первісною для функції $f(u) = f(\varphi(x))$:

$\frac{d(F(u))}{dx} = \frac{dF(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f(u)u'$, тобто $F(u) = F(\varphi(x))$ – первісна для функції $f(u) = f(\varphi(x))$. Внаслідок цього маємо $\int f(u)du = F(u) + C$.

Співвідношення (4.1) дуже важливе. Воно означає, що та чи інша формула для невизначеного інтеграла залишається справедливою незалежно від того, чи змінна інтегрування є незалежною змінною, чи довільною функцією від неї, що має неперервну похідну. Наприклад, $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$, оскільки

$$\left(\frac{x^5}{5} + C \right)' = x^4. \quad \text{Користуючись правилом 3 (інваріантність формул}$$

інтегрування), одержимо формулу $\int u^4 du = \frac{u^5}{5} + C$, де $u = \varphi(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну. Зокрема,

$$\int \sin^4 x \cos x dx = \int \sin^4 x d(\sin x) = \frac{\sin^5 x}{5} + C,$$

$$\int \ln^4 x \frac{dx}{x} = \int \ln^4 x d(\ln x) = \frac{\ln^5 x}{5} + C,$$

$$\int \frac{(\operatorname{tg} x - 7)^4}{\cos^2 x} dx = \int (\operatorname{tg} x - 7)^4 d(\operatorname{tg} x - 7) = \frac{(\operatorname{tg} x - 7)^5}{5} + C.$$

5 ТАБЛИЦЯ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ ВІД ОСНОВНИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай $u = u(x)$ – довільна функція, що має на деякому проміжку неперервну похідну $u'(x)$. Тоді на цьому проміжку справедливі наступні формули:

1. $\int 0 du = C$.

2. $\int du = u + C$.

3. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, де $\alpha \in \mathbb{R}$ і $\alpha \neq -1$.

4. $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$.

5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$.

6. $\int e^u du = e^u + C$.

7. $\int \cos u du = \sin u + C$.

8. $\int \sin u du = -\cos u + C$.

9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$
10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$
11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C = -\arccos \frac{u}{a} + C.$
12. $\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \arcsin u + C = -\arccos u + C.$
13. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C = \frac{-1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{u}{a} + C.$
14. $\int \frac{du}{u^2 + 1} = \operatorname{arctg} u + C = -\operatorname{arcctg} u + C.$
15. $\int \operatorname{tg} u \, du = -\ln |\cos u| + C.$
16. $\int \operatorname{ctg} u \, du = \ln |\sin u| + C.$
17. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C.$
18. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u + a}{u - a} \right| + C.$
19. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C.$
20. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C.$
21. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$

Інтеграли 1–21 називаються табличними інтегралами. Справедливість будь-якої формули легко перевірити диференціюванням.

Доведемо, наприклад, формулу (19). Якщо $x + \sqrt{x^2 \pm a^2} > 0$, то

$$\begin{aligned}
 d \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| &= \left(\ln \left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right) \right)' dx = \\
 &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right)' dx = \\
 &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot 2x \right) dx = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2} + x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \\
 &= \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.
 \end{aligned}$$

А, якщо $x + \sqrt{x^2 \pm a^2} < 0$, то

$$\begin{aligned}
& d \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| = \left(\ln \left(- \left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right) \right) \right)' dx = \\
& = \frac{1}{-\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right)} \left(- \left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right) \right)' dx = \\
& = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot 2x \right) dx = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2} + x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \\
& \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

А з незалежності вигляду невизначеного інтеграла від обрання змінної інтегрування (інваріантності формул інтегрування) маємо

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C.$$

6 ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

Основними методами інтегрування є безпосереднє інтегрування, метод підстановки (заміни змінної) та метод інтегрування частинами.

1. Безпосереднє інтегрування – це знаходження інтеграла за допомогою основних властивостей невизначених інтегралів та таблиці інтегралів.

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx$.

Розв'язок:

$$\begin{aligned}
& \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx = \int \left(x + 2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx = \int \left(x + 2x^{1/6} + x^{-2/3} \right) dx = \\
& = \int x dx + 2 \int x^{1/6} dx + \int x^{-2/3} dx = \frac{x^2}{2} + 2 \frac{x^{7/6}}{7/6} + \frac{x^{1/3}}{1/3} + C = \frac{x^2}{2} + \frac{12}{7} x^{7/6} + 3x^{1/3} + C.
\end{aligned}$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int \frac{3 - \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$.

Розв'язок:

$$\int \frac{3 - \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \int \left(\frac{3}{\sqrt{1 - x^2}} - 1 \right) dx = 3 \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} - \int dx = 3 \arcsin x - x + C.$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$.

Розв'язок:

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int e^{\sin x} \cos x \, dx$.

Розв'язок:

$$\int e^{\sin x} \cos x \, dx = \{ \cos x \, dx = d(\sin x) \} = \int e^{\sin x} d \sin x = e^{\sin x} + C$$

Тут була застосована формула 6 з таблиці інтегралів: $\int e^u du = e^u + C$.

Приклад 5. Знайти інтеграл $\int \frac{\sqrt[7]{(\ln x - 5)^3}}{x} dx$.

Розв'язок:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[7]{(\ln x - 5)^3}}{x} dx &= \left\{ \frac{dx}{x} = d(\ln x - 5) \right\} = \int (\ln x - 5)^{3/7} d(\ln x - 5) \\ &= \frac{7(\ln x - 5)^{10/7}}{10} + C \end{aligned}$$

Тут була застосована формула (3) з таблиці інтегралів: $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.

2. Метод підстановки полягає у введенні нової змінної інтегрування.

Нехай треба знайти інтеграл $\int f(x) dx$, причому безпосередній підбір первісної для $f(x)$ викликає труднощі. Деякі з таких інтегралів можна знайти наступним чином. Введемо заміну змінної: $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – неперервно диференційована функція, а отже, $dx = \varphi'(t) dt$. Будемо ще вважати, що для функції $x = \varphi(t)$ існує обернена $t = \varphi^{-1}(x)$. Тоді справедлива рівність

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt. \quad (6.2)$$

Причому, після інтегрування правої частини рівності (6.2) у знайдену первісну функцію замість змінної t треба підставити $t = \varphi^{-1}(x)$.

Щоб довести рівність (6.2), покажемо, що похідні по x від обох частин рівності (6.2) однакові. Похідна лівої частини: $(\int f(x) dx)'_x = f(x)$.

Похідна правої частини:

$$\begin{aligned} (\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt)'_x &= (\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt)'_t \cdot t'_x = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot \frac{1}{x'_t} = \\ &= f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x). \end{aligned}$$

Тобто похідні по x від обох частин рівності (6.2) співпадають.

Зауважимо, що підстановку $x = \varphi(t)$ підбирають таким чином, щоб одержані після перетворень інтеграли були табличними, або зводились до табличних.

Приклад 6. Знайти інтеграл $\int \frac{(3\ln x - 8)^4}{x} dx$.

Розв'язок:

$$\begin{aligned} \int \frac{(3\ln x - 8)^4}{x} dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{введемо заміну змінної за формулою} \\ 3\ln x - 8 = t, \text{ звідки маємо} \\ d(3\ln x - 8) = dt \Rightarrow \frac{3}{x} dx = dt \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dt}{3} \end{array} \right\} = \int t^4 \cdot \frac{dt}{3} = \\ &= \frac{1}{3} \int t^4 dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^5}{5} + C = \frac{t^5}{15} + C = \left\{ \begin{array}{l} \text{вертаємося до початкової} \\ \text{змінної } x \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{15} (3\ln x - 8)^5 + C. \end{aligned}$$

Приклад 7. Знайти інтеграл $\int \sqrt{4 - x^2} dx$.

Розв'язок:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{4 - x^2} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \sin t \Rightarrow \sqrt{4 - x^2} = 2 \cos t \\ dx = d(2 \sin t) \Rightarrow dx = 2 \cos t dt \end{array} \right\} = \int 2 \cos t \cdot 2 \cos t dt = 2 \int 2 \cos^2 t dt = \\ &= 2 \int (1 + \cos 2t) dt = 2 \int dt + 2 \int \cos 2t dt = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{перший інтеграл – табличний,} \\ \text{у другому інтегралі зробимо заміну} \\ 2t = z \Rightarrow t = \frac{z}{2} \Rightarrow dt = d\left(\frac{z}{2}\right) \Rightarrow dt = \frac{1}{2} dz \end{array} \right\} = \\ &= 2t + \int \cos z dz = 2t + \sin z + C = 2t + \sin 2t + C = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \sin t = \frac{x}{2} \Rightarrow t = \arcsin \frac{x}{2}; \quad 2 \cos t = \sqrt{4 - x^2} \\ \sin 2t = 2 \sin t \cos t \Rightarrow \sin 2t = 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2} \end{array} \right\} = 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x \sqrt{4 - x^2}}{2} + C. \end{aligned}$$

3. Метод інтегрування частинами.

Нехай функції $u=u(x)$ і $v=v(x)$ мають на деякому проміжку неперервні похідні $u'(x)$ і $v'(x)$. Тоді

$$d(uv) = u dv + v du \quad \text{або} \quad u dv = d(uv) - v du.$$

Інтегруючи останню рівність, маємо

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (6.3)$$

Формула (6.3) називається формулою інтегрування частинами.

Приклад 8. Знайти інтеграл $\int x \cos x dx$.

Розв'язок:

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= \{ \cos x dx = d(\sin x) \} = \int x d(\sin x) = \left\{ \begin{array}{l} u = x \\ dv = d \sin x \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} du = dx \\ v = \sin x \end{array} \right\} = \\ &= x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C. \end{aligned}$$

Зауважимо, що з усіх функцій v , які задовольняють рівність $dv = d \sin x$, достатньо розглянути одну з них, наприклад, $v = \sin x$.

$$\text{Отже, } \int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Таким чином, інтегрування частинами дозволило знаходження інтеграла від складної підінтегральної функції $x \cos x$ звести до табличного інтеграла від функції $\sin x$. Разом з тим, для знаходження функції v довелося інтегрувати вираз $\cos x dx$. Звідси і назва методу: *інтегрування частинами*.

Застосовуючи формулу (6.3) до знаходження інтегралів, доводиться розбивати підінтегральний вираз на два множники u і $dv = v' dx$, із яких перший диференціюється, а другий – інтегрується. Треба намагатися вибрати u і $dv = v' dx$ так, щоб $\int dv$ знаходився просто, і щоб $\int v du$ був простіший за $\int u dv$.

Метод інтегрування частинами має більш обмежену область застосування, ніж заміна змінної. Але є цілі класи інтегралів, що знаходяться саме за допомогою формули (6.3) інтегрування частинами. Дуже важливо правильно вибрати u і dv .

$$\text{I клас. } \int P_n(x) \cdot \begin{cases} e^{\beta x} \\ a^{\beta x} \\ \sin \beta x \\ \cos \beta x \end{cases} dx.$$

У цьому класі $u = P_n(x)$, де $P_n(x)$ – алгебраїчний многочлен степеня n . При цьому інтегрувати частинами прийдеться n разів, тобто стільки, який степінь многочлена.

$$\text{II клас. } \int P_n(x) \cdot \begin{cases} \ln^m \beta x \\ \arcsin \beta x \\ \arccos \beta x \\ \arctg \beta x \\ \text{arcctg } \beta x \end{cases} dx.$$

У цьому класі $P_n(x)dx = dv$, а через u позначають, відповідно, $\ln^m \beta x$, $\arcsin \beta x$, $\arccos \beta x$, $\arctg \beta x$, $\operatorname{arcctg} \beta x$.

$$\text{III клас. } \int \underbrace{\sqrt{a^2 \pm x^2}}_u \underbrace{dx}_{dv}; \int \underbrace{\sqrt{x^2 \pm a^2}}_u \underbrace{dx}_{dv}.$$

$$\text{IV клас. } \int \underbrace{\cos(\ln x)}_u \underbrace{dx}_{dv}; \int \underbrace{\sin(\ln x)}_u \underbrace{dx}_{dv}.$$

$$\text{V клас. } \int e^{\beta x} \cos(\alpha x) dx; \int e^{\beta x} \sin(\alpha x) dx; \\ \int a^{\beta x} \cos(\alpha x) dx; \int a^{\beta x} \sin(\alpha x) dx.$$

Останні три класи інтегруються наступним чином: двічі застосовується формула (6.3), а потім розв'язується лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Покажемо це на прикладі.

Приклад 9. Знайти інтеграл $\int e^{2x} \sin 3x dx$.

Розв'язок:

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \sin 3x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x} \\ dv = \sin 3x dx \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} du = d(e^{2x}) = 2e^{2x} dx \\ v = \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right\} = \\ &= e^{2x} \left(-\frac{1}{3} \cos 3x \right) - \int \left(-\frac{1}{3} \cos 3x \right) \cdot 2e^{2x} dx = -\frac{e^{2x} \cos 3x}{3} + \frac{2}{3} \int e^{2x} \cos 3x dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{отриманий інтеграл знову} \\ \text{інтегруємо частинами} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} u = e^{2x} \\ dv = \cos 3x dx \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} du = d(e^{2x}) = 2e^{2x} dx \\ v = \int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right\} = \\ &= -\frac{e^{2x} \cos 3x}{3} + \frac{2}{3} \left(e^{2x} \cdot \frac{1}{3} \sin 3x - \int \frac{1}{3} \sin 3x \cdot 2e^{2x} dx \right) = -\frac{e^{2x} \cos 3x}{3} \\ &+ \frac{2e^{2x} \sin 3x}{9} - \frac{4}{9} \int e^{2x} \sin 3x dx. \end{aligned}$$

Будемо розглядати отриману рівність як рівняння відносно шуканого інтеграла:

$$\int e^{2x} \sin 3x dx = -\frac{e^{2x} \cos 3x}{3} + \frac{2e^{2x} \sin 3x}{9} - \frac{4}{9} \int e^{2x} \sin 3x dx \Rightarrow$$

$$\int e^{2x} \sin 3x dx + \frac{4}{9} \int e^{2x} \sin 3x dx = -\frac{e^{2x} \cos 3x}{3} + \frac{2e^{2x} \sin 3x}{9} \Rightarrow$$

$$\frac{13}{9} \int e^{2x} \sin 3x dx = \frac{e^{2x}}{9} (2 \sin 3x - 3 \cos 3x) \Rightarrow$$

$$\int e^{2x} \sin 3x dx = \frac{9}{13} \cdot \frac{e^{2x}}{9} (2 \sin 3x - 3 \cos 3x) \Rightarrow$$

$$\int e^{2x} \sin 3x dx = \frac{e^{2x}}{13} (2 \sin 3x - 3 \cos 3x).$$

Таким чином, ми знайшли одну з первісних функцій $e^{2x} \sin 3x$. Сукупність усіх первісних функцій $e^{2x} \sin 3x$, тобто

$$\int e^{2x} \sin 3x dx = \frac{e^{2x}}{13} (2 \sin 3x - 3 \cos 3x) + C.$$

Аналогічним чином знаходяться інтеграли класів III і IV.

Інтегруванням частинами також доводиться рекурентна формула для знаходження інтегралів вигляду $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$, де $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$. Для цього будемо

спочатку інтегрувати частинами інтеграл $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}}$:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}} = \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}} \\ dv = dx \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} du = \frac{-(n-1) \cdot 2x}{(x^2 + a^2)^n} dx \\ v = x \end{array} \right\} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^n} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{у чисельнику підінтегрального} \\ \text{виразу додамо та віднімемо } a^2 \end{array} \right\} = \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^n} dx = \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \left(\frac{x^2 + a^2}{(x^2 + a^2)^n} - \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^n} \right) dx = \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{x^2 + a^2}{(x^2 + a^2)^n} dx - 2(n-1) \int \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^n} dx = \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}} - 2(n-1)a^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}. \end{aligned}$$

Отже, ми отримали рівність

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}} - 2(n-1)a^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n},$$

на яку будемо дивитися як на рівняння відносно $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} \Rightarrow$

$$2(n-1)a^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}} - \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}}$$

$\Rightarrow$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2} \left(\frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + (2(n-1)-1) \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}} \right) \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}}. \quad (6.4)$$

Остання формула є рекурентною формулою для знаходження $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$,

де $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$.

Приклад 10. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$.

Розв'язок:

За формулою (6.4) маємо

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{x}{2(2-1)a^2(x^2 + a^2)^{2-1}} + \frac{2 \cdot 2 - 3}{2(2-1)a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{2-1}} =$$

$$= \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)} = \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

7 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ІНТЕГРУВАННЯ У СКІНЧЕННОМУ ВИГЛЯДІ

Ми познайомились з елементарними засобами знаходження невизначеного інтегралу. Нам відомо, що похідну можна знайти від будь-якої елементарної функції, і в результаті диференціювання знову отримати елементарну функцію. Але з інтегралами справа складається зовсім інакше. Дуже часто буває, що інтеграл від елементарної функції не є елементарною функцією. Наприклад, не виражаються у скінченному вигляді через елементарні функції наступні інтеграли:

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \sin x^2 dx, \quad \int \cos x^2 dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}.$$

Важливо зауважити, що всі ці інтеграли існують, але вони не є елементарними функціями.

Відома досить незначна кількість загальних класів функцій, для яких інтегрування може бути виконане у скінченному вигляді. Розглянемо деякі з них.

8 ІНТЕГРУВАННЯ ВИРАЗІВ ВИГЛЯДУ

$$\frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} \text{ і } \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Щоб знайти будь-який інтеграл $\int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} dx$, $\int \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$, треба виділити повний квадрат з квадратного тричлена, що стоїть у знаменнику дробів обох виглядів:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

а потім зробити заміну $\left(x + \frac{b}{2a} \right) = t$.

Приклад 11. Знайти інтеграл $\int \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$.

Розв'язок:

Спочатку виділимо повний квадрат з квадратного тричлена, що стоїть у знаменнику:

$$3 - 2x - x^2 = -(x^2 + 2x - 3) = -((x+1)^2 - 4) = 4 - (x+1)^2.$$

Таким чином, маємо

$$\begin{aligned} \int \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx &= \int \frac{x-3}{\sqrt{4-(x+1)^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} x+1=t \Rightarrow x=t-1 \\ dx=d(t-1) \\ dx=dt \end{array} \right\} = \\ &= \int \frac{t-1-3}{\sqrt{4-t^2}} dt = \int \frac{t-4}{\sqrt{4-t^2}} dt = \int \frac{tdt}{\sqrt{4-t^2}} - 4 \int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \\ &= \left\{ -d\sqrt{4-t^2} = -\frac{-2tdt}{2\sqrt{4-t^2}} = \frac{tdt}{\sqrt{4-t^2}} \right\} = -\int d\sqrt{4-t^2} - 4 \int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \\ &= -\sqrt{4-t^2} - 4 \arcsin \frac{t}{2} + C = \left\{ \begin{array}{l} \text{повернемося} \\ \text{до змінної } x \end{array} \right\} = \\ &= -\sqrt{4-(x+1)^2} - 4 \arcsin \frac{x+1}{2} + C = -\sqrt{3-2x-x^2} - 4 \arcsin \frac{x+1}{2} + C. \end{aligned}$$

Приклад 12. Знайти інтеграл $\int \frac{2x-3}{3x^2+4x+5} dx$.

Розв'язок:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-3}{3x^2+4x+5} dx &= \left\{ \begin{array}{l} 3x^2+4x+5 = 3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{11}{3} \\ x+\frac{2}{3} = t \Rightarrow x = t - \frac{2}{3} \Rightarrow dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{(2x-3)dx}{3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{11}{3}} = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{2\left(t - \frac{2}{3}\right) - 3}{t^2 + \frac{11}{9}} dt = \frac{1}{3} \int \frac{2t - \frac{13}{3}}{t^2 + \frac{11}{9}} dt = \frac{1}{3} \int \frac{2t}{t^2 + \frac{11}{9}} dt - \frac{13}{9} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{11}{9}} = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{d\left(t^2 + \frac{11}{9}\right)}{t^2 + \frac{11}{9}} - \frac{13}{9} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{11}{9}} = \frac{1}{3} \ln\left(t^2 + \frac{11}{9}\right) - \frac{13}{9} \sqrt{\frac{9}{11}} \operatorname{arctg} \frac{3t}{\sqrt{11}} + C = \\ &= \frac{1}{3} \ln\left(\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{11}{9}\right) - \frac{13}{3\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{3\left(x + \frac{2}{3}\right)}{\sqrt{11}} + C = \\ &= \frac{1}{3} \ln\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}\right) - \frac{13\sqrt{11}}{33} \operatorname{arctg} \frac{3x+2}{\sqrt{11}} + C. \end{aligned}$$

9 ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

Означення 3. Раціональним дробом або дробово-раціональною функцією називається функція, що дорівнює частці двох многочленів

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

де $P_m(x)$ – многочлен степеня m , $Q_n(x)$ – многочлен степеня n .

Означення 4. Раціональний дріб називається правильним, якщо степінь чисельника m менший степеня знаменника n . В протилежному випадку раціональний дріб називається неправильним.

Зауважимо, що будь-який неправильний раціональний дріб можна зобразити у вигляді суми многочлену та правильного раціонального дробу

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = L_{m-n}(x) + \frac{r(x)}{Q_n(x)},$$

де $L_{m-n}(x)$ – многочлен степеня $m-n$, а $r(x)$ – многочлен степеня, меншого ніж n . Ця операція називається виділенням цілої частини раціонального дробу.

Будемо розглядати $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$ при $m < n$.

Теорема 2. Будь-який правильний нескоротний раціональний дріб $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$

може бути єдиним способом представлений у вигляді суми скінченного числа простих дробів.

Прості дробі можуть бути наступних чотирьох типів:

1. $\frac{A}{x-a},$
2. $\frac{A}{(x-a)^k}, \quad k = 2, 3, 4, \dots$
3. $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}, \quad b^2-4ac < 0,$
4. $\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^p}, \quad b^2-4ac < 0, \quad p = 2, 3, 4, \dots$

Таким чином, $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$ ($m < n$) може бути представлений як сума інтегралів від простих дробів наведених чотирьох типів.

Представлення правильного дробу $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ у вигляді суми скінченного числа простих дробів пов'язано з розкладанням многочлена $Q_n(x)$, що стоїть у знаменнику, на прості множники. При цьому може бути чотири випадки:

1. $Q_n(x)$ має тільки дійсні різні корені. Тоді за теоремою Безу

$$Q_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 =$$

$$= a_n (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n),$$

де $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ – корені многочлену $Q_n(x)$, і правильний нескоротний раціональний дріб $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ можна представити у вигляді суми найпростіших

раціональних дробів наступним чином:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{1}{a_n} \left(\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \frac{A_3}{x-x_3} + \dots + \frac{A_n}{x-x_n} \right).$$

Отже,

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx = \frac{1}{a_n} \left(\int \frac{A_1}{x-x_1} dx + \int \frac{A_2}{x-x_2} dx + \int \frac{A_3}{x-x_3} dx + \dots + \int \frac{A_n}{x-x_n} dx \right).$$

2. $Q_n(x)$ має $(n-k)$ дійсних різних коренів, і корінь з номером $(n-k)+1$ повторюється k разів:

$$\begin{aligned}
Q_n(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \\
&= a_n (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) = \\
&= a_n (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_{n-k})(x - x_{n-k+1})^k.
\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx &= \frac{1}{a_n} \left(\int \frac{A_1}{x - x_1} dx + \int \frac{A_2}{x - x_2} dx + \int \frac{A_3}{x - x_3} dx + \dots + \int \frac{A_{n-k}}{x - x_{n-k}} dx + \right. \\
&\left. + \int \frac{B_1}{x - x_{n-k+1}} dx + \int \frac{B_2}{(x - x_{n-k+1})^2} dx + \int \frac{B_3}{(x - x_{n-k+1})^3} dx + \dots + \int \frac{B_k}{(x - x_{n-k+1})^k} dx \right).
\end{aligned}$$

3. Якщо при розкладанні $Q_n(x)$ на множники отримаємо квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$, дискримінант $D = b^2 - 4ac$ якого від'ємний, то у представленні правильного дробу $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ у вигляді суми скінченного числа простих дробів з'явиться дріб $\frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c}$.

4. Якщо при розкладанні $Q_n(x)$ на множники отримаємо $(ax^2 + bx + c)^p$, $D = b^2 - 4ac < 0$, то у представленні правильного дробу $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ у вигляді суми скінченного числа простих дробів слід поводитися як і у випадку 2, тобто у сумі з'являться дробу

$$\frac{M_1 x + N_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{M_2 x + N_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \frac{M_3 x + N_3}{(ax^2 + bx + c)^3} + \dots + \frac{M_p x + N_p}{(ax^2 + bx + c)^p}.$$

Для знаходження коефіцієнтів A_i, B_i, M_i, N_i , які стоять у чисельниках простих дробів, існують два методи: метод надавання окремих значень невідомій x та метод порівняння коефіцієнтів. Розглянемо ці методи на прикладах.

Приклад 13. Знайти інтеграл $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$.

Розв'язок:

В цьому прикладі підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб, через це спочатку необхідно виділити цілу частину цього дробу, тобто розділити чисельник на знаменник:

$$\begin{array}{r}
x^5 + x^4 - 8 \quad \Bigg| \quad \frac{x^3 - 4x}{x^2 + x + 4} \\
\underline{x^5 - 4x^3} \\
-x^4 + 4x^3 - 8 \\
\underline{x^4 - 4x^2} \\
-4x^3 + 4x^2 - 8 \\
\underline{4x^3 - 16x} \\
4x^2 + 16x - 8
\end{array}$$

Підінтегральна функція матиме вигляд

$$\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + 4 \cdot \frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x}.$$

Знаменник одержаного правильного дробу можна розкласти на множники
 $x^3 - 4x = x(x-2)(x+2).$

Таким чином,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx &= \int x^2 dx + \int x dx + 4 \int dx + 4 \int \frac{x^2 + 4x - 2}{x(x-2)(x+2)} dx = \\
&= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 4 \int \frac{x^2 + 4x - 2}{x(x-2)(x+2)} dx.
\end{aligned}$$

Підінтегральну функцію останнього інтегралу, що являє собою правильний

раціональний дріб, представимо як суму простих дробів

$$\frac{x^2 + 4x - 2}{x(x-2)(x+2)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2},$$

де A , B і C – поки невідомі числа, які мають назву *невизначені коефіцієнти*. Для того, щоб знайти ці числа, приведемо праву частину тотожності до найменшого спільного знаменника

$$\frac{x^2 + 4x - 2}{x(x-2)(x+2)} \equiv \frac{A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+2)}.$$

Ми маємо два тотожно рівні дроби, у яких однакові знаменники, отже вони мають і тотожно рівні чисельники

$$x^2 + 4x - 2 \equiv A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2).$$

Згадаємо, що тотожність – це рівність, яка правильна для будь-яких значень x . Отже, щоб знайти три числа A , B і C , надамо x одне за одним три значення і отримаємо систему трьох лінійних рівнянь відносно A , B і C . Система рівнянь значно спрощується, якщо змінній x надавати значення дійсних коренів знаменника $Q_n(x)$, тобто у нашому випадку будемо брати $x=0$, $x=2$, $x=-2$.

$$x=0 \Rightarrow -2 = -4A \Rightarrow A = \frac{1}{2},$$

$$x=2 \Rightarrow 10=8B \Rightarrow B=\frac{5}{4},$$

$$x=-2 \Rightarrow -6=8C \Rightarrow C=-\frac{3}{4}.$$

Таким чином, маємо

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 4 \int \frac{x^2 + 4x - 2}{x(x-2)(x+2)} dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 4 \int \left(\frac{1}{2x} + \frac{5}{4(x-2)} - \frac{3}{4(x+2)} \right) dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 4 \left(\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} + \frac{5}{4} \int \frac{d(x-2)}{x-2} - \frac{3}{4} \int \frac{d(x+2)}{x+2} \right) = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2\ln|x| + 5\ln|x-2| - 3\ln|x+2| + C. \end{aligned}$$

Приклад 14. Знайти інтеграл $\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2} dx$.

Розв'язок:

Так як підінтегральна функція – це правильний раціональний дріб, то зразу представимо її у вигляді суми простих дробів

$$\frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2} \equiv \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+4} + \frac{D}{(x+4)^2} \Rightarrow$$

$$x^2 \equiv A(x+2)(x+4)^2 + B(x+4)^2 + C(x+2)^2(x+4) + D(x+2)^2 \Rightarrow$$

$$x=-2 \Rightarrow 4=4B \Rightarrow B=1;$$

$$x=-4 \Rightarrow 16=4D \Rightarrow D=4;$$

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow 0=32A+16+16C+16 \Rightarrow 2A+C=-2 \\ x=1 \Rightarrow 1=75A+25+45C+36 \Rightarrow 5A+3C=-4 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6A+3C=-6 \\ 5A+3C=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-2 \\ C=2. \end{cases}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2} dx &= -2 \int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{dx}{(x+2)^2} + 2 \int \frac{dx}{x+4} + 4 \int \frac{dx}{(x+4)^2} = \\ &= -2\ln|x+2| - \frac{1}{x+2} + 2\ln|x+4| - \frac{4}{x+4} + C = \end{aligned}$$

$$= 2 \ln \left| \frac{x+4}{x+2} \right| - \frac{5x+12}{(x+2)(x+4)} + C.$$

Приклад 15. Знайти інтеграл $\int \frac{x}{x^3-1} dx$.

Розв'язок:

Так як підінтегральна функція – це правильний раціональний дріб, то зразу представимо її у вигляді суми простих дробів

$\frac{x}{x^3-1} = \frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} \equiv \left\{ \text{через те, що тричлен } x^2+x+1 \text{ має від'ємний дискримінант, у представленні підінтегрального дробу у вигляді суми простих дробів з'явиться дріб третього типу} \right\} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}.$

Після приведення до найменшого спільного знаменника у правій частині рівності, отримаємо тотожність

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} \equiv \frac{A(x^2+x+1) + Mx(x-1) + N(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)},$$

дроби якої ліворуч і праворуч мають однакові знаменники, і тому вони мають тотожно рівні чисельники:

$$x \equiv A(x^2+x+1) + Mx(x-1) + N(x-1).$$

Для знаходження коефіцієнтів A , M , N застосуємо метод порівняння коефіцієнтів, який ґрунтується на тому факті, що у тотожності коефіцієнти ліворуч і праворуч при однакових степенях змінної – однакові. Згрупуємо у правій частині тотожності доданки за степенями x

$$x \equiv (A+M)x^2 + (A-M+N)x + A-N.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях змінної x , отримаємо систему рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів A , M , N :

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 = A + M \\ 1 = A - M + N \\ 0 = A - N \end{array} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} M = -A \\ 1 = 3A \\ N = A \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} M = -\frac{1}{3} \\ A = \frac{1}{3} \\ N = \frac{1}{3} \end{array} \right\}.$$

Тобто

$$\int \frac{x}{x^3-1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3} \int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx.$$

Перший інтеграл цієї рівності є табличний:

$$\int \frac{dx}{x-1} = \int \frac{d(x-1)}{x-1} = \ln|x-1| + C_1.$$

Метод, за яким знаходиться другий інтеграл цієї рівності, було розглянуто у пункті 8.

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx &= \int \frac{x-1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \left\{ \begin{array}{l} x + \frac{1}{2} = t \\ x = t - \frac{1}{2} \\ dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{t - \frac{3}{2}}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2tdt}{t^2 + \frac{3}{4}} - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \ln \left| t^2 + \frac{3}{4} \right| - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + C_2 = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C_2.\end{aligned}$$

Отже

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^3-1} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3} \int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{3} \ln|x-1| + C_1 - \\ &- \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C_2 \right) = \\ &= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.\end{aligned}$$

Приклад 16. Знайти інтеграл $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2} dx$.

Розв'язок

Підінтегральна функція наведеного інтеграла – це правильний раціональний дріб. Вираз x^2+2 , що стоїть у знаменнику цього дробу, має від'ємний дискримінант, і тому цей дріб розкладається на суму простих дробів третього та четвертого типів

$$\frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2} \equiv \frac{M_1x+N_1}{x^2+2} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+2)^2}.$$

Зведемо праву частину тотожності до найменшого спільного знаменника

$$\frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2} \equiv \frac{M_1x(x^2+2) + N_1(x^2+2) + M_2x + N_2}{(x^2+2)^2},$$

після чого прирівнюємо чисельники

$$x^3+x-1 \equiv M_1x(x^2+2) + N_1(x^2+2) + M_2x + N_2,$$

або

$$x^3+x-1 \equiv M_1x^3 + N_1x^2 + (2M_1+M_2)x + 2N_1+N_2.$$

Для знаходження невизначених коефіцієнтів M_1, M_2, N_1, N_2 застосуємо метод порівняння коефіцієнтів при однакових степенях змінної x і отримаємо систему рівнянь для визначення цих коефіцієнтів

$$\left. \begin{array}{l} x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 = M_1 \\ 0 = N_1 \\ 1 = 2M_1 + M_2 \\ -1 = 2N_1 + N_2 \end{array} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} M_1 = 1 \\ N_1 = 0 \\ M_2 = -1 \\ N_2 = -1 \end{array} \right\}.$$

Отже,

$$\int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} dx = \int \frac{xdx}{x^2 + 2} - \int \frac{x + 1}{(x^2 + 2)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2xdx}{x^2 + 2} - \frac{1}{2} \int \frac{2xdx}{(x^2 + 2)^2} - \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2}.$$

Перші два інтеграла знайдемо, користуючись безпосередньо таблицею:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{2xdx}{x^2 + 2} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 2)}{x^2 + 2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) + C_1; \\ \frac{1}{2} \int \frac{2xdx}{(x^2 + 2)^2} &= \frac{1}{2} \int (x^2 + 2)^{-2} d(x^2 + 2) = \frac{-1}{2(x^2 + 2)} + C_2. \end{aligned}$$

Третій інтеграл знаходиться за допомогою рекурентної формули (6.4), що було наведено у пункті 6, при $n=2$. Знаходження інтегралу такого вигляду було наведено у прикладі 10. У цьому випадку $a = \sqrt{2}$. Отже

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2} = \frac{x}{4(x^2 + 2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C_3.$$

Таким чином, остаточно маємо

$$\int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) + \frac{1}{2(x^2 + 2)} - \frac{x}{4(x^2 + 2)} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

Зауважимо, що загальний метод інтегрування раціонального дробу не треба застосовувати тоді, коли інтеграл можна знайти простіше. Розглянемо такі приклади.

Приклад 17. $\int \frac{x^3 dx}{x^4 - 1} = \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4 - 1)}{x^4 - 1} = \frac{1}{4} \ln|x^4 - 1| + C.$

Приклад 18. $\int \frac{xdx}{x^4 + x^2 + 1} = \left\{ \begin{array}{l} x^2 = t \\ dx^2 = dt \\ 2xdx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + t + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(t + \frac{1}{2}\right)}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\left(t + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Приклад 19. $\int \frac{dx}{x^4(x^2 + 1)} = \int \frac{(1 + x^2) - x^2}{x^4(x^2 + 1)} dx = \int \frac{(x^2 + 1)}{x^4(x^2 + 1)} dx - \int \frac{x^2}{x^4(x^2 + 1)} dx =$

$$= \int \frac{dx}{x^4} - \int \frac{dx}{x^2(x^2 + 1)} = \int x^{-4} dx - \int \frac{(1 + x^2) - x^2}{x^2(x^2 + 1)} dx = \frac{x^{-3}}{-3} - \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x^2 + 1} =$$

$$= \frac{-1}{3x^3} - \frac{x^{-1}}{-1} + \operatorname{arctg} x + C = \frac{-1}{3x^3} + \frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C.$$

Приклад 20.
$$\int \frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{(x^2+1)+2x}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{2xdx}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \operatorname{arctg} x + \int (x^2+1)^{-2} d(x^2+1) = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x^2+1} + C.$$

Приклад 21.
$$\int \frac{x^2 dx}{(x^3+2)^2} = \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3+2)}{(x^3+2)^2} = -\frac{1}{3(x^3+2)} + C.$$

10 ІНТЕГРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ БІНОМІВ

Означення 5. Вираз вигляду $x^m \cdot (a + bx^n)^p dx$, де a, b – будь-які сталі, відмінні від нуля, а показники m, n, p – раціональні числа, називається *біноміальним диференціалом* або *диференціальним біномом*.

Інтеграл від диференціального бінома $\int x^m \cdot (a + bx^n)^p dx$ зводиться до інтеграла від раціональної функції відносно нової змінної (тобто виражається через елементарні функції за допомогою скінченного числа арифметичних дій) лише в трьох випадках ($a \neq 0, b \neq 0$):

1. p – ціле число (додатне, від'ємне чи нуль);
2. $\frac{m+1}{n}$ – ціле число (додатне, від'ємне чи нуль);
3. $\frac{m+1}{n} + p$ – ціле число (додатне, від'ємне чи нуль).

В інших випадках інтеграл від диференціального бінома через елементарні функції не виражається.

Зауважимо, що у випадку 1. треба виконати підстановку $x = t^s$, де s – найменший спільний знаменник дробів m і n . У випадку 2. треба виконати підстановку $a + bx^n = t^r$, де r – знаменник дробу p . У випадку 3. треба виконати підстановку $ax^{-n} + b = t^r$, де r – знаменник дробу p .

Приклад 22. Знайти інтеграл $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

Розв'язок:

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{\frac{-1}{2}} \left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} dx = \left\{ m = -\frac{1}{2}; \quad n = \frac{1}{4}; \quad p = \frac{1}{3}. \right.$$

Число $\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2$ – ціле, тобто маємо випадок 2. Виконуємо

підстановку $1+x^{\frac{1}{4}}=t^3 \Rightarrow x=(t^3-1)^4 \Rightarrow$

$$dx = 4(t^3-1)^3 \cdot 3t^2 dt = 12t^2(t^3-1)^3 dt \} =$$

$$= \int \left((t^3-1)^4 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (t^3)^{\frac{1}{3}} \cdot 12t^2(t^3-1)^3 dt = \int (t^3-1)^{-2}(t^3-1)^3 \cdot t \cdot 12t^2 dt =$$

$$= 12 \int (t^3-1) \cdot t^3 dt = 12 \int (t^6 - t^3) dt = 12 \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4} \right) + C = \frac{12}{7}t^7 - 3t^4 + C =$$

$$= \frac{12}{7}(t^3)^2 \cdot t - 3t^3 \cdot t + C = \frac{12}{7}(1+\sqrt[4]{x})^2 \cdot \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} - 3(1+\sqrt[4]{x}) \cdot \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} + C.$$

Приклад 23. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x^4 \cdot \sqrt{1+x^2}}.$

Розв'язок:

$$\int \frac{dx}{x^4 \cdot \sqrt{1+x^2}} = \int x^{-4} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \left\{ m=-4; n=2; p=-\frac{1}{2} \right\}.$$

Число $\frac{m+1}{n} = \frac{-4+1}{2} = -\frac{3}{2}; \frac{m+1}{n} + p = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -2$ – ціле. Це випадок 3.

Виконуємо підстановку $x^{-2}+1=t^2$, звідки $-2x^{-3}dx=2tdt$, або $x^{-3}dx=-tdt$ } =

$$= \int x^{-4} (x^2(x^{-2}+1))^{-\frac{1}{2}} dx = \int x^{-4} \cdot x^{-1} (x^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}} dx = \int x^{-5} (x^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \int x^{-2} (x^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}} x^{-3} dx = \int (t^2-1) \cdot (t^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-tdt) = - \int (t^2-1) \cdot t^{-1} \cdot t dt =$$

$$= - \int (t^2-1) dt = -\frac{t^3}{3} + t + C = t - \frac{t^2 \cdot t}{3} + C = \sqrt{x^{-2}+1} - \frac{(x^{-2}+1)\sqrt{x^{-2}+1}}{3} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}{3x^3} + C.$$

11 ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Спочатку розглянемо випадки, коли, використовуючи тригонометричні перетворення, інтеграл можна звести до табличного.

1. $\int \sin^m x \cos^n x dx$

а) *принаймні один із степенів m або n має вигляд $2k+1$, $k \in \mathbb{N}$.*

Припустимо, що $n=2k+1$, тоді інтеграл матиме вигляд

$$\int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx = \int \sin^m x \cos^{2k} x \underbrace{\cos x dx}_{d(\sin x)} = \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k d(\sin x),$$

тобто ми одержали інтеграл вигляду $\int t^m (1-t^2)^k dt$, який ми вже вміємо інтегрувати.

b) обидва степеня парні додатні (або один з них дорівнює нулю, а другий – парний додатний).

У цьому випадку треба знизити степені $\cos x$ і $\sin x$, користуючись формулами

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x,$$

$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x.$$

Також корисно пам'ятати наступні формули

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$2\cos x \sin x = \sin 2x,$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$$

Приклад 24. Знайти інтеграл $\int \cos^4 x \sin^2 x dx$.

Розв'язок:

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x \sin^2 x dx &= \int (\cos^2 x)^2 \sin^2 x dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos^2 2x)(1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx + \\ &+ \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \underbrace{\cos 2x dx}_{\frac{1}{2}d(\sin 2x)} = \frac{1}{8} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx + \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \\ &= \frac{1}{16} \int dx - \frac{1}{16 \cdot 4} \int \cos 4x d(4x) + \frac{1}{16} \cdot \frac{\sin^3 2x}{3} + C = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C. \end{aligned}$$

2. а) $\int \cos nx \cos mx dx = \{ \text{застосуємо тригонометричну формулу}$

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cdot \cos \beta &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) \} = \frac{1}{2} \int (\cos(n - m)x + \cos(n + m)x) dx = \\ \frac{1}{2} (\int \cos(n - m)x dx + \int \cos(n + m)x dx) &= \frac{1}{2(n - m)} \int \cos(n - m)x d(n - m)x + \\ + \frac{1}{2(n + m)} \int \cos(n + m)x d(n + m)x &= \frac{\sin(n - m)x}{2(n - m)} + \frac{\sin(n + m)x}{2(n + m)} + C. \end{aligned}$$

в) $\int \sin nx \sin mx dx = \{ \text{застосуємо тригонометричну формулу}$

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cdot \sin \beta &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \} = \\ &= \frac{1}{2} \int (\cos(n - m)x - \cos(n + m)x) dx = \frac{1}{2} (\int \cos(n - m)x dx - \int \cos(n + m)x dx) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2(n-m)} \int \cos(n-m)x d(n-m)x - \frac{1}{2(n+m)} \int \cos(n+m)x d(n+m)x = \\
&= \frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)} - \frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)} + C.
\end{aligned}$$

с) $\int \sin nx \cos mx dx = \{ \text{застосуємо тригонометричну формулу}$

$$\begin{aligned}
\sin \alpha \cdot \cos \beta &= \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)) \} = \\
&= \frac{1}{2} \int (\sin(n-m)x + \sin(n+m)x) dx = \frac{1}{2} (\int \sin(n-m)x dx + \int \sin(n+m)x dx) = \\
&= \frac{1}{2(n-m)} \int \sin(n-m)x d(n-m)x + \frac{1}{2(n+m)} \int \sin(n+m)x d(n+m)x = \\
&= -\frac{\cos(n-m)x}{2(n-m)} - \frac{\cos(n+m)x}{2(n+m)} + C.
\end{aligned}$$

3. $\int R(\sin x, \cos x) dx$

Функція $R(\sin x, \cos x)$ є раціональною відносно $\sin x$ та $\cos x$. У цьому разі можна розглядати наступні випадки:

а) $R(\sin x, \cos x)$ – парна функція відносно $\sin x$ та $\cos x$, тобто $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$. В цьому випадку застосовують підстановку

$$t = \operatorname{tg} x, \quad \text{звідки} \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = d(\operatorname{arctg} t) = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}. \quad \text{Після цієї підстановки підінтегральна функція стане}$$

раціональною відносно t .

в) У всіх інших випадках, тобто, коли функція $R(\sin x, \cos x)$ не є парною функцією відносно $\sin x$ та $\cos x$, застосовують, так звану, універсальну підстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, звідки $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = d(2\operatorname{arctg} t) = \frac{2dt}{1+t^2}$,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \quad \text{Після цієї підстановки підінтегральна функція}$$

стане раціональною відносно t .

Приклад 25. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$.

Розв'язок:

Підінтегральна функція $\frac{1}{4\sin x + 3\cos x + 5}$ не є парною, тому застосуємо універсальну підстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, звідки $x = 2\operatorname{arctg} t$,

$$dx = d(2\operatorname{arctg} t) = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \quad \text{Тоді}$$

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left(4 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 3 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5 \right)} =$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{2dt}{8t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} = \int \frac{2dt}{2t^2 + 8t + 8} = \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 4} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} = \\ &= \int (t+2)^{-2} d(t+2) = \frac{(t+2)^{-1}}{-1} + C = \frac{-1}{t+2} + C = \frac{-1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2} + C. \end{aligned}$$

Приклад 26. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x}$.

Розв'язок:

Функція $R(\sin x; \cos x) = \frac{1}{\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x}$ є парною, тому що

$$\begin{aligned} R(-\sin x; -\cos x) &= \frac{1}{(-\sin x)^2 + 2(-\sin x)(-\cos x) - (-\cos x)^2} = \\ &= \frac{1}{\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x} = R(\sin x; \cos x). \end{aligned}$$

В цьому випадку застосуємо підстановку $t = \operatorname{tg} x$, звідки $x = \operatorname{arctg} t$,

$$dx = d(\operatorname{arctg} t) = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \text{після чого будемо}$$

мати

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x} &= \int \frac{dt}{(1+t^2) \left(\frac{t^2}{1+t^2} + 2 \cdot \frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right)} = \\ &= \int \frac{dt}{t^2 + 2t - 1} = \int \frac{dt}{(t^2 + 2t + 1) - 2} = \int \frac{dt}{(t+1)^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}} \right| + C = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x + 1 - \sqrt{2}}{\operatorname{tg} x + 1 + \sqrt{2}} \right| + C. \end{aligned}$$

12 ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ

$$1. \int R(x^{2k-1}; \sqrt{x^2 \pm a^2}) dx, \quad \int R(x^{2k-1}; \sqrt{a^2 \pm x^2}) dx.$$

Інтегрування таких виразів відбувається за допомогою підстановки, за якою підкореневий вираз позначається через t^2 , і, таким чином, підінтегральний вираз стає раціональним відносно змінної t .

Приклад 27.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} &= \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 9 = t^2 \\ d(x^2 - 9) = dt^2 \\ 2xdx = 2tdt \\ xdx = tdt \end{array} \right\} = \int \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2-9}} = \int \frac{tdt}{(t^2+9)t} = \int \frac{dt}{(t^2+9)} = \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2-9}}{3} + C. \end{aligned}$$

$$2. \int R(x^{2k}; \sqrt{a^2 - x^2}) dx.$$

В інтегралах такого типу позбавляються від ірраціональності за допомогою підстановки $x = a \sin t$ або $x = a \cos t$:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a \cos t \text{ або } \sqrt{a^2 - x^2} = a \sin t.$$

$$\text{При цьому } \begin{cases} dx = d(a \sin t) \\ dx = a \cos t dt \end{cases} \text{ або } \begin{cases} dx = d(a \cos t) \\ dx = -a \sin t dt \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Приклад 28. } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}} &= \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \sin t \\ dx = 4 \cos t dt \\ \sqrt{16-x^2} = 4 \cos t \end{array} \right\} = \int \frac{16 \sin^2 t \cdot 4 \cos t dt}{4 \cos t} = \\ &= \int 16 \sin^2 t dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 8 \int 2 \sin^2 t \, dt = 8 \int (1 - \cos 2t) \, dt = 8 \int dt - 8 \int \cos 2t \, dt = 8t - 4 \sin 2t + C = \\
&= 8t - 8 \sin t \cos t + C = \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \sin t \Rightarrow t = \arcsin \frac{x}{4} \\ \sin t = \frac{x}{4}; \quad \cos t = \frac{1}{4} \sqrt{16 - x^2} \end{array} \right\} = \\
&= 8 \arcsin \frac{x}{4} - 8 \cdot \frac{x}{4} \cdot \frac{\sqrt{16 - x^2}}{4} + C = 8 \arcsin \frac{x}{4} - \frac{x \sqrt{16 - x^2}}{2} + C.
\end{aligned}$$

$$3. \int R(x^{2k}; \sqrt{a^2 + x^2}) dx$$

В інтегралах такого типу позбавляються від ірраціональності за допомогою підстановки $x = a \operatorname{tg} t$ або $x = a \operatorname{ctg} t$:

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 t} = a \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} = \frac{a}{\cos t}$$

$$\text{або } \sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{ctg}^2 t} = a \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 t} = \frac{a}{\sin t}.$$

$$\text{При цьому } \begin{cases} dx = d(a \operatorname{tg} t) \\ dx = \frac{a \, dt}{\cos^2 t} \end{cases} \text{ або } \begin{cases} dx = d(a \operatorname{ctg} t) \\ dx = -\frac{a \, dt}{\sin^2 t} \end{cases}.$$

$$4. \int R(x^{2k}; \sqrt{x^2 - a^2}) dx$$

В інтегралах такого типу позбавляються від ірраціональності за допомогою підстановки $x = \frac{a}{\cos t}$ або $x = \frac{a}{\sin t}$:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t} - a^2} = a \sqrt{\frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t}} = a \operatorname{tg} t$$

$$\text{або } \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t} - a^2} = a \operatorname{ctg} t.$$

$$\text{При цьому } \begin{cases} dx = d\left(\frac{a}{\cos t}\right) \\ dx = \frac{a \sin t \, dt}{\cos^2 t} \end{cases} \text{ або } \begin{cases} dx = d\left(\frac{a}{\sin t}\right) \\ dx = -\frac{a \cos t \, dt}{\sin^2 t} \end{cases}.$$

5. В інтегралах типу $\int R(x, x^{m_1/n_1}, x^{m_2/n_2}, \dots, x^{m_k/n_k}) dx$ позбавляються від ірраціональності за допомогою підстановки

$$\left\{ \begin{array}{l} x = t^s \\ dx = st^{s-1} dt \end{array} \right\}, \quad \text{де } s - \text{ найменший спільний знаменник дробів } \frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots, \frac{m_k}{n_k}.$$

Приклад 29. $\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}} dx.$

Через те, що підінтегральний дріб містить $x^{1/2}$ та $x^{2/3}$, треба зробити наступну підстановку: $\left\{ \begin{array}{l} x = t^6 \Rightarrow t = \sqrt[6]{x} \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right\}.$ Тоді будемо мати $\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}} dx =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x = t^6 \Rightarrow t = \sqrt[6]{x} \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right\} = \int \frac{t^3 6t^5 dt}{t^6 - t^4} = 6 \int \frac{t^8 dt}{t^4(t^2 - 1)} = 6 \int \frac{t^4 dt}{t^2 - 1} =$$

$$= 6 \int \frac{t^4 - 1 + 1}{t^2 - 1} dt = 6 \int \left(t^2 + 1 + \frac{1}{t^2 - 1} \right) dt = 6 \left(\int t^2 dt + \int dt + \int \frac{dt}{t^2 - 1} \right) =$$

$$= 6 \left(\frac{t^3}{3} + t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) + C = 2t^3 + 6t + 3 \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} + 3 \ln \left| \frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[6]{x} + 1} \right| + C.$$

6. В інтегралах типу

$$\int R(x, (ax+b)^{m_1/n_1}, (ax+b)^{m_2/n_2}, \dots, (ax+b)^{m_k/n_k}) dx$$

позбавляються від ірраціональності за допомогою підстановки $\left\{ \begin{array}{l} ax+b = t^s \\ dx = \frac{s}{a} t^{s-1} dt \end{array} \right\},$

де s – найменший спільний знаменник дробів $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots, \frac{m_k}{n_k}.$

7. В інтегралах типу

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2/n_2}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k/n_k}\right) dx$$

позбавляються від ірраціональності за допомогою підстановки $\left\{ \frac{ax+b}{cx+d} = t^s \right\},$ де s – найменший

спільний знаменник дробів $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots, \frac{m_k}{n_k}.$ Для того, щоб знайти $dx,$ потрібно спочатку виразити $x:$

$$ax+b=t^s(cx+d) \Rightarrow ax+b=t^s cx+t^s d \Rightarrow ax-t^s cx=t^s d-b \Rightarrow$$

$$(a-t^s c)x=t^s d-b \Rightarrow x=\frac{t^s d-b}{a-t^s c} \Rightarrow$$

$$dx=\left(\frac{t^s d-b}{a-t^s c}\right)' dt \Rightarrow dx=\frac{st^{s-1}(ad-bc)}{(a-ct^s)^2} dt.$$

Приклад 30. $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{(1+x)^2}.$

Зробимо підстановку $\frac{1-x}{1+x}=t^3$. Звідси

$$x=\frac{1-t^3}{1+t^3} \Rightarrow dx=\left(\frac{1-t^3}{1+t^3}\right)' dt=\frac{-6t^2}{(1+t^3)^2} dt.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{(1+x)^2} &= \int t \cdot \frac{-6t^2}{\left(1+\frac{1-t^3}{1+t^3}\right)^2 (1+t^3)^2} dt = -6 \int \frac{t^3 dt}{\frac{(1+t^3+1-t^3)^2}{(1+t^3)^2} (1+t^3)^2} = \\ &= -6 \int \frac{t^3 dt}{(1+t^3)^2} = -\frac{6}{4} \int t^3 dt = -\frac{3}{2} \cdot \frac{t^4}{4} + C = -\frac{3t \cdot t^3}{8} + C = -\frac{3}{8} \cdot \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1-x}{1+x} + C = -\frac{3}{8} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{4/3} + C. \end{aligned}$$

13 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Знайти невизначені інтеграли:

Варіант № 1

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+9x^2}}$	2. $\int \operatorname{ctg}^2 2x dx$	3. $\int \frac{(1+\operatorname{tg} 5x)^3}{\cos^2 5x} dx$
4. $\int \frac{1}{x^2+8x-20} dx$	5. $\int \frac{3^x}{9^x+4} dx$	6. $\int \frac{x^5+x^2}{\sqrt{5+x^6}} dx$
7. $\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}} dx$	8. $\int x \cdot \sin 3x dx$	9. $\int \ln^2 x \frac{dx}{x^4}$
10. $\int \arccos 2x dx$	11. $\int e^{-3x} \cdot \sin x dx$	12. $\int \sin 2x \cdot \cos 3x dx$

13. $\int \frac{(3x-7)dx}{x^3+4x^2+4x+16}$	14. $\int \frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x}dx$	15. $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$
16. $\int \frac{dx}{3-\cos^2 x+4\sin^2 x}$	17. $\int \operatorname{tg}^5 2x dx$	18. $\int x^5 \cdot e^{-x^2} dx$
19. $\int \sqrt{25-x^2} dx$	20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^2}$	21. $\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$

Вариант № 2

1. $\int \frac{dx}{6-2x}$	2. $\int \left(\sqrt[5]{(2-x)^3} + e^{3-4x} \right) dx$	3. $\int \sin(4+\operatorname{tg} x) \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$
4. $\int \frac{1}{x^2+14x-15} dx$	5. $\int e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{dx}{x^3}$	6. $\int \frac{x - \arcsin^5 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx$
7. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}} dx$	8. $\int x \cdot \sin \frac{x}{2} dx$	9. $\int x^5 \cdot \ln^2 x dx$
10. $\int \arctg \frac{3x}{2} dx$	11. $\int e^{-x} \cdot \sin x dx$	12. $\int \sin \frac{x}{3} \cos 2x dx$
13. $\int \frac{x^2-1}{x^3-6x^2+x-6} dx$	14. $\int \frac{x^4+1}{x^4-1} dx$	15. $\int \frac{dx}{4-\sin x}$
16. $\int \sin^4 2x dx$	17. $\int \cos^8 x \cdot \sin^5 x dx$	18. $\int \frac{x^5-4x^2}{\sqrt{5+x^6}} dx$
19. $\int \sqrt{225-x^2} dx$	20. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}-\sqrt[4]{1-x}}$	21. $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2-1}}$

Вариант № 3

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$	2. $\int \sin^2 \frac{x}{3} dx$	3. $\int \frac{dx}{\arctg 2x \cdot (1+4x^2)}$
4. $\int \frac{1}{x^2+10x-11} dx$	5. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-4}}$	6. $\int \frac{\sin 4x+5}{4+\sin^2 4x} \cos 4x dx$
7. $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{8+4x-4x^2}}$	8. $\int x \cdot \ln(x^2+4) dx$	9. $\int x^2 \cdot e^{-3x} dx$

10. $\int \arctg 5x dx$	11. $\int e^{2x} \cdot \cos 3x dx$	12. $\int \sin 7x \cdot \sin 4x dx$
13. $\int \frac{dx}{x^3 - 8}$	14. $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 6}{x^2 - 4} dx$	15. $\int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x}$
16. $\int \frac{\sin^2 3x}{\cos^4 3x} dx$	17. $\int \sin^3 2x \cos^3 2x dx$	18. $\int \frac{x \cdot \cos x}{\sin^3 x} dx$
19. $\int \sqrt{2 - x^2} dx$	20. $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 - 1}}$	21. $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{10 + x^2}}$

Вариант № 4

1. $\int \frac{3}{\sqrt{4x^2 - 9}} dx$	2. $\int \operatorname{tg}^2 3x dx$	3. $\int e^{2x} \cdot \cos(e^{2x} + 3) dx$
4. $\int \frac{1}{x^2 + 4x - 12} dx$	5. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{4 - e^{4x}}} dx$	6. $\int \frac{x - \arccos^3 2x}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx$
7. $\int \frac{(x - 1) dx}{\sqrt{16 - 12x - 4x^2}}$	8. $\int x \cdot \cos 2x dx$	9. $\int (x + 1) \cdot \ln^2(x + 1) dx$
10. $\int \arcsin 4x dx$	11. $\int e^{3x} \cdot \cos x dx$	12. $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3} dx$
13. $\int \frac{2x + 3}{x^3 - 2x^2 - x + 2} dx$	14. $\int \frac{x^3 + 1}{4x^3 - 4x^2 + x} dx$	15. $\int \frac{dx}{4 \cos x - 3 \sin x}$
16. $\int \frac{1}{1 + \sin^2 x} dx$	17. $\int \cos^5 4x \cdot \sin^8 4x dx$	18. $\int \frac{x \cdot \sin x}{\cos^3 x} dx$
19. $\int \sqrt{49 - x^2} dx$	20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}$	21. $\int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x^4} dx$

Вариант № 5

1. $\int \frac{dx}{16 + 25x^2}$	2. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x - \cos 6x}$	3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sin^2 \sqrt{x}}$
4. $\int \frac{1}{x^2 - 12x + 52} dx$	5. $\int \frac{e^{3x}}{4 - e^{6x}} dx$	6. $\int \frac{4 + \arctg x}{4 - 16 \arctg^2 x} \cdot \frac{dx}{1 + x^2}$

7. $\int \frac{x+3}{\sqrt{16+6x-x^2}} dx$	8. $\int x^7 \cdot \ln 2x dx$	9. $\int x^2 \cdot e^{-x} dx$
10. $\int \arccos 7x dx$	11. $\int e^{-3x} \cdot \sin 4x dx$	12. $\int \sin 8x \cdot \sin 6x dx$
13. $\int \frac{(5x-1)dx}{x^3-4x^2+4x}$	14. $\int \frac{x^3-4}{x^3+x} dx$	15. $\int \frac{2dx}{2+\cos x-\sin x}$
16. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$	17. $\int \cos^5 2x \cdot \sin^6 2x dx$	18. $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$
19. $\int \sqrt{5-x^2} dx$	20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}$	21. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(1+x^2)^3}}$

Вариант № 6

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-4x^2}}$	2. $\int \frac{2-tg^2 5x}{\sin^2 5x} dx$	3. $\int \sin(\sqrt{x+2}-1) \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$
4. $\int \frac{1}{x^2-16x-17} dx$	5. $\int \frac{\cos 3x}{\sin^2 3x+25} dx$	6. $\int \frac{x^3+x}{9-x^4} dx$
7. $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-8x+25}} dx$	8. $\int \ln x \frac{dx}{\sqrt{x}}$	9. $\int (9x^2+1) \cdot e^{3x} dx$
10. $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{2} dx$	11. $\int e^{3x} \cdot \cos 2x dx$	12. $\int \sin 3x \cdot \cos 5x dx$
13. $\int \frac{(x+5)dx}{x^3-2x^2-x+2}$	14. $\int \frac{x^5+4}{x^3+8} dx$	15. $\int \frac{dx}{4\cos x-3\sin x}$
16. $\int \frac{dx}{4+\cos^2 x}$	17. $\int \sin^7 x \cdot \cos^3 x dx$	18. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{\cos^2 2x}} dx$
19. $\int \sqrt{36-x^2} dx$	20. $\int \frac{\sqrt[4]{x}+1}{(\sqrt{x}+4) \cdot \sqrt[4]{x^3}} dx$	21. $\int \frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}$

Вариант № 7

1. $\int \frac{dx}{4x^2-9}$	2. $\int \cos^2 \frac{x}{4} dx$	3. $\int \frac{4 \cdot \sqrt[3]{\operatorname{arctg} 3x-2}}{1+9x^2} dx$
-----------------------------	---------------------------------	---

4. $\int \frac{1}{x^2 - 10x + 29} dx$	5. $\int \frac{x^2}{\sqrt{5 + x^6}} dx$	6. $\int \frac{x - \arccos^3 5x}{\sqrt{1 - 25x^2}} dx$
7. $\int \frac{4 - 3x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} dx$	8. $\int \ln x \frac{dx}{\sqrt{x^5}}$	9. $\int x^2 \cdot \cos x dx$
10. $\int \arcsin 2x dx$	11. $\int e^{-3x} \cdot \sin x dx$	12. $\int \cos 5x \cdot \sin 7x dx$
13. $\int \frac{x + 3}{x^3 - 27} dx$	14. $\int \frac{2x^4 + 1}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx$	15. $\int \frac{dx}{2 - \sin x}$
16. $\int (3 - \operatorname{tg}^5 x) dx$	17. $\int \sin^4 5x dx$	18. $\int \sqrt{\sin^3 6x} \cdot \cos 6x dx$
19. $\int \sqrt{27 - x^2} dx$	20. $\int \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} - 1} dx$	21. $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 - 9}}$

Вариант № 8

1. $\int (7x - 8)^4 dx$	2. $\int \frac{2 - 3 \operatorname{ctg}^2 3x}{\cos^2 3x} dx$	3. $\int \frac{dx}{(x + 2) \ln(x + 2)}$
4. $\int \frac{1}{x^2 + 8x + 25} dx$	5. $\int \frac{x}{\sqrt{16 - x^4}} dx$	6. $\int \frac{\sin 2x + 5}{4 + \sin^2 2x} \cos 2x dx$
7. $\int \frac{4 - 3x}{\sqrt{3 - 2x + x^2}} dx$	8. $\int \ln x \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$	9. $\int x^2 e^{-2x} dx$
10. $\int \operatorname{arctg} 7x dx$	11. $\int e^{2x} \cdot \cos x dx$	12. $\int \cos x \cdot \cos 7x dx$
13. $\int \frac{3x^5 + 1}{x^4 + 5x^2 + 6} dx$	14. $\int \frac{x^5 - x^3 + x + 1}{x^4 - x^3} dx$	15. $\int \frac{dx}{5 + 3 \cos x}$
16. $\int \operatorname{tg}^4 x dx$	17. $\int \sin^4 \frac{x}{3} dx$	18. $\int \cos^3 x \cdot \sqrt[3]{\sin^2 x} dx$
19. $\int \sqrt{6 - x^2} dx$	20. $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{2 + x + 1}}$	21. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^3} dx$

Вариант № 9

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$	2. $\int \left(3 - \cos^2 \frac{x}{3}\right) dx$	3. $\int \frac{xdx}{\cos^2(3x^2+5)}$
4. $\int \frac{1}{x^2+14x+65} dx$	5. $\int \frac{x^2}{9-x^6} dx$	6. $\int \frac{e^{2x}}{e^x - e^{-x}} dx$
7. $\int \frac{x+3}{\sqrt{16+6x+x^2}} dx$	8. $\int x^3 \cdot \ln x dx$	9. $\int x^2 \cdot e^{5x} dx$
10. $\int \operatorname{arctg} 7x dx$	11. $\int e^{-3x} \cdot \sin 2x dx$	12. $\int \sin 9x \cdot \sin 5x dx$
13. $\int \frac{dx}{x^3-5x^2+4x}$	14. $\int \frac{x^3+2}{x^3-4x^2+4x} dx$	15. $\int \frac{dx}{2 \sin x + \cos x}$
16. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$	17. $\int \sin^7 5x \cdot \cos^3 5x dx$	18. $\int \sqrt[3]{\cos 3x} \cdot \sin^3 3x dx$
19. $\int \sqrt{7-x^2} dx$	20. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3} dx$	21. $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{25+x^2}}$

Вариант № 10

1. $\int \frac{dx}{\cos^2(8x-3)}$	2. $\int 3^x \cdot (e^x + x^3 \cdot 3^{-x}) dx$	3. $\int \frac{\cos 3x}{3 \sin 3x - 5} dx$
4. $\int \frac{1}{x^2-14x+58} dx$	5. $\int \frac{5^x}{25^x+9} dx$	6. $\int \frac{x - \arcsin^5 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$
7. $\int \frac{5x-3}{\sqrt{13+4x+x^2}} dx$	8. $\int x \cdot \ln(x^2+2) dx$	9. $\int x^2 \sin 3x dx$
10. $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{2} dx$	11. $\int e^x \cdot \cos 4x dx$	12. $\int \sin \frac{3}{2} x \cdot \cos \frac{5}{2} x dx$
13. $\int \frac{x+1}{x^3+5x^2+6x} dx$	14. $\int \frac{x^5-x^3+x+1}{x^4-x^3} dx$	15. $\int \frac{dx}{4 \cos x - 1}$
16. $\int \frac{dx}{5+3 \sin^2 x}$	17. $\int \cos^3 \frac{x}{4} dx$	18. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^4 x}$
19. $\int \sqrt{10-x^2} dx$	20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$	21. $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2-4}}$

Вариант № 11

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{6x-7}}$	2. $\int \left(3 - \sin^2 \frac{x}{4}\right) dx$	3. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
4. $\int \frac{1}{x^2 + 6x - 16} dx$	5. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{16 - e^{4x}}} dx$	6. $\int \frac{2x^3 - x^7}{5 + x^8} dx$
7. $\int \frac{(x-2) \cdot dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$	8. $\int x \cdot \sin \frac{x}{2} dx$	9. $\int (x+3) \cdot \ln^2(x+3) dx$
10. $\int \operatorname{arctg} 4x dx$	11. $\int e^{-2x} \cdot \cos \frac{x}{2} dx$	12. $\int \sin 3x \cdot \sin x dx$
13. $\int \frac{dx}{x^3 - 4x^2 + 3x}$	14. $\int \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$	15. $\int \frac{dx}{3 - 2 \cos x}$
16. $\int \sin^4 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} dx$	17. $\int (1 + \operatorname{ctg}^4 2x) dx$	18. $\int e^{-\sqrt{x}} dx$
19. $\int \sqrt{11 - x^2} dx$	20. $\int \frac{dx}{\sqrt{(64 + x^2)^3}}$	21. $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2 - 4}}$

Вариант № 12

1. $\int \frac{dx}{16 + 9x^2}$	2. $\int \frac{1 + 3 \sin^2 2x}{1 - \cos 4x} dx$	3. $\int e^{\frac{4}{x}} \frac{dx}{x^2}$
4. $\int \frac{1}{x^2 + 10x + 34} dx$	5. $\int \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{9 + e^{-2x}}}$	6. $\int \frac{(\arccos x)^3 - x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$
7. $\int \frac{xdx}{\sqrt{6x - 9x^2}}$	8. $\int x \cdot 2^x dx$	9. $\int x \cdot \ln^2 4x dx$
10. $\int \arccos 4x dx$	11. $\int e^{-2x} \cdot \sin \frac{x}{2} dx$	12. $\int \sin \frac{x}{7} \cdot \sin \frac{x}{4} dx$
13. $\int \frac{dx}{9x^3 - 6x^2 + x}$	14. $\int \frac{x^4}{x^4 - 1} dx$	15. $\int \frac{dx}{2 - \sin x}$
16. $\int \frac{dx}{2 + \sin x \cos x - \cos^2 x}$	17. $\int \cos^3 2x dx$	18. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$

19. $\int \sqrt{12 - x^2} dx$	20. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{x(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})} dx$	21. $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{7 + x^2}}$
-------------------------------	--	--

Вариант № 13

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x - 2}}$	2. $\int \frac{3 - 2\operatorname{ctg}^2 2x}{\cos^2 2x} dx$	3. $\int \frac{e^{3x}}{4 + e^{3x}} dx$
4. $\int \frac{1}{x^2 - 16x + 68} dx$	5. $\int \frac{3^x}{9^x + 4} dx$	6. $\int \frac{4 + \ln x}{x \cdot (1 - \ln^2 x)} dx$
7. $\int \frac{2x - 5}{\sqrt{4x^2 + 4x + 6}} dx$	8. $\int x \cdot \cos 2x dx$	9. $\int (x - 2) \cdot \ln^2(x - 2) dx$
10. $\int \operatorname{arctg} 3x dx$	11. $\int e^{-2x} \cdot \cos 4x dx$	12. $\int \cos 5x \cdot \sin 6x dx$
13. $\int \frac{(x - 4) dx}{x^3 - 6x^2 + 9x}$	14. $\int \frac{x^5}{x^3 + x^2 + 3x + 3} dx$	15. $\int \frac{dx}{4 - 5 \sin x}$
16. $\int \frac{dx}{4 + 3 \cos^2 x - 5 \sin^2 x}$	17. $\int \sin^5 \frac{x}{2} dx$	18. $\int \cos(\ln x) dx$
19. $\int \sqrt{13 - x^2} dx$	20. $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{6 - x^2}}$	21. $\int \frac{dx}{\sqrt{(4 + x^2)^3}}$

Вариант № 14

1. $\int \frac{dx}{4 - 2x}$	2. $\int (2^x + 3x^2 \cdot 4^{-x}) \cdot 4^x dx$	3. $\int \frac{\sqrt[3]{4 + \ln x}}{x} dx$
4. $\int \frac{1}{x^2 - 8x + 25} dx$	5. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} - 2}} dx$	6. $\int \frac{\sin x + 4}{4 \sin^2 x + 9} \cos x dx$
7. $\int \frac{x + 5}{\sqrt{8 + 2x - x^2}} dx$	8. $\int x \cdot \ln(x^2 - 3) dx$	9. $\int (6x^2 + 1) \cdot \sin 2x dx$
10. $\int \arcsin \frac{x}{2} dx$	11. $\int e^{-4x} \cdot \sin 2x dx$	12. $\int \sin 3x \cdot \sin 10x dx$
13. $\int \frac{x - 3}{x^3 + 5x^2 + 6x} dx$	14. $\int \frac{x^4 + 2x - 2}{x^4 - 1} dx$	15. $\int \frac{dx}{2 \sin x + \cos x - 2}$

16. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$	17. $\int \sin^7 9x \cdot \cos^3 9x dx$	18. $\int \sin^5 x \frac{dx}{\sqrt{\cos^3 x}}$
19. $\int \sqrt{8-x^2} dx$	20. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}} dx$	21. $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2-2}}$

Вариант № 15

1. $\int e^{3-2x} dx$	2. $\int \frac{4-2tg^2 4x}{\sin^2 4x} dx$	3. $\int \cos(\ln x + 5) \frac{dx}{x}$
4. $\int \frac{1}{x^2 + 16x + 73} dx$	5. $\int \frac{e^t}{\sqrt{e^{2t} + 5}} dt$	6. $\int \frac{x - (\arctg x)^4}{1 + x^2} dx$
7. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{8x-x^2-15}} dx$	8. $\int x \cdot e^{-2x} dx$	9. $\int x \cdot \ln^2 x dx$
10. $\int \arctg 2x dx$	11. $\int e^{-x} \cdot \cos 4x dx$	12. $\int \sin 4x \cdot \sin 3x dx$
13. $\int \frac{x+1}{x^4 - x^3} dx$	14. $\int \frac{x^4 \cdot dx}{x^4 + 3x^2 + 2}$	15. $\int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x}$
16. $\int \cos^4 11x dx$	17. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$	18. $\int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx$
19. $\int \sqrt{3-x^2} dx$	20. $\int \frac{\sqrt[6]{x} + 1}{\sqrt[6]{x^7} + \sqrt[6]{x^5}} dx$	21. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx$

Вариант № 16

1. $\int \frac{dx}{9x - 3}$	2. $\int \frac{4 + \cos^2 2x}{1 + \cos 4x} dx$	3. $\int e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}}$
4. $\int \frac{1}{x^2 - 14x + 13} dx$	5. $\int \frac{4^x}{16^x + 9} dx$	6. $\int \frac{x^5 - 4x^2}{\sqrt{5+x^6}} dx$
7. $\int \frac{x+5}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}} dx$	8. $\int x \cdot 2^{3x} dx$	9. $\int x \cdot \ln^2 5x dx$
10. $\int \arccos 5x dx$	11. $\int e^{-2x} \cdot \sin 4x dx$	12. $\int \sin 3x \cdot \cos 5x dx$

13. $\int \frac{dx}{9x^3 - 6x^2 + x}$	14. $\int \frac{3x^3 + 1}{x^3 + 1} dx$	15. $\int \frac{dx}{3 - \sin x + \cos x}$
16. $\int \cos^3 2x \cdot \sin^4 2x dx$	17. $\int \frac{dx}{2 - \cos^2 x}$	18. $\int \sqrt{\sin^3 6x} \cdot \cos^3 6x dx$
19. $\int \sqrt{100 - x^2} dx$	20. $\int \frac{x^3 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[4]{1+x}} dx$	21. $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 - a^2}}$

Вариант № 17

1. $\int 3^{-2x} dx$	2. $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx$	3. $\int \frac{x dx}{\sqrt{7x^2 - 3}}$
4. $\int \frac{1}{x^2 - 6x + 13} dx$	5. $\int \frac{e^{4x}}{\sqrt{16 - e^{8x}}} dx$	6. $\int \frac{8x - (\arctg 2x)^5}{1 + 4x^2} dx$
7. $\int \frac{8x + 11}{\sqrt{4x^2 + 12x - 1}} dx$	8. $\int x^2 \ln x dx$	9. $\int x^2 \cdot 4^{-x} dx$
10. $\int \arctg 4x dx$	11. $\int e^{-x} \cdot \cos 5x dx$	12. $\int \sin 2x \cdot \sin 6x dx$
13. $\int \frac{x + 3}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx$	14. $\int \frac{x^3 \cdot dx}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$	15. $\int \frac{dx}{3 + \cos x}$
16. $\int \frac{12 \sin^4 3x}{\cos^2 3x} dx$	17. $\int \cos^3 x \cdot \sin^5 x dx$	18. $\int (\arcsin x)^2 dx$
19. $\int \sqrt{49 - x^2} dx$	20. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$	21. $\int \frac{dx}{\sqrt{(25 + x^2)^3}}$

Вариант № 18

1. $\int \frac{dx}{16 - 9x}$	2. $\int \frac{3 - 2 \operatorname{ctg}^2 6x}{\cos^2 6x} dx$	3. $\int \sin(\ln x - 5) \cdot \frac{1}{x} dx$
4. $\int \frac{1}{x^2 - 10x + 9} dx$	5. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{3 + e^{4x}}} dx$	6. $\int \frac{x^2 + 3x^5}{x^6 - 9} dx$
7. $\int \frac{2x dx}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}$	8. $\int x \cdot \ln x dx$	9. $\int x^2 \cdot 2^x dx$

10. $\int \arcsin 3x dx$	11. $\int e^{-x} \cdot \cos 2x dx$	12. $\int \sin \frac{5}{2} x \cdot \cos 7x dx$
13. $\int \frac{2x-1}{4x^3+4x^2+x} dx$	14. $\int \frac{x^3+x^2}{x^3+x^2+2x+2} dx$	15. $\int \frac{dx}{\sin x - 3\cos x}$
16. $\int \frac{dx}{1-3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$	17. $\int \cos^3 2x \cdot \sin^2 2x dx$	18. $\int x^3 \cdot \sin x^2 dx$
19. $\int \sqrt{64-x^2} dx$	20. $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{9+x^2}}$	21. $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2-16}}$

Вариант № 19

1. $\int 2e^{3-4x} dx$	2. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$	3. $\int \frac{x^3 dx}{5-4x^4}$
4. $\int \frac{1}{x^2-8x-9} dx$	5. $\int \frac{6^x}{36^x+49} dx$	6. $\int \frac{x+\sqrt{\arccos 2x}}{\sqrt{1-4x^2}} dx$
7. $\int \frac{(5x+3)dx}{\sqrt{25x^2-10x+9}}$	8. $\int (4x-2) \cdot \cos 2x dx$	9. $\int x \cdot \ln^2 7x dx$
10. $\int \operatorname{arcctg} 3x dx$	11. $\int e^{2x} \cdot \sin 4x dx$	12. $\int \sin \frac{7}{2} x \cdot \cos x dx$
13. $\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4} dx$	14. $\int \frac{x^3+1}{4x^3-4x^2+x} dx$	15. $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$
16. $\int \frac{dx}{\cos^2 x - 4\cos x \sin x + 1}$	17. $\int \frac{\cos^7 x}{\sin^2 x} dx$	18. $\int (\arccos x)^2 dx$
19. $\int \sqrt{81-x^2} dx$	20. $\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt[3]{ax+b}}$	21. $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2-9}}$

Вариант № 20

1. $\int e^{2x-4} dx$	2. $\int \frac{4-2\operatorname{tg}^2 10x}{\sin^2 10x} dx$	3. $\int e^{\sin^2 x} \cdot \sin 2x dx$
4. $\int \frac{1}{x^2+6x+13} dx$	5. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{4-e^{4x}}} dx$	6. $\int \frac{x^5-3x^2}{\sqrt{16+x^6}} dx$

7. $\int \frac{x+1}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx$	8. $\int x \cdot \cos \frac{x}{2} dx$	9. $\int x^2 \cdot \ln^2 x dx$
10. $\int \arccos 3x dx$	11. $\int e^{-5x} \cdot \cos x dx$	12. $\int \cos 4x \cdot \sin 2x dx$
13. $\int \frac{x+1}{x^3 - x^2 + 2x - 2} dx$	14. $\int \frac{x^4 + 7}{x^4 - 1} dx$	15. $\int \frac{dx}{5 - 3 \sin x}$
16. $\int tg^6 x dx$	17. $\int \cos^4 \frac{x}{8} dx$	18. $\int \sin^2 x \cdot \cos^7 x dx$
19. $\int \sqrt{169 - x^2} dx$	20. $\int \frac{dx}{x\sqrt{49 + x^2}}$	21. $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 - 16}}$

Вариант № 21

1. $\int \frac{dx}{\sin^2(3x+9)}$	2. $\int \frac{(x+2)^2}{x \cdot (x^2 + 4)} dx$	3. $\int e^{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$
4. $\int \frac{1}{x^2 + 16x + 15} dx$	5. $\int 2^{-x} \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^x\right)^3 dx$	6. $\int \frac{(9 + 2 \ln x) dx}{(4 - \ln^2 x)x}$
7. $\int \frac{x+1}{\sqrt{3+4x+x^2}} dx$	8. $\int x \sin x dx$	9. $\int x^7 \cdot \ln^2 x dx$
10. $\int \arctg 2x dx$	11. $\int e^{-\frac{x}{2}} \cdot \sin x dx$	12. $\int \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{3}{2} x dx$
13. $\int \frac{2x+1}{x^3 - 1} dx$	14. $\int \frac{x^4 - 17x^2}{x^3 + 4x^2 - x - 4} dx$	15. $\int \frac{dx}{4 \cos x - 1}$
16. $\int \frac{\sin 6x}{4 + \cos^4 3x} dx$	17. $\int \sin^4 \frac{x}{2} dx$	18. $\int \frac{x^3 \cdot dx}{2 + \sqrt{4 - x^2}}$
19. $\int \sqrt{15 - x^2} dx$	20. $\int \frac{\sqrt[4]{3x+2} + 1}{(\sqrt{3x+2} + 4) \cdot \sqrt[4]{(3x+2)^3}} dx$	21. $\int \frac{dx}{\sqrt{(36 + x^2)^3}}$

Вариант № 22

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-4}}$	2. $\int (3 + tg^2 4x) dx$	3. $\int (\ln^3 x - 6) \frac{dx}{x}$
----------------------------------	----------------------------	--------------------------------------

4. $\int \frac{1}{x^2 + 12x + 40} dx$	5. $\int \frac{2^x}{\sqrt{16 - 4^x}} dx$	6. $\int \frac{(4x + \arcsin 2x)dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$
7. $\int \frac{x+1}{\sqrt{4x^2 - 4x + 8}} dx$	8. $\int (x-3) \cdot \ln(x-3) dx$	9. $\int x^2 \cdot \sin \frac{x}{2} dx$
10. $\int \arcsin 6x dx$	11. $\int e^{-4x} \cdot \sin \frac{x}{2} dx$	12. $\int \sin \frac{3}{2}x \cdot \cos \frac{7}{2}x dx$
13. $\int \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 - x^2 - 6x} dx$	14. $\int \frac{x^3 dx}{x^3 - 8}$	15. $\int \frac{dx}{4 + 5 \cos x}$
16. $\int \sin^2 3x \cdot \cos^2 x dx$	17. $\int \operatorname{ctg}^4 3x dx$	18. $\int x \cdot \operatorname{arctg} 2x dx$
19. $\int \sqrt{14 - x^2} dx$	20. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{x(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})} dx$	21. $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{(4 + x^2)^3}}$

Вариант № 23

1. $\int 4^{2-3x} dx$	2. $\int \frac{dx}{\cos 4x + \sin^2 2x}$	3. $\int \frac{dx}{x \cdot \cos^2(4 - \ln x)}$
4. $\int \frac{1}{x^2 - 4x + 29} dx$	5. $\int 5^{-x} \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{5}\right)^x\right)^6 dx$	6. $\int \frac{\cos x + 5}{\sqrt{4 - \cos^2 x}} \sin x dx$
7. $\int \frac{x+3}{\sqrt{3-4x-4x^2}} dx$	8. $\int (x-1) \cdot \sin 3x dx$	9. $\int x \cdot \ln^2 9x dx$
10. $\int \operatorname{arctg} 5x dx$	11. $\int e^{-3x} \cdot \cos x dx$	12. $\int \sin \frac{x}{3} \sin 2x dx$
13. $\int \frac{x-3}{x^3 - 2x^2 + x} dx$	14. $\int \frac{x^4 + 13x + 40}{x^3 - 3x^2 - 4x + 12} dx$	15. $\int \frac{dx}{3 - 5 \cos x}$
16. $\int \frac{dx}{5 - 5 \sin^2 x + 2 \cos^2 x}$	17. $\int \cos^4 \frac{x}{2} dx$	18. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos^5 x}$
19. $\int \sqrt{121 - x^2} dx$	20. $\int \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx$	21. $\int \frac{dx}{\sqrt{(2 + x^2)^3}}$

Вариант № 24

1. $\int (5x-7)^5 dx$	2. $\int (2 + \operatorname{ctg}^2 7x) dx$	3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sin^2 \sqrt{x}}$
4. $\int \frac{1}{x^2 - 6x - 7} dx$	5. $\int \frac{x}{x^4 + 16} dx$	6. $\int \frac{(x - \operatorname{arctg} 3x) dx}{1 + 9x^2}$
7. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2 + 2x - 2}} dx$	8. $\int x \cdot 3^x dx$	9. $\int \ln^2 x \frac{dx}{x^3}$
10. $\int \arccos \frac{x}{2} dx$	11. $\int e^{4x} \cdot \sin \frac{x}{2} dx$	12. $\int \cos 5x \cdot \cos x dx$
13. $\int \frac{dx}{x^4 + 5x^2 + 4}$	14. $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx$	15. $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x + 1}$
16. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$	17. $\int \sin^5 2x dx$	18. $\int \sqrt{\frac{\arccos 3x + 4}{4 - 36x^2}} dx$
19. $\int \sqrt{17 - x^2} dx$	20. $\int \frac{xdx}{\sqrt{(4 + x^2)^3}}$	21. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 25}}$

Вариант № 25

1. $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$	2. $\int \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$	3. $\int x^3 \cdot \sqrt[4]{5x^4 - 3} dx$
4. $\int \frac{1}{x^2 - 12x + 11} dx$	5. $\int \frac{e^x}{\sqrt{15 + e^{2x}}} dx$	6. $\int \frac{\ln x - 1}{\sqrt{1 - \ln^2 x}} \cdot \frac{dx}{x}$
7. $\int \frac{x-3}{\sqrt{7-6x-x^2}} dx$	8. $\int (x+4) \cdot \ln(x+4) dx$	9. $\int (x+1)^2 \cdot e^{-3x} dx$
10. $\int \operatorname{arctg} 6x dx$	11. $\int e^{4x} \cdot \cos x dx$	12. $\int \cos \frac{x}{4} \sin \frac{x}{3} dx$
13. $\int \frac{3x^2 + 4}{x^3 + x^2 + x + 1} dx$	14. $\int \frac{x^4 + 9x + 24}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} dx$	15. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x - 2}$
16. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$	17. $\int \sin^4 \frac{x}{8} dx$	18. $\int \frac{x^3 \cdot dx}{3 + \sqrt{9 - x^2}}$

19. $\int \sqrt{20 - x^2} dx$	20. $\int \frac{x+1}{x \cdot \sqrt{x-2}} dx$	21. $\int \frac{dx}{x^4 \cdot \sqrt{x^2 - 1}}$
-------------------------------	--	--

Вариант № 26

1. $\int \sqrt[3]{x-5} dx$	2. $\int \frac{3-2\operatorname{ctg}^2 8x}{\cos^2 8x} dx$	3. $\int 2^{-x^3+4} \cdot 3x^2 dx$
4. $\int \frac{1}{x^2 + 4x + 20} dx$	5. $\int \frac{7^x}{49^x - 9} dx$	6. $\int \frac{5x + \arcsin 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx$
7. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{15+4x-4x^2}} dx$	8. $\int x \cdot e^{3x} dx$	9. $\int x \cdot \ln^2 6x dx$
10. $\int \arcsin 5x dx$	11. $\int e^{-2x} \cdot \cos 3x dx$	12. $\int \sin 5x \cos 7x dx$
13. $\int \frac{x^3 - 6}{x^4 + 6x^2 + 8} dx$	14. $\int \frac{2x^4 - x^3 + 5}{x^3 - 9x} dx$	15. $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x - 2}$
16. $\int \frac{dx}{4 - 3 \sin^2 x - 4 \cos x \sin x}$	17. $\int \frac{\cos^5 6x}{\sin^4 6x} dx$	18. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$
19. $\int \sqrt{18-x^2} dx$	20. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1} dx$	21. $\int \frac{dx}{\sqrt{(3+x^2)^3}}$

Вариант № 27

1. $\int (2x+3)^3 dx$	2. $\int \left(2 \sin^2 \frac{x}{2} - 3e^x \right) dx$	3. $\int e^{\operatorname{arctg} 2x} \frac{dx}{1+4x^2}$
4. $\int \frac{1}{x^2 + 2x - 8} dx$	5. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} - 4}}$	6. $\int \frac{\ln x - 3}{\sqrt{4 - \ln^2 x}} \cdot \frac{dx}{x}$
7. $\int \frac{x+5}{\sqrt{x^2 + 6x + 10}} dx$	8. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$	9. $\int x^3 \cdot \ln^2 x dx$
10. $\int \operatorname{arcctg} 6x dx$	11. $\int e^x \cdot \sin 3x dx$	12. $\int \cos \frac{3}{2} x \cdot \cos \frac{5}{2} x dx$
13. $\int \frac{x+1}{x^3 - x^2} dx$	14. $\int \frac{x^5 + 2x^2 + 3x - 19}{x^3 + 4x^2 + x - 6} dx$	15. $\int \frac{dx}{\sin x - 3 \cos x}$

16. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x} dx$	17. $\int \sin^7 4x \cdot \cos^3 4x dx$	18. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(3-x^2)^3}}$
19. $\int \sqrt{196-x^2} dx$	20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$	21. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

Вариант № 28

1. $\int \sin(6x-2) dx$	2. $\int \frac{(x+3)^2}{x \cdot (x^2+9)} dx$	3. $\int \cos(3-e^x) \cdot e^x dx$
4. $\int \frac{1}{x^2+12x+20} dx$	5. $\int 7^{-x} \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{7}\right)^x\right)^2 dx$	6. $\int \frac{\arcsin^2 2x+x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$
7. $\int \frac{x+2}{\sqrt{11+10x-x^2}} dx$	8. $\int x \cdot \sin 7x dx$	9. $\int (x+5) \cdot \ln^2(x+5) dx$
10. $\int \arccos \frac{x}{4} dx$	11. $\int e^{4x} \cdot \cos \frac{x}{2} dx$	12. $\int \cos x \cdot \cos 6x dx$
13. $\int \frac{xdx}{x^3-1}$	14. $\int \frac{x^3-3x^2-3x+8}{x^3-3x^2-4x+12} dx$	15. $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}$
16. $\int \sin^4 3x dx$	17. $\int \sin^5 \frac{x}{3} dx$	18. $\int \frac{x^2}{(x^2+2)^2} dx$
19. $\int \sqrt{16-x^2} dx$	20. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}}$	21. $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2-36}}$

Вариант № 29

1. $\int e^{5-2x} dx$	2. $\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx$	3. $\int \frac{x^2 dx}{4x^3-5}$
4. $\int \frac{1}{x^2-4x-12} dx$	5. $\int \frac{3^x}{\sqrt{25-9^x}} dx$	6. $\int \frac{x + \operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx$
7. $\int \frac{8x-11}{\sqrt{15+2x-x^2}} dx$	8. $\int (x-5) \cdot \ln(x-5) dx$	9. $\int x^2 \cdot e^{-\frac{x}{2}} dx$
10. $\int \operatorname{arctg} x dx$	11. $\int e^{2x} \cdot \sin x dx$	12. $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3} dx$

13. $\int \frac{2x^2 - 1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} dx$	14. $\int \frac{x^4 dx}{x^2 \cdot (x-1)^2}$	15. $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x + 1}$
16. $\int \sin^2 2x \cdot \cos^2 2x dx$	17. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x} dx$	18. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$
19. $\int \sqrt{9-x^2} dx$	20. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}}$	21. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx$

Вариант № 30

1. $\int (8-3x)^{\frac{6}{5}} dx$	2. $\int \frac{4-2tg^2 3x}{\sin^2 3x} dx$	3. $\int e^{\arctg x} \cdot \frac{dx}{9+9x^2}$
4. $\int \frac{1}{x^2 - 2x - 3} dx$	5. $\int \frac{8^x}{64^x + 4} dx$	6. $\int \frac{\cos x + 5}{4 - \cos^2 x} \sin x dx$
7. $\int \frac{xdx}{\sqrt{9x^2 - 6x + 2}}$	8. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$	9. $\int x \cdot \ln^2 8x dx$
10. $\int \arcsin 8x dx$	11. $\int e^x \cdot \sin \frac{3}{2} x dx$	12. $\int \sin \frac{5}{2} x \cdot \cos \frac{x}{2} dx$
13. $\int \frac{dx}{x^3 - 8x^2 + 21x - 14}$	14. $\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x^2} dx$	15. $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$
16. $\int \frac{dx}{4 + \sin^2 x}$	17. $\int \sin^5 2x \cos^3 2x dx$	18. $\int \sin(\ln x) dx$
19. $\int \sqrt{4-x^2} dx$	20. $\int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{1 + \sqrt[3]{x}}$	21. $\int \frac{\sqrt{2+x^2}}{x^4} dx$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бубняк Т. І. Вища математика : Навчальний посібник / Т. І. Бубняк. – К. : Новий світ, 2000, 2004.
2. Вища математика: Підручник. У 2-х книгах. Кн.1 : Основні розділи / Г.Й. Призва, В.В. Плахотник, Л.Д. Гординський та ін.; 3-а ред. Г.Л. Кулініча. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К. : Либідь, 2003.
3. Вища математика: Навчальний посібник. У 2-х ч. Ч.1 : Основні означення, приклади і задачі / Г.Л. Кулініч, Л.О. Максименко, В.В. Плахотник, Г.Й. Призва. – К. : Либідь, 1992.
4. Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах : Невизначений, визначений та невласні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння. Прикладні задачі : Навчальний посібник / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. – К. : Книги України ЛТД, 2010.
5. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч.1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высш. шк., 1986, 2000, 2005.
6. Дубовик В. П. Вища математика. У 3 ч. Ч.1,2: Навчальний посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Харків : Веста, 2008; К. : Ігнатекс-Україна., 2013.
7. Овчинников П.П. та ін. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч.1: / Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М.; За заг. ред. Овчинникова П.П.). – К.: Техніка, 2003.
8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.1: Учебное пособие для втузов. – М.: Наука, 1985.
9. Сборник задач по курсу высшей математики / Г.И. Кручкович, Н.И. Гутарина, П.Е. Дюбюк и др. – М.: Высш. шк., 1973.