

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
„УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ХІМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ”

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

З КУРСУ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ
(Розділ «Елементи теорії ймовірностей»)

Затверджено на засіданні кафедри
вищої математики.
Протокол № 1 від 27.08.15.

Дніпропетровськ УДХТУ 2016

Методичні вказівки та індивідуальні завдання з курсу вищої математики
(Розділ «Елементи теорії ймовірностей») / Укл.: Т.С. Науменко, І.В. Шапка. –
Дніпропетровськ: ДВНЗ УДХТУ, 2016. – 32 с.

Укладачі: Т.С. Науменко
І.В. Шапка

Відповідальний за випуск В.І. Олевський, д-р техн. наук

Навчальне видання

Методичні вказівки та індивідуальні завдання
з курсу вищої математики
(Розділ «Елементи теорії ймовірностей»)

Укладачі: НАУМЕНКО Тетяна Станіславівна
ШАПКА Ірина Віталіївна

Коректор Л.Я. Гоцуцова
Комп'ютерна верстка Л.Я. Гоцуцова

Підписано до друку 23.06.16. Формат 60×84/16. Папір ксерокс. Друк різнограф.
Умов.-друк. акр. 1,42. Облік.-вид. акр. 1,47. Тираж 100 прим. Зам. № 202.
Свідоцтво ДК № 5026 від 16.12.2015.

ДВНЗ УДХТУ, 49005, м. Дніпропетровськ-5, просп. Гагаріна, 8.

Редакційно-видавничий комплекс

1. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ. АЛГЕБРА ПОДІЙ

Теорія ймовірностей – математична наука, яка вивчає закономірності випадкових явищ. Одним із основних понять теорії ймовірностей є поняття випадкової події.

Забезпечення певного комплексу умов називають *випробуванням* або *дослідом*, а можливий результат випробування *подією*. Наприклад, підкидання монети є випробуванням, а випадання «герба» або «решка» – подіями. Події позначаються, як правило, великими латинськими літерами: A, B, C...

Подія *U* називається *вірогідною*, якщо при здійсненні визначеного набору умов вона завжди відбудеться. Подія *V* називається *неможливою*, якщо при здійсненні визначеного набору умов вона ніколи не відбудеться. Подію називають *випадковою*, якщо при здійсненні визначеного набору умов вона може відбутися, а може не відбутися в даному випробуванні.

Наприклад, кубик підкидається 1 раз, то:

- а) випадання числа очок не більшого 6 – достовірна подія;
- б) випадання числа очок більшого 6 – неможлива подія.

Дві події називають *рівноможливими*, якщо ні одна з них не є більш можливою ніж інша.

Дві події називають *сумісними*, якщо поява однієї з них не виключає появи іншої в одному й тому самому випробуванні. Дві події називають *несумісними*, якщо вони не можуть відбутися одночасно в одному й тому самому випробуванні. Наприклад, при одному підкиданні монети не можуть одночасно з'явитись герб і решка. Попарно несумісні випадкові події $A_1, A_2, \dots, A_n$ утворюють *повну групу подій*, якщо внаслідок випробування одна з них обов'язково відбудеться. Наприклад, події «виграш», «програш» і «нічия» (для певного гравця) утворюють повну групу подій у випробуванні – гри в шахи двох суперників.

Елементарними подіями (наслідками) у певному випробуванні називають усі можливі результати цього випробування, які не можна розкласти на простіші. Або іншими словами, якщо:

- а) кількість наслідків скінченна;
- б) всі вони рівноможливі;

в) ніякі два наслідки одночасно не реалізуються,

то наслідки називаються *елементарними подіями*. Множину всіх можливих елементарних подій ω називають *простором елементарних подій (або універсальною подією)*, позначають Ω . Наприклад, гральний кубик підкидають один раз. Елементарні події: ω_1 – випаде 1, ω_2 – 2, ω_3 – 3, ω_4 – 4, ω_5 – 5, ω_6 – 6. Простір елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

Елементарні події, при появі яких відбувається певна подія, називають *сприятливими* для цієї події. Наприклад, при підкиданні грального кубика для події $A = \{\text{випаде непарне число очок}\}$ сприятливими є елементарні події: $A = \{1, 3, 5\}$.

Приклад. Монету підкидають двічі. Для даного випробування описати простір елементарних подій.

Розв'язання. При двократному підкиданні монети можливі чотири елементарних наслідки:

$$(A,A); (A,P); (P,A); (P,P),$$

де A – випадання аверса (зображення «герба»); P – випадання реверса (зображення «номіналу»). Очевидно, вони утворюють повну групу подій, тому

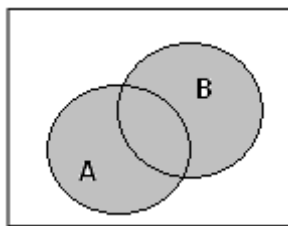
$$\Omega = \{(A,A); (A,P); (P,A); (P,P)\}$$

є простір елементарних подій даного випробування.

Сумою двох випадкових подій A і B називають таку подію, яка полягає в появі хоча б однієї з подій A або B , і позначають $A+B$ або $A \cup B$ (рис. 1.1).

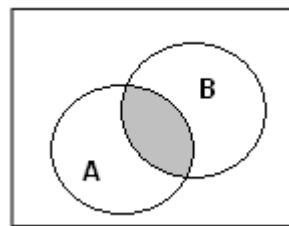
Добутком двох випадкових подій A і B називають таку подію, яка полягає в сумісній появі подій A і B , і позначають $A \cdot B$ або $A \cap B$ (рис. 1.2).

Різницею двох випадкових подій A і B називають подію, яка полягає в тому, що відбувається подія A і не відбувається подія B , і позначають $A-B$ або $A \setminus B$ (рис. 1.3).



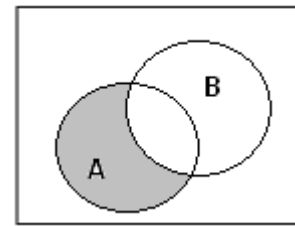
$$C = A \cup B$$

Рис. 1.1



$$C = A \cap B$$

Рис. 1.2



$$C = A \setminus B$$

Рис. 1.3

Подію $\bar{A}$ називають *протилежною* до події A в даному випробуванні, якщо вона відбувається тоді, коли не відбувається подія A , тобто $\bar{A} = \Omega - A$. Очевидно, що протилежні події несумісні та утворюють повну групу подій.

Для додавання та множення подій виконуються закони:

1. $A+B=B+A$, $AB=BA$ – комутативний;
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$, $(AB)C=A(BC)$ – асоціативний;
3. $(A+B)C=AC+BC$ – дистрибутивний.

Множина S є *алгеброю подій*, коли

1. $U \in S$ (алгебра подій містить вірогідну подію);
2. Якщо $A \in S$, $B \in S$, то $A+B \in S$, $AB \in S$, $A \setminus B$.

2. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

При обчисленні ймовірностей подій досить часто потрібно підраховувати кількість елементарних подій (сприятливих деякій події або всіх можливих подій). Здебільшого це зумовлює великі складнощі, подолати які допомагає

комбінаторика. Вона вивчає способи підрахунку кількості розміщень, перестановок, сполучень.

Нагадаємо, що $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, причому $0! = 1$.

Правило добутку. Нехай із деякої скінченої множини

1-й об'єкт можна вибрати k_1 способами,

2-й об'єкт – k_2 способами, (2.1)

.....

n -й об'єкт – k_n способами.

Тоді довільний набір, перерахованих об'єктів, із даної множини можна вибрати $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$ способами.

Приклад. Скільки існує тризначних чисел з різними цифрами?

Розв'язання. В десятковій системі числення десять цифр: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. На першому місці може стояти будь-яка з 9 цифр, крім нуля. На другому – будь-яка цифра з тих, що залишилися 9 цифр, крім вибраної. На останньому місці – будь-яка цифра із 8 цифр, що залишилися.

За правилом добутку, $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ тризначних чисел мають різні цифри.

Правило суми. При виконанні умов (1), будь-який із об'єктів можна вибрати $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ способами.

Приклад. Скільки існує способів вибору одного олівця з коробки, яка містить 4 червоних, 6 синіх, 5 зелених олівців.

Розв'язання. Один олівець за правилом суми, можна вибрати $4+6+5=15$ способами.

Зазвичай у комбінаториці розглядають експеримент з вибору навмання k елементів з n . При цьому елементи:

а) не повертаються назад (схема вбору без повернення);

б) повертаються назад (схема вибору з поверненням).

I. Схема вибору без повернення

Розміщеннями із n елементів по k називають множини із m елементів, вибраних із n елементів, які можуть розрізнятися між собою як складом елементів, так і їх порядком. Визначають формулою

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (2.2)$$

Приклад. В змаганнях приймає участь 10 чоловік, троє з них займуть 1, 2, 3 місце. Скільки існує різних варіантів?

Розв'язання. Число різноманітних варіантів дорівнює

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720.$$

Перестановками із n елементів називають множини із n елементів, що відрізняються лише їх порядком. Визначають за формулою

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!.$$

Приклад. Скількома способами можна розставити 5 книг на полиці?

Розв'язання. Кількість способів дорівнює числу перестановок з п'яти елементів, тобто

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Сполученнями із n елементів по k називають множини із m елементів, вибраних із n елементів, які розрізняються між собою тільки складом елементів. Визначають формулою

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (2.3)$$

Справедлива тотожність:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}, \quad C_n^0 = 1, \quad C_n^1 = n, \\ C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n, \quad \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$$

Приклад. У турнірі брали участь 10 шахістів, і кожні 2 шахісти зустрічались один раз. Скільки партій було зіграно в турнірі?

Розв'язання. Партій було зіграно стільки, скільки можна взяти неупорядкованих 2-елементарних підмножин з 10-елементної множини, тобто

$$\tilde{N}_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 8!} = \frac{50}{2} = 45.$$

II. Схема вибору з поверненням

Якщо при виборі k елементів з n – елементи повертаються назад і упорядковуються, то говорять, що це *розміщення з поверненням*.

$$\bar{A}_n^k = n^k. \quad (2.4)$$

Приклад. В готелі 8 кімнат, кожна з яких може розмістити 3 чоловіки. Скільки існує варіантів розміщення трьох гостей, що прибули?

Розв'язання. Кожен наступний гість із 3 може бути поміщений у будь-яку із 8 кімнат, тому число розміщень з поверненням, за формулою розміщення з поверненням, дорівнює

$$\bar{A}_8^3 = 8^3 = 512.$$

Якщо при виборі k елементів з n елементи повертаються назад без упорядкування, то говорять, що це *сполучення з повторенням*. Число сполучень з повторенням із n елементів по k визначається за формулою

$$\tilde{N}_n^k = \tilde{N}_{n+k-1}^k. \quad (2.5)$$

Приклад. В магазині продають 10 видів тортів. Покупець вибав чек на три торти. Вважаючи, що будь-який набір рівноможливий, визначити число можливих замовлень.

Розв'язання. Число рівноможливих замовлень за формулою (2.5) дорівнює

$$\tilde{N}_{10+3-1}^3 = \tilde{N}_{12}^3 = \frac{12!}{(12-3)! \cdot 3!} = \frac{9! \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{9! \cdot 3!} = 220.$$

Нехай маємо n елементів, причому елемент a_1 повторюється n_1 раз, елемент a_2 – n_2 раз, ..., a_k – n_k раз; $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Тоді елементи a_1 можна переставити $P_{n_1} = (n_1)!$ способами, елементи a_2 – $P_{n_2} = (n_2)!$, ..., елементи a_k – $P_{n_k} = (n_k)!$

Тобто число перестановок з повтореннями менше числа перестановок без повторень в $n_1!n_2!\dots n_k!$ раз. Число перестановок з повтореннями з n елементів

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}.$$

Приклад. Скільки різних слів (які містять 4 букви) можна утворити із букв слова «МАМА»?

Розв'язання. В даному випадку відома формула числа перестановок безсильна, так як елементи в перестановках повторюються (при перестановці букв А і А або М і М ніяких змін не відбувається).

Маємо, $n = 4$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, тому можна утворити

$$P_4(2,2) = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

різних слів.

3. ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

3.1. Класичне означення ймовірності

Нехай події

$$A_1, A_2, \dots, A_n \in S \quad (3.1)$$

утворюють множину елементарних подій. Тоді події із (3.1), які призводять до настання події A , називаються сприятливими наслідками для події A , $m(A)$ – кількість сприятливих наслідків.

Ймовірність події A дорівнює відношенню кількості елементарних наслідків, сприятливих цій події, до кількості всіх рівно можливих елементарних наслідків у даному випробуванні.

Ймовірність події A позначають $P(A)$, тому за означенням

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad (3.2)$$

де m – кількість елементарних наслідків, сприятливих події A ; n – кількість усіх елементарних наслідків у даному випробуванні.

З класичного означення ймовірності випливають властивості ймовірності

$$1. 0 \leq P(A) \leq 1.$$

$$2. P(\Omega) = 1.$$

$$3. P\left(\bar{\Omega}\right) = 0$$

$A + \bar{A} = \Omega$ – достовірна подія, тому

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \text{ або } P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Приклад. В ящику 15 деталей, серед яких 10 пофарбовані. Робітник навмання бере 3 деталі. Знайти ймовірність того, що деталі пофарбовані.

Розв'язання. Подія A – 3 деталі пофарбовані.

$$m(A) = C_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)! 3!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 120 \text{ – число сприятливих подій.}$$

$$n = C_{15}^3 = \frac{15!}{(15-3)! 3!} = \frac{12! \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{12! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 455 \text{ – загальне число всіх можливих}$$

наслідків.

Маємо

$$P(A) = \frac{m(A)}{n} = \frac{120}{455} = \frac{24}{91}.$$

Приклад. В групі 12 студентів, 8 з яких відмінники. По списку відбирають 9 студентів. Знайти ймовірність того, що відберуть 5 відмінників.

Розв'язання. Подія A – відібрали 5 відмінників.

$$m(A) = C_8^5 \cdot \tilde{N}_4^4 = \frac{8!}{(8-5)! 5!} \cdot 1 = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5!} = 56,$$

де $\tilde{N}_8^5$ – число можливих наборів із 8 відмінників по 5;

$\tilde{N}_4^4$ – число можливих наборів по 4 із інших студентів.

n – загальне число способів вибору 12 студентів із 9 дорівнює

$$n = C_{12}^9 = \frac{12!}{(12-9)! 9!} = \frac{9! \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 9!} = 220.$$

$$P(A) = \frac{m(A)}{n} = \frac{56}{220} = \frac{14}{55}.$$

3.2. Геометричне означення ймовірності

Нехай множина всіх елементарних наслідків випробування нескінченна і утворює деяку множину Ω , усі елементарні наслідки рівноможливі. Причому події A сприяють на ті елементарні події, які утворюють множину $A \subseteq \Omega$. Тоді ймовірність події A дорівнює відношенню міри множини A до міри множини Ω , тобто

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}. \quad (3.3)$$

Мірою множини на прямій, площині, у просторі є відповідно довжина, площа, об'єм геометричної фігури, яку утворює ця множина.

Приклад. Два дійсних числа випадковим чином вибираються з інтервалу $[0;5]$. Яка ймовірність того, що:

а) сума двох чисел менша 4;

б) добуток двох чисел більший 5;

в) різниця двох чисел менша 2, а їх добуток більший 3.

Розв'язання. Позначимо через x перше число, вибране випадковим чином з інтервалу $[0;5]$, а через y – друге число. Тоді $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 5$. Внаслідок нескінченної кількості таких дійсних чисел треба скористатися означенням геометричної ймовірності. У цьому разі множиною всіх можливих наслідків випробування є квадрат (рис. 2.2-2.4) зі стороною 5, площа якого дорівнює 25, тобто

$$m(\Omega) = 25.$$

а) Нехай подія $A = \{\text{сума двох чисел менша 4}\}$. Тоді маємо $A = \{(x,y): x+y < 4\}$, або $A = \{y < 4-x\}$. Отже, елементарні наслідки випробування, що сприяють події A , утворюють фігуру (зафарбовану на рис. 2.2), площа якої

$$m(A) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8.$$

Застосовуючи формулу (2.2) для геометричної ймовірності, отримуємо

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{8}{25}.$$

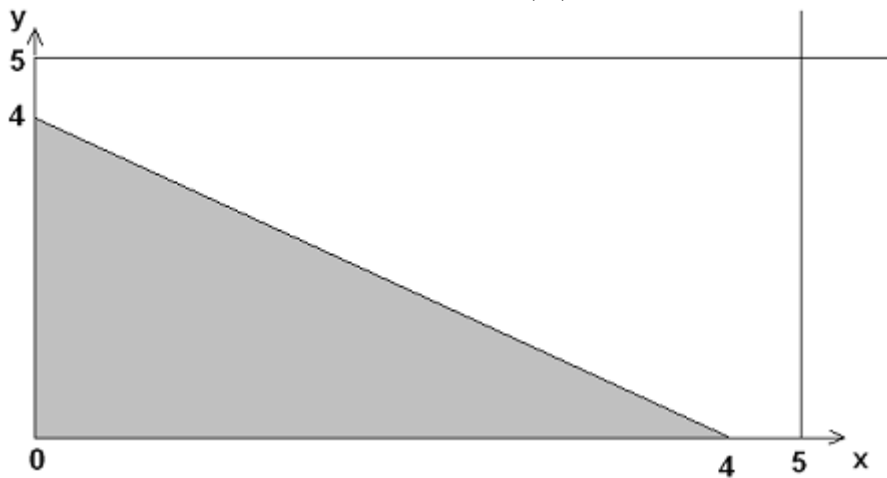


Рис. 3.1

б) Нехай подія $B = \{\text{добуток двох чисел більше 5}\}$. Тоді $B = \{(x,y): xy > 5\}$, або $B = \{(x,y): y > 5/x\}$.

Множині всіх наслідків, що сприяють події B , відповідає фігура ABC (зафарбована на рис. 2.3), де лінія AC – графік функції $y=5/x$. Обчислимо площу цієї фігури за допомогою визначеного інтеграла:

$$m(B) = \int_1^5 \left(5 - \frac{5}{x}\right) dx = (5x - 5 \ln x) \Big|_1^5 = 20 - 5 \ln 5.$$

Отже,

$$P(B) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{20 - 5 \ln 5}{25} \approx 0,478.$$

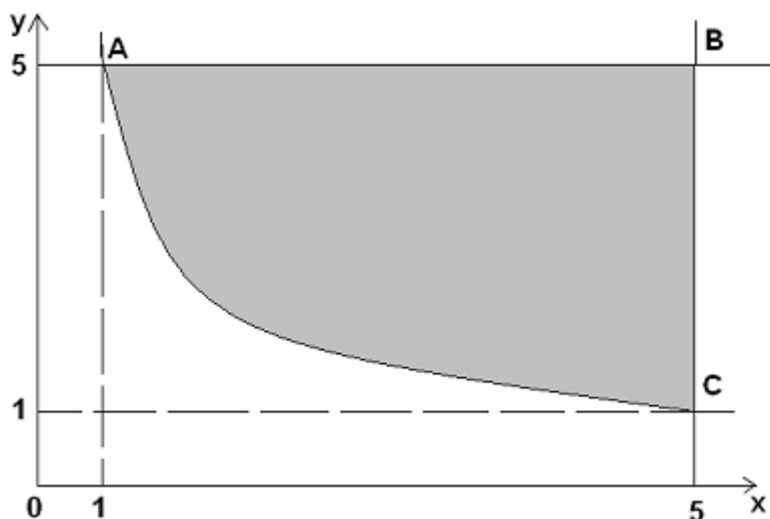


Рис. 3.2

в) Нехай подія $C = \{\text{різниця двох чисел менша 2, а їх добуток більший 3}\}$, тоді

$C = \{(x, y) : |x - y| < 2, xy > 3\}$, звідки отримуємо нерівності

$$y < x + 2, \quad y > x - 2, \quad y > \frac{x}{3}.$$

Множина точок, координати яких задовольняють зазначені нерівності, утворює фігуру ABCDE (рис. 2.4). Прямая AE задається рівнянням $y = x + 2$, CD – рівнянням $y = x - 2$, а лінія MEDN – графіком функції $y = \frac{3}{x}$. Абсциса точки M визначається з рівності $\frac{3}{x} = 5$, тобто $x = \frac{3}{5}$. Ордината точки N визначається з рівності $y = \frac{3}{5}$. Абсцису точки E як точки перетину двох ліній $y = \frac{3}{x}$ і $y = x + 2$ визначаємо з рівняння $x + 2 = \frac{3}{x}$, звідки $x = 1$. Аналогічно визначаємо абсцису точки D як точки перетину двох ліній $y = x - 2$ і $y = \frac{3}{x}$, тобто $x = 3$.

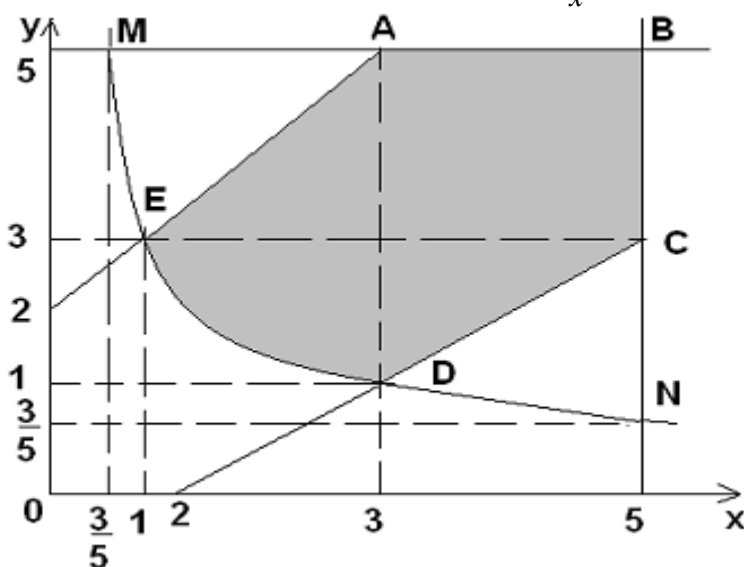


Рис. 3.3

Для визначення ймовірності події C обчислимо площу області ABCDE. Очевидно, що

$$S_{ABCDE} = S_{MBN} - S_{MAE} - S_{CND} = S_{MBN} - 2S_{CND}, \text{ оскільки } S_{MAE} = S_{CND}. \text{ Тоді}$$

$$S_{MBN} = \int_{\frac{3}{5}}^5 \left(5 - \frac{3}{x}\right) dx = 22 + 3 \ln 3 - 6 \ln 5;$$

$$S_{CND} = \int_3^5 \left(x - 2 - \frac{3}{x}\right) dx = 4 + 3 \ln 3 - 3 \ln 5.$$

Отже,

$$m(C) = 22 + 3 \ln 3 - 6 \ln 5 - 8 - 6 \ln 3 + 6 \ln 5 = 14 - 3 \ln 3, \text{ а}$$

$$P(C) = \frac{14 - 3 \ln 3}{25} \approx 0.428.$$

Приклад. (Задача Бюффона)

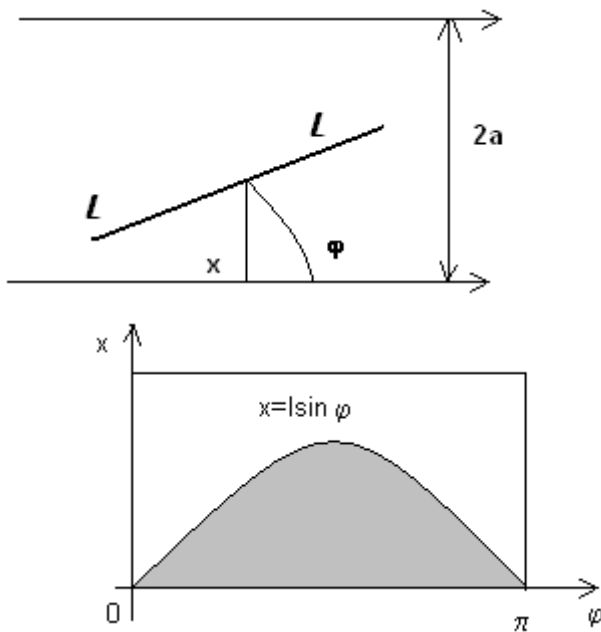
На площині накреслені паралельні прямі, які знаходяться одна від одної на відстані $2a$. На площину навмання кидають голку довжиною $2l < 2a$. Яка ймовірність того, що голка перетне яку-небудь пряму?

Розв'язання. Розберемося, що означає «навмання кидають голку». Усякі можливі положення голки (відрізка) на площині повністю визначаються положенням середини голки та кутом повороту голки відносно якого-небудь напрямку. Причому дві змінні (положення центра та кута повороту) змінюються незалежно одна від одної. Позначимо через x відстань від середини голки до найближчої прямої, а через $\varphi \in [0, \pi]$ кут між якимось напрямком прямих та голки. Множина можливих положень голки в цілому визначається вибором навмання точки із прямокутника $\Omega = [0, \pi] \times [0, a]$. Тоді $m(\Omega) = a\pi$.

Голка перетинає найближчу пряму, якщо координати взятої навмання точки задовольняють нерівності: $x \leq l \cdot \sin \varphi$. Площа області $A \subset \Omega$, точки якої задовольняють такій нерівності, дорівнює

$$m(A) = \int_0^\pi l \sin \varphi d\varphi = -l \cos \varphi \Big|_0^\pi = 2l.$$

$$\text{Шукана ймовірність дорівнює } P(A) = \frac{2l}{a\pi}.$$



2.3. Статистичне означення ймовірності

Оскільки класичне означення ймовірності передбачає, що всі елементарні наслідки випробування рівноможливі, що важко обґрунтувати, то розглядають ще й *статистичне означення ймовірності*.

Відносною частотою події A називають відношення кількості випробувань, у яких подія A відбулася, до кількості всіх проведених випробувань. Відносну частоту події A позначають $W(A)$. Тоді

$$W(A) = \frac{m}{n}, \quad (3.4)$$

де m – кількість випробувань, у яких відбулася подія A; n – кількість усіх проведених випробувань.

Число, навколо якого групуються значення частоти події A при великій кількості випробувань, називають *ймовірністю події A*:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} W(A).$$

Приклад. При перевірці готової продукції було виявлено 5 бракованих одиниць товару з 200 перевірених. Знайти відносну частоту бракованих одиниць товару.

Розв'язання. Нехай подія A полягає у тому, що виявлено браковану одиницю товару. Тоді відносна частота події A

$$W(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{200} = 0,025.$$

4. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Теорема 1. Ймовірність суми двох несумісних подій A і B дорівнює сумі їх ймовірностей

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Наслідок 1. Якщо $\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dots, \dot{A}_n$ – попарно несумісні, то ймовірність їх суми дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Наслідок 2. Ймовірність суми попарно несумісних подій $\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dots, \dot{A}_n$, які утворюють повну групу, дорівнює 1, тобто

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

Наслідок 3. Події A і $\bar{A}$ несумісні та утворюють повну групу подій, тому

$$D(\dot{A} + \bar{\dot{A}}) = D(\dot{A}) + D(\bar{\dot{A}}) = 1.$$

Звідси

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Теорема 2. Ймовірність суми двох сумісних подій A і B дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їхнього добутку:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Введемо поняття залежних і незалежних подій.

Випадкові події A і B називають *залежними*, якщо ймовірність появи однієї з них залежить від появи або не появи іншої. В іншому випадку події A та B називаються *незалежними*.

Теорема 3. Ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку їх ймовірностей

$$P(A \cdot \hat{A}) = D(\dot{A}) \cdot D(\hat{A}).$$

Наслідок. Ймовірність добутку n незалежних подій $\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dots, \dot{A}_n$ дорівнює добутку їх ймовірностей:

$$P(A_1 \cdot \dot{A}_2 \cdot \dots \cdot \dot{A}_n) = D(\dot{A}_1) \cdot D(\dot{A}_2) \cdot \dots \cdot D(\dot{A}_n).$$

Умовною ймовірністю події B за умови, що подія A вже відбулась, називається число $\frac{D(\dot{A} \cdot \hat{A})}{D(\dot{A})}$, яке позначається

$$\frac{D(\dot{A} \cdot \hat{A})}{D(\dot{A})} = D(B / A) = P_A(B).$$

Теорема 4. Ймовірність добутку двох залежних подій A і B дорівнює добутку ймовірності однієї з цих подій на умовну ймовірність іншої події за умови, що перша подія відбулася, тобто

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B / A) = P(B) \cdot P(A / B).$$

Наслідок

Якщо події A і B незалежні, то з теореми 4 слідує теорема 3.

Теорема 5. Ймовірність добутку n залежних подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ дорівнює добутку послідовних умовних ймовірностей

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1} \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n / A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1}).$$

Теорема 6. Ймовірність появи хоча б однієї з подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ дорівнює різниці між одиницею і ймовірністю добутку заперечень подій $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_n) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2 / \bar{A}_1) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n / \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_{n-1}).$$

Наслідок. Ймовірність появи хоча б однієї з подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ незалежних у сукупності, дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних подій:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n).$$

Приклад. З 200 студентів 1-го курсу 120 вивчають англійську мову, 100 – німецьку, 60 – обидві мови. Знайти ймовірність, що довільно взятий студент вивчає або англійську, або німецьку мову.

Розв'язання. A – студент вивчає англійську;

B – студент вивчає німецьку.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{120}{200} + \frac{100}{200} - \frac{60}{200} = 0,8.$$

Приклад. У першій урні міститься 7 білих і 3 чорних кульки; у другій – 5 білих і 5 чорних кульок; у третій – 4 білих і 6 чорних. З кожної урни навмання виймають по одній кульці. Знайти ймовірність того, що серед вибраних кульок виявиться:

а) лише одна біла кулька (подія C);

б) дві білі кульки (подія D);

в) три білі кульки (подія E);

г) хоча б одна біла кулька (подія F).

Розв'язання. Нехай подія $A_1 = \{\text{вийняли білу кульку з першої урни}\}$, $A_2 = \{\text{вийняли білу кульку з другої урни}\}$, $A_3 = \{\text{вийняли білу кульку з третьої урни}\}$. Тоді $P(A_1) = \frac{7}{10} = 0.7$, $P(A_2) = \frac{5}{10} = 0.5$, $P(A_3) = \frac{4}{10} = 0.4$. Події A_1, A_2, A_3 – незалежні.

а) Складні події $A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$, $\bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3$, $\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3$ – попарно несумісні. Скористуємось формулами (4.7),(4.8).

$$P(C)=P(A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3)=P(A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3)+P(\bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3)+P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3)=0.7 \cdot (1-0.5) \cdot (1-0.4) + (1-0.7) \cdot 0.5 \cdot (1-0.4) + (1-0.7) \cdot (1-0.5) \cdot 0.4=0.36;$$

$$\text{б) } P(D)=P(A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3)=0.7 \cdot 0.5 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.5 \cdot 0.4 + 0.7 \cdot 0.5 \cdot 0.4=0.41;$$

$$\text{в) } P(E)=P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)=0.7 \cdot 0.5 \cdot 0.4=0.14;$$

$$\text{г) } P(F)=1-P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3)=1-0.9=0.91.$$

Приклад. В урні 10 куль, з яких 2 білого кольору, а решта чорного. Навмання взято 2 кулі. Знайти ймовірність, що обидві кулі чорного кольору.

Розв'язання. Нехай елементарні події: A_1 – перша куля чорна. A_2 – друга куля чорна. Тоді подія $A=A_1 \cdot A_2$ – обидві кулі чорні. Ймовірність того, що друга куля чорна, буде залежати від того якого кольору перша куля. Якщо перша куля чорна, то ймовірність того, що друга куля також чорна, дорівнює умовній ймовірності події A_2 при умові, що подія A_1 вже відбулася:

$$P(A_2 / A_1)=\frac{7}{9},$$

так як після появи події A_1 – всього куль залишається 9, з них 7 чорних. Звідси

$$P(A)=P(A_1 \cdot A_2)=P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1)=\frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9}=\frac{28}{45}.$$

5. ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ. ФОРМУЛА БАЙЄСА

Якщо випадкова подія може відбутися лише сумісно з однією із несумісних між собою подій $H_1, H_2, \dots, H_n$, що утворюють повну групу, то ймовірність появи події A обчислюється за *формулою повної ймовірності*

$$P(A)=P(H_1) \cdot P(A / H_1)+P(H_2) \cdot P(A / H_2) \cdot \dots \cdot P(H_n) \cdot P(A / H_n)$$

або

$$P(A)=\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A / H_i), \quad (5.1)$$

де події $H_1, H_2, \dots, H_n$ – гіпотези, а $P(A / H_i)$ – умовна ймовірність появи події A при появі i -тої гіпотези ($i=1, 2, \dots, n$).

Приклад. Із колоди 36 карт навмання дістають карту і не дивлячись відкладають у сторону. Після чого знову дістають карту. Яка ймовірність того, що ця карта туз (подія A)?

Розв'язання. 1-й експеримент – вибір першої карти, 2-й експеримент – вибір другої карти. Нехай подія H_1 – перша карта туз, H_2 – перша карта не туз. Ця задача на формулу повної ймовірності (так як не сказано, що відбулася подія A).

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) = \frac{4}{36} \cdot \frac{3}{35} + \frac{32}{36} \cdot \frac{4}{35} = \frac{1}{9}.$$

Умовна ймовірність гіпотези H_i при умові того, що подія A відбулася, визначається за формулою ймовірності гіпотез або *формулою Байєса* (вона дозволяє передивитись ймовірності гіпотез після появи події A):

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i)}. \quad (5.2)$$

Приклад. Відповідно до статистичних даних, 40% одержувачів кредиту в банку складають державні організації, 45% – інші банки, 15% – фізичні особи. Також статистика показує, що ймовірність неповернення кредиту в термін 0,01; 0,2; 0,1 відповідно. Начальнику кредитного відділу прийшло повідомлення про неповернення чергового кредиту. Яка ймовірність того, що не сплатила фізична особа?

Розв'язання. Подія A може відбутись, якщо відбудеться одне з попарно несумісних подій: H_1 – кредит державної організації, H_2 – кредит інших банків, H_3 – кредит фізичної особи.

За формулою Байєса

$$P(H_3/A) = \frac{0,15 \cdot 0,1}{0,40 \cdot 0,01 + 0,45 \cdot 0,02 + 0,15 \cdot 0,1} = 0,536 \approx 54\%.$$

Висновок. Частина неповернення серед фізичних осіб – 54%.

Приклад. За теорією ймовірностей і математичною статистикою маємо 30 екзаменаційних білетів. Студент Шматко вивчив лише 20 білетів. Яким йому краще зайти на іспит, першим чи другим?

Розв'язання. Подія A – студент Шматко заходить першим,

$$P(A) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

Подія B – студент Шматко заходить другим – може відбутись лише з одним із попарно несумісних подій A_1 , A_2 , де:

подія A_1 – 1-й студент взяв 1 із 20 білетів, які Шматко знає; подія A_2 – 1-й студент взяв 1 із 10 інших білетів.

$$B = A_1B + A_2B,$$

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) = \frac{20}{19} \cdot \frac{19}{29} + \frac{10}{30} \cdot \frac{20}{29} = \frac{2}{3}.$$

Отже, не має різниці зайде студент першим чи другим.

6. НЕЗАЛЕЖНІ ПОВТОРНІ ВИПРОБУВАННЯ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛІ

6.1 Формула Бернуллі

Нехай проводиться n незалежних випробувань, причому ймовірність появи події A в кожному випробуванні одна й та сама, тобто не залежить від її появи в інших випробуваннях. Таку серію повторних незалежних випробувань називають *схемою Бернуллі*. Прикладом повторних незалежних випробувань є підкидання монети певної кількості разів, стрільба по мішені тощо.

Нехай випадкова подія A може відбутися в кожному випробуванні з однаковою ймовірністю $P(A)=p$ або не відбутися з ймовірністю $q=1-p$. Ймовірність того, що при n випробуваннях подія A відбудеться k разів, визначається за *формулою Бернуллі*:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}. \quad (6.1)$$

Найімовірніша кількість k_0 появи події A в n випробуваннях визначається з нерівностей

$$n \cdot p - q \leq k_0 \leq n \cdot p + p.$$

Формули, які часто застосовують в схемі Бернуллі.

Ймовірність появи події A :

а) менше k раз

$$P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k-1);$$

б) більше k раз

$$P_n(k+1) + P_n(k+2) + \dots + P_n(n);$$

в) не менше k раз

$$P_n(k) + P_n(k+1) + \dots + P_n(n);$$

г) не більше k раз

$$P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k);$$

д) хоча б один раз

$$1 - P_n(0).$$

Приклад. Прилад складено з 10 блоків, надійність кожного з яких 0,8. Блоки можуть виходити з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що:

- 1) відмовлять два блоки;
- 2) відмовить хоча б один блок;
- 3) відмовлять не менше двох блоків.

Знайти найімовірнішу кількість блоків, що вийдуть із ладу.

Розв'язання. Нехай подія A – відмова блока. Тоді

$$P(A)=p=1-0,8=0,2.$$

Тому $q=0,8$. За умовою задачі $n=10$. Застосувавши формулу Бернуллі (6.1) та наслідки з неї, матимемо:

$$1) D_{10}(2) = \tilde{N}_{10}^2 \delta^2 q^8 = 45 \cdot (0,2)^2 \cdot (0,8)^8 \approx 0,302;$$

$$2) P_{10}(1 \leq k \leq 10) = 1 - q^{10} = 1 - (0,8)^{10} \approx 0,893;$$

$$3) P_{10}(2 \leq k \leq 10) = 1 - [P_{10}(0) + P_{10}(1)] = 1 - C_{10}^0 \cdot (0,2)^0 \cdot (0,8)^{10} - C_{10}^1 \cdot (0,2)^1 \cdot (0,8)^9 \approx 0,624.$$

Найімовірнішу кількість блоків k_0 , що вийдуть із ладу, знайдемо з нерівностей

$$10 \cdot 0,2 - 0,8 \leq k_0 \leq 10 \cdot 0,2 + 0,2.$$

Отже, $k_0=2$.

6.2 Наближені формули у схемі Бернуллі

При великій кількості випробувань у схемі Бернуллі зручно користуватися наближеними формулами.

Для наближеного обчислення ймовірності появи події A у n незалежних випробуваннях k разів схеми Бернуллі при великих n і малих p таких, що $np < 10$, доцільно використовувати формулу Пуассона:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad \lambda = np. \quad (6.2)$$

Значення функції $P_n(k)$ з формули Пуассона наведено в додатку 3.

Локальною функцією Лапласа називають функцію

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (6.3)$$

Інтегральною функцією Лапласа називають функцію

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (6.4)$$

Значення функцій $\varphi(x)$, $\Phi(x)$ наведено відповідно в додатку 1, 2.

Зауваження. Локальна функція Лапласа (або функція Гауса) є парною функцією. А інтегральна функція Лапласа є непарною, а для значень $x > 5$ вважають $\Phi(x) \approx 1$.

Локальна теорема Муавра-Лапласа

Якщо у схемі Бернуллі кількість випробувань n достатньо велика, а ймовірність p появи події A в усіх випробуваннях однакова та відмінна від нуля й одиниці, то ймовірність появи k разів події A можна знайти наближено за формулою

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad (6.5)$$

де $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x)$ – локальна функція Лапласа.

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Якщо у схемі Бернуллі кількість випробувань n достатньо велика, а ймовірність p появи події A в усіх випробуваннях однакова та відмінна від нуля й одиниці, то ймовірність появи події A не менше k_1 і не більше k_2 разів можна знайти за наближеною формулою

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \hat{O}(x_2) - \hat{O}(x_1), \quad (6.6)$$

де $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x)$ – інтегральна функція Лапласа.

Теорема Бернуллі.

Якщо в n незалежних випробуваннях імовірність p появи події A однакова й подія A відбудеться m разів, то для будь-якого додатного числа $\varepsilon > 0$ виконується рівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0,$$

тобто подія, для якої відхилення визначається формулою

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| \geq \varepsilon,$$

при великих значеннях n , майже неможлива. Тому протилежна подія

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon$$

майже достовірна:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Якщо $m_1 = np - \varepsilon n$, $m_2 = np + \varepsilon n$, то

$$x_2 = \frac{np + \varepsilon n - np}{\sqrt{npq}} = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}, \quad x_1 = \frac{np - \varepsilon n - np}{\sqrt{npq}} = -\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}.$$

І тому

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = P(np - \varepsilon n \leq m \leq np + \varepsilon n) = 2\hat{O}\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Ці формули доцільно застосовувати за умови $np > 100$, $npq > 20$.

Приклад. Відомо, що процент браку для деякої деталі дорівнює 0,5%. Контролер перевіряє 1000 деталей. Яка ймовірність виявити рівно три браковані деталі? Яка ймовірність виявити не менше трьох бракованих деталей?

Розв'язання. Маємо 1000 випробувань Бернуллі з ймовірністю „успіху” $p=0,005$. Доцільно застосовувати формулу Пуассона.

За умовою $n=1000$, $p=0,005$, отже $\lambda = np = 5$, маємо

$$1) P_{1000}(3) = \frac{5^3}{3!} e^{-5} \approx 0,14.$$

$$2) P_{1000}(k \geq 3) = 1 - P_{1000}(k < 3) = 1 - [P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2)] \approx \\ \approx 1 - \left[e^{-5} + \frac{5}{1!} \cdot e^{-5} + \frac{5^2}{2!} \cdot e^{-5} \right] \approx 0,875.$$

$$P_{1000}(k \geq 3) = 1 - P_{1000}(k < 3) = 1 - [P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2)] \approx \\ \approx 1 - \left[e^{-5} + \frac{5}{1!} \cdot e^{-5} + \frac{5^2}{2!} \cdot e^{-5} \right] \approx 0,875.$$

Приклад. Гральний кубик підкидають 800 разів. Яка ймовірність того, що кількість очок, кратна трьом, з'явиться 267 разів?

Розв'язання. У цій задачі кількість випробувань $n=800$ досить велика. Імовірність того, що при підкиданні кубика випаде число, кратне трьом, дорівнює $p = \frac{1}{3}$ і постійна для всіх випробувань, $q=1-p=\frac{2}{3}$. Тому для обчислення ймовірності скористаємося локальною теоремою Муавра-Лапласа. Знайдемо

$$x = \frac{267 - 800 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{40}{3}} = 0,025;$$

$$P_{800}(267) = \frac{3}{40} \Phi(0,025) = \frac{3}{40} \cdot 0,3988 \approx 0,03.$$

Приклад. Страхова компанія заключила 40000 договорів. Ймовірність страхового випадку за кожним з них протягом року складає 2%. Знайти ймовірність, що таких випадків буде не більше 870.

Розв'язання. За умовою задачі $n=40000$, $p=0,02$. Знаходимо $q=1-p=0,98$ $np=800$, $\sqrt{npq}=28$.

Для обчислення $P(m \leq 870)$ скористаємось інтегральною теоремою Муавра-Лапласа:

$$P_{40000}(0 \leq k \leq 870) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{ де}$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 800}{28} = -28,57;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{870 - 800}{28} = 2,5.$$

Знаходимо за таблицею значень функції Лапласа (додаток 2):

$$P_{40000}(0 \leq k \leq 870) = \hat{O}(2,5) - \hat{O}(-28,57) = 0,4938 + 0,5 = 0,9938.$$

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ
ПІДРАХУНОК ЙМОВІРНОСТІ ЗА КЛАСИЧНИМ ОЗНАЧЕННЯМ
Задачі 1.1-1.26

1.1. На шести однакових картках написані букви К, Л, О, С, Т. Картки перемішують і розкладають у ряд навмання. Яка ймовірність того, що можна буде прочитати слово «СКЛО»?

1.2. Підкидають два гральних кубики. Знайти ймовірність того, що сума очок на гранях, які випали, не більше десяти.

1.3. У партії з 50 виробів шість мають дефекти. Довільно вибирають 6 виробів. Підрахувати ймовірність того, що серед цих шести виробів 2 мають дефекти.

1.4. У ящику 6 білих та 8 чорних куль. З ящика виймають 2 кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кулі білі.

1.5. На шести однакових картках написані букви А, В, К, Н, І, С. картки перемішують та розкладають у ряд навмання. Яка ймовірність того, що ми одержимо слово «ВІСК»?

1.6. Підкидають два гральних кубики. Знайти ймовірність того, що сума очок на гранях, які випали, більше шести.

1.7. У ящику 15 деталей, 10 з них пофарбовані. Робітник навмання виймає 3 деталі. Знайти ймовірність того, що серед вийнятих деталей буде: а) дві пофарбовані; б) принаймні одна пофарбована; в) всі три пофарбовані.

1.8. В одній урні містяться 4 білих і 8 чорних куль, а в другій – 3 білих і 9 чорних. З кожної урни вийняли по одній кулі. Обчислити ймовірність того, що обидві кулі білі.

1.9. Набираючи номер телефону, абонент забув дві останні цифри і, пам'ятаючи лише, що ці цифри різні, набрав їх навмання. Яка ймовірність того, що номер набрано правильно?

1.10. Двічі підкидають гральний кубик. Яка ймовірність того, що сума очок при обох підкиданнях виявиться більше шести?

1.11. У мішку 5 однакових кубиків. На кожній грані кубика написана одна літера О, П, Р, С, Т. Знайти ймовірність того, що на вийнятих по одному і розташованих у лінію кубиках можна буде прочитати слово «СПОРТ».

1.12. У лотереї розігрується 100 білетів. Виграш випадає на 10 білетів. Куплено три білети. Яка ймовірність того, що принаймні один з них виграє?

1.13. В групі 25 студентів, з них 8 відмінників. По списку навмання відібрали 7 студентів. Знайти ймовірність того, що серед відібраних три відмінники.

1.14. З п'яти карток з буквами А, Б, В, Г, Д навмання одна за одною вибирають три і розкладають у ряд. Яка ймовірність того, що одержать слово «ДВА»?

1.15. Підкидають три гральних кубики. Знайти ймовірність того, що сума очок на гранях, які випали, дорівнює шістнадцяти.

1.16. У цеху працюють 6 чоловіків і 4 жінки. Навмання відбирають 7 робітників. Знайти ймовірність того, що серед відібраних буде 3 жінки.

1.17. Дитина грається з чотирма літерами розрізної азбуки: А, А, М, М. яка ймовірність того, що, випадково розкладаючи літери в ряд, вона одержить слово «МАМА»?

1.18. У партії 20 виробів, з них 5 мають дефект. Навмання вибирають три вироби. Знайти ймовірність того, що серед вибраних виробів виявиться принаймні один з дефектом.

1.19. Студент знає 20 з 25 питань програми. Обчислити ймовірність того, що студент знає запропоновані йому екзаменатором три питання.

1.20. З дев'яти карток з цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 вибирають навмання три. Яка ймовірність одержати число 327?

1.21. У підрозділі 60 солдат і 5 офіцерів. Варта складається з чотирьох осіб. Яка ймовірність події: варту призначено з трьох солдат та одного офіцера?

1.22. Маємо 10 троянд і 8 тюльпанів. З п'яти навмання взятих квіток збирають букет. Знайти ймовірність події: букет зібрано з двох троянд і трьох тюльпанів.

1.23. З шести карток з буквами А, Е, И, Л, Т, Р вибирають по одній чотири. Знайти ймовірність події: одержано слово «ТИРЕ».

1.24. У ящику 6 білих та 8 чорних куль. З ящика виймають 2 кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кулі білі.

1.25. У ящику міститься 15 тенісних м'ячів, серед них 9 нових. Навмання беруть 4 м'ячі. Яка ймовірність того, що серед них виявиться три нових м'ячі.

1.26. Серед 11 лотерейних квитків 8 виграшних. Навмання взято 4 квитки. Обчислити ймовірність того, що серед них 3 виграшних.

ТЕОРЕМИ ДОДАВАННЯ ТА МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Задачі 2.1–2.26

2.1. Три стрільці зробили по одному пострілу. Імовірність влучання кожного з них дорівнює відповідно 0,3; 0,4; 0,6. Знайти ймовірність того, що буде лише одне влучання в мішень.

2.2. В одній урні міститься 4 білих і 8 чорних куль, а в другій – 3 білих і 9 чорних. З кожної урни вийняли по одній кулі. Обчислити ймовірність того, що обидві кулі виявляться білими.

2.3. Ймовірність влучання в мішень при одному пострілі першим стрільцем дорівнює 0,8, а другим – 0,9. Знайти ймовірність того, що лише один стрілець влучить у мішень.

2.4. Два стрільці зробили по одному пострілу. Ймовірність влучання в мішень першим стрільцем дорівнює 0,6, а другим 0,8. Знайти ймовірність того, що принаймні один стрілець влучить у мішень.

2.5. Два стрільці зробили по одному пострілу по мішені. Ймовірність влучання в мішень кожним із стрільців дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що обидва стрільці промахнулись.

2.6. Три баскетболісти повинні зробити по одному кидку м'яча. Ймовірність влучання м'яча в корзину для першого, другого та третього баскетболістів відповідно дорівнює 0,9; 0,8; 0,7. Знайти ймовірність того, що принаймні один баскетболіст вдало кине м'яч.

2.7. Два стрільці стріляють по мішені. Ймовірність влучення в мішень першим стрільцем становить 0,7, другим – 0,8. Знайти ймовірність того, що лише один стрілець влучить у мішень.

2.8. Із трьох гармат зробили залп по цілі. Ймовірність влучання в ціль при одному пострілі з першої гармати дорівнює 0,8, для другої і третьої гармат ці ймовірності відповідно дорівнюють 0,7 і 0,9. Знайти ймовірність того, що тільки один снаряд влучить у ціль.

2.9. Студент знає 50 з 60 питань програми. Знайти ймовірність того, що студент знає два питання із трьох, що містяться в його екзаменаційному білеті.

2.10. У двох урнах містяться білі і чорні кулі: у першій урні 5 білих і 7 чорних, у другій урні 3 білих і 10 чорних. Із кожної урни одночасно виймають по одній кулі. Знайти ймовірність того, що хоча б одна з вийнятих куль буде чорною.

2.11. Із трьох гармат зробили залп по цілі. Ймовірність влучання в ціль при одному пострілі з першої гармати дорівнює 0,8, для другої і третьої гармат ці ймовірності відповідно дорівнюють 0,7 і 0,4. Знайти ймовірність того, що тільки два снаряди влучить в ціль.

2.12. Студент знає 30 питань з 50. Знайти ймовірність того, що він відповість хоча б на одне питання з чотирьох.

2.13. Ймовірність того, що студент складе перший іспит становить 0,4, другий – 0,9, третій – 0,7. Знайти ймовірність того, що принаймні два іспити буде здано.

2.14. Два мисливці стріляють у вовка, причому кожен робить один постріл. Для першого мисливця ймовірність влучання в ціль становить 0,7, для другого 0,6. Яка ймовірність влучання у вовка принаймні одного мисливця.

2.15. Експедиція видавництва відправила газети в три поштових відділення. Ймовірність своєчасної доставки до 1-го відділення дорівнює 0,95,

до 2-го відділення – 0,9, до 3-го відділення – 0,8. Знайти ймовірність того, що тільки одне відділення отримає газети своєчасно.

2.16. У колоді 36 карт. Навмання виймають одну. Яка ймовірність того, що буде вийнята бубнова або дама?

2.17. Маємо два однакові ящики з кулями. У першому ящику міститься 2 білі і одна чорна куля, у другому – 1 біла та 4 чорних. Довільно обирають один ящик і виймають кулю. Знайти ймовірність того, що вийнята куля виявиться білою.

2.18. Два стрільці стріляють по мішені. Ймовірність влучення в мішень першим стрільцем становить 0,6, другим – 0,8. Знайти ймовірність того, що хоча б один стрілець влучить у мішень.

2.19. Два стрільці зробили по одному пострілу по мішені. Ймовірність влучання в мішень кожним із стрільців дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що тільки один стрілець влучить у мішень.

2.20. Із трьох гармат зробили залп по цілі. Ймовірність влучання в ціль при одному пострілі з першої гармати дорівнює 0,8, для другої і третьої гармат ці ймовірності відповідно дорівнюють 0,7 і 0,4. Знайти ймовірність того, що хоча б один снаряд влучить у ціль.

2.21. У першій урні містяться 3 білих і 1 чорна куля, у другій 6 білих і 4 чорних, у третій – 8 білих та одна чорна. З навмання вибраної урни виймають кулю. Яка ймовірність того, що вийнята біла куля.

2.22. Зроблено три постріли. Ймовірність влучання при першому дорівнює 0,3, при другому – 0,5, при третьому – 0,7. Знайти ймовірність принаймні одного промаху.

2.23. Мисливці Олександр, Віктор і Павло влучають у летячу качку з ймовірностями відповідно $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$. Усі одночасно роблять постріл. Яка ймовірність того, що качку буде вбито?

2.24. Два стрільці стріляють по мішені. Ймовірність влучення в мішень першим стрільцем становить 0,4, другим – 0,6. Знайти ймовірність того, що обоє промахнуться.

2.25. Три стрільці зробили по одному пострілу. Ймовірність влучання кожного з них дорівнює відповідно 0,5; 0,2; 0,7. Знайти ймовірність того, що буде лише два влучання в мішень.

2.26. Два стрільці стріляють по мішені. Ймовірність влучення в мішень першим стрільцем становить 0,75, другим – 0,85. Знайти ймовірність того, що хоча б один стрілець влучить у мішень.

ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ І ФОРМУЛА БАЙЄСА

Задачі 3.1–3.26

3.1. Три мисливці одночасно вистрілили у ведмедя, який був убитий однією кулею. Імовірність влучання для кожного мисливця дорівнює відповідно 0,2; 0,4; 0,6. Знайти ймовірність того, що ведмідь був убитий першим мисливцем.

3.2. У першій урні містяться 4 білих і 3 чорних кулі, а в другій 4 білих і 4 чорних. З першої урни виймають 2 кулі і перекладають їх у другу. Знайти ймовірність виймання білої кулі з другої урни.

3.3. У кожному з трьох однакових ящиків міститься однакова кількість виробів. У першому ящику 40% виробів першого сорту, в другому ящику – 30%, у третьому – 20%. Яка ймовірність того, що випадково вибраний виріб першого сорту?

3.4. Студент вивчив 20 білетів з 30. Що для нього краще, йти відповідати першим, другим чи третім?

3.5. Два автомати випускають однакові вироби. Продуктивність першого автомата вдвоє більша продуктивності другого. Перший автомат дає 60% першосортних виробів, другий – 84%. Яка ймовірність того, що навмання вибраний виріб виявиться першосортним?

3.6. У продаж надходять телевізори трьох заводів. Продукція першого заводу має 20% телевізорів з прихованим дефектом, другого – 10%, третього – 5%. Яка ймовірність придбати телевізор без дефекту, якщо магазин одержав 30% телевізорів з першого заводу, 20% – з другого, 60% – з третього?

3.7. Студент вивчив 20 білетів з 30. Що для нього краще, йти відповідати першим чи другим?

3.8. У партії 500 ламп: 250 виготовлені на 1-му заводі, 150 – на 2-му, 100 – на 3-му. Імовірність того, що навмання взята лампа виявиться стандартною для першого заводу дорівнює 0,97, для 2-го – 0,92, для 3-го – 0,93. Яка ймовірність того, що навмання взята лампа виявиться стандартною?

3.9. Із першого верстата до збирання надходить 40%, з другого 30%, з третього – 20% усіх деталей. Ймовірність виготовлення бракованої деталі кожним верстатом відповідно дорівнює 0,01; 0,03; 0,05. Знайти ймовірність того, що буде бракованою деталь, яка надійшла до збирання.

3.10. У трьох урнах міститься по 30 куль. Причому в першій – 15 пофарбованих, у другій – 12, у третій – 9. З довільної урни виймають одну кулю. Знайти ймовірність того, що куля пофарбована.

3.11. Магазин має в продажі однотипні вироби трьох фірм у рівній кількості. У виробів, які виготовлені першою фірмою, ймовірність виявлення дефекту дорівнює 0,1, другою – 0,05, третьою – 0,02. Навмання взятий виріб виявився дефектним. Яка ймовірність, що він виготовлений на першій фірмі?

3.12. У цеху 20 верстатів. З них 10 марки *A*, 6 марки *B*, 4 марки *C*. Ймовірність того, що якість деталі виявиться найвищою, для цих верстатів відповідно становить 0,9; 0,8; 0,7. Який відсоток деталей вищої якості випускає цей цех?

3.13. За статистичними даними доля дефектних виробів у цеху складає 1%. Всі вироби проходять контроль, при цьому з ймовірністю 0,95 виявляється дефект, якщо він є, та з ймовірністю 0,03 годний виріб признається дефектним. Який процент дефектних виробів, який видає контролер?

3.14. Для участі в змаганнях виділено з 1-го курсу 4 студенти, з 2-го – 5 студентів, з 3-го – 6 студентів. Ймовірність того, що студент 1-го, 2-го і 3-го курсу потрапить у збірну, дорівнює 0,9; 0,7; 0,8. Навмання обраний студент потрапив у збірну. Знайти ймовірність, що обраний студент з 1-го курсу.

3.15. Батарея з трьох знарядь зробила постріл, причому два снаряди потрапили в ціль. Знайти ймовірність того, що вцілило перше знаряддя, якщо ймовірність попадання в ціль першим, другим і третім знаряддям дорівнюють відповідно 0,4; 0,3; 0,6.

3.16. В урні містяться 6 білих та 9 чорних куль. З урни виймають кулю, фіксують її колір і повертають знову в урну. Яка ймовірність того, що з трьох вийнятих таким чином куль дві виявляться білими.

3.17. На фабриці виготовляють болти. Перша машина виготовляє 25%, друга – 35%, третя – 40% усіх виробів. У їх продукції вироби, що мають дефекти, становлять відповідно 5%, 4%, 2%. Яка ймовірність того, що випадково вибраний болт з дефектом?

3.18. Із першого верстата до збирання надходить 40%, з другого 30%, з третього – 20% усіх деталей. Ймовірність виготовлення бракованої деталі кожним верстатом відповідно дорівнює 0,01; 0,03; 0,05. Знайти ймовірність того, що бракованою є деталь, яка надійшла до збирання, з другого верстата.

3.19. Студент знає 20 білетів з 25. Що для нього краще, йти відповідати першим чи другим?

3.20. Із першого верстата до збирання надходить 40%, з другого 30%, з третього – 20% усіх деталей. Ймовірність виготовлення бракованої деталі кожним верстатом відповідно дорівнює 0,01; 0,03; 0,05. Знайти ймовірність того, що буде бракованою деталь, яка надійшла до збирання.

3.21. Два автомати випускають однакові вироби. Продуктивність першого автомата вдвоє більша продуктивності другого. Перший автомат дає 60% першосортних виробів, другий – 74%. Яка ймовірність того, що навмання вибраний виріб виявиться першосортним?

3.22. На фабриці виготовляють болти. Перша машина виготовляє 25%, друга – 35%, третя – 40% усіх виробів. У їх продукції вироби, що мають дефекти, становлять відповідно 5%, 4%, 2%. Яка ймовірність того, що випадково вибраний болт з дефектом виготовлений на першій фабриці?

3.23. У першій урні міститься 3 білих та 1 чорна куля, у другій – 6 білих і 4 чорних куль, у третій – 9 білих та 1 чорна. З навання вибраної урни виймають кулю. Як ймовірність того, що вийнята куля біла?

3.24. У партії 600 ламп: 250 виготовлені на 1-му заводі, 150 – на 2-му, 200 – на 3-му. Імовірність того, що навання взята лампа виявиться стандартною для першого заводу дорівнює 0,97, для 2-го – 0,92, для 3-го – 0,93. Яка ймовірність того, що навання взята лампа виявиться стандартною?

3.25. Для участі в змаганнях виділено з 1-го курсу 4 студенти, з 2-го – 5 студентів, з 3-го – 6 студентів. Ймовірність того, що студент 1-го, 2-го і 3-го курсів потрапить у збірну, дорівнює 0,9; 0,7; 0,8. Навання обраний студент потрапив у збірну. Знайти ймовірність, що обраний студент з 3-го курсу.

3.26. На фабриці виготовляють болти. Перша машина виготовляє 25%, друга – 35%, третя – 40% усіх виробів. У їх продукції вироби, що мають дефекти, становлять відповідно 5%, 4%, 3%. Яка ймовірність того, що випадково вибраний болт з дефектом?

ПОВТОРЕННЯ ВИПРОБУВАНЬ

Задачі 4.1–4.26

4.1. Ймовірність попадання в муху на льоту з рогатки при одному пострілі дорівнює 0,006. Зроблено 1000 пострілів. Знайти ймовірність того, що буде вбито не менше 3 мух.

4.2. Ймовірність того, що подія з'явиться в кожному з незалежних випробувань, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що в 100 випробуваннях подія з'явиться не менше 80 раз.

4.3. Тричі підкидають гральний кубик. Яка ймовірність того, що при цьому не менше ніж двічі випаде 6 очок?

4.4. 30% виробів підприємства – продукція вищого сорту. Куплено 6 виробів. Чому дорівнює ймовірність того, що 4 вироби з них вищого сорту?

4.5. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 новонароджених не більше 45 і не менше 55 хлопчиків.

4.6. Ймовірність того, що подія з'явиться А в кожному з однакових і незалежних випробувань, дорівнює 0,85. Знайти ймовірність того, що в 325 випробуваннях подія з'явиться не менше 70 і не більше 90 разів.

4.7. У партії 5% виробів мають дефекти. Яка ймовірність того, що серед узятих на випробування п'яти виробів 2 матимуть дефекти?

4.8. При кожному пострілі з гармати ймовірність влучання в ціль становить 0,8. Знайти ймовірність того, що при чотирьох пострілах буде 3 промахи.

4.9. Ймовірність влучання в мішень при одному пострілі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що при чотирьох послідовних пострілах буде не більше двох промахів.

4.10. Проводиться випробування, в якому випадкова подія A може з'явитись з ймовірністю 0,6. Випробування повторюють у незмінних умовах 600 разів. Знайти ймовірність того, що в 600 випробуваннях подія A з'явиться від 280 до 310 разів.

4.11. Ймовірність того, що подія з'явиться в кожному з незалежних випробувань, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що подія наступить 120 разів у 144 випробуваннях.

4.12. У партії з 1000 деталей є 10 дефектних. Знайти ймовірність того, що серед навмання узятих з цієї партії 50 деталей рівно 5 будуть дефективними.

4.13. Ймовірність того, що подія з'явиться в кожному з однакових і незалежних випробувань, дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що в 1400 випробуваннях подія наступить 28 разів.

4.14. Ймовірність того, що подія з'явиться в кожному з однакових і незалежних випробувань, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що в 225 випробуваннях подія з'явиться не менше 75 і не більше 90 разів.

4.15. Прилад складається з трьох елементів, які працюють незалежно. Ймовірність виходу з ладу елемента в одному досліді становить 0,1. Яка ймовірність того, що вийде з ладу не більше двох елементів?

4.16. Проводиться випробування, в якому випадкова подія A може з'явитись з ймовірністю 0,4. Випробування повторюють у незмінних умовах 850 разів. Яка ймовірність того, що подія A з'явиться в меншості цих випробувань?

4.17. Проводиться випробування, в якому випадкова подія A може з'явитись з ймовірністю 0,3. Випробування повторюють у незмінних умовах 100 разів. Знайти ймовірність того, що в 100 випробуваннях подія A з'явиться від 20 до 40 разів.

4.18. Проводиться випробування, в якому випадкова подія A може з'явитись з ймовірністю 0,4. Випробування повторюють у незмінних умовах 800 разів. Знайти ймовірність того, що в 800 випробуваннях подія A з'явиться від 180 до 210 разів.

4.19. Ймовірність того, що подія з'явиться в кожному з незалежних випробувань, дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що в 100 випробуваннях подія з'явиться не менше 90 раз.

4.20. Тричі підкидають гральний кубик. Яка ймовірність того, що при цьому не менше ніж двічі випаде 6 очок?

4.21. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 новонароджених 50 хлопчиків.

4.22. Ймовірність того, що подія з'явиться в кожному з незалежних випробувань, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що подія наступить 20 разів у 100 випробуваннях

4.23. Ймовірність попадання в муху на льоту з рогатки при одному пострілі дорівнює 0,006. Зроблено 1000 пострілів. Знайти ймовірність того, що буде вбито 3 мухи.

4.24. Монету підкидають двічі. Яка ймовірність того, що принаймні один раз випаде герб?

4.25. Ймовірність виграшу в лотерею на один квиток дорівнює 0,2. Куплено 20 квитків. Знайти найбільш ймовірну кількість виграшних квитків та відповідну ймовірність.

4.2. У партії з 1000 деталей є 10 дефектних. Знайти ймовірність того, що серед навмання узятих з цієї партії 50 деталей рівно 5 будуть дефективними.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория вероятностей. — М.: Наука, 1973.
2. *Волощенко А. Б., Гетманцев В. Д., Кузубов В. И.* Методические указания к решению задач с экономическим содержанием по разделу «Случайные события». — К.: КИНХ, 1979
3. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высш. шк., 1977.
4. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Высш. шк., 1975. — 332 с.
5. *Жлуктенко В. І., Наконечний С. І.* Теорія ймовірностей. — К: КНЕУ, 1999. — Ч. 1.
6. *Крамер М. III.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 2001.

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Додаток 1

Цілі і десяті частини	Соті частини x									
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009

Продовження додатка 1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Додаток 2

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ ЛАПЛАСА $\Phi(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1	2	3	4	5	6	7	8
0,00	0,0000	0,26	0,1026	0,52	0,1985	0,78	0,2823
0,01	0,0040	0,27	0,1064	0,53	0,2019	0,79	0,2852
0,02	0,0080	0,28	0,1103	0,54	0,2054	0,80	0,2881
0,03	0,0120	0,29	0,1141	0,55	0,2088	0,81	0,2910
0,04	0,0160	0,30	0,1179	0,56	0,2123	0,82	0,2939
0,05	0,0199	0,31	0,1217	0,57	0,2157	0,83	0,2967
0,06	0,0239	0,32	0,1255	0,58	0,2190	0,84	0,2995
0,07	0,0279	0,33	0,1293	0,59	0,2224	0,85	0,3023
0,08	0,0319	0,34	0,1331	0,60	0,2257	0,86	0,3051
0,09	0,0359	0,35	0,1368	0,61	0,2291	0,87	0,3078
0,10	0,0398	0,36	0,1406	0,62	0,2324	0,88	0,3106
0,11	0,0438	0,37	0,1443	0,63	0,2357	0,89	0,3133
0,12	0,0478	0,38	0,1480	0,64	0,2389	0,90	0,3159
0,13	0,0517	0,39	0,1617	0,65	0,2422	0,91	0,3186
0,14	0,8557	0,40	0,1564	0,66	0,2454	0,92	0,3212
0,15	0,0596	0,41	0,1691	0,67	0,2486	0,93	0,3238
0,16	0,0636	0,42	0,1628	0,68	0,2517	0,94	0,3264
0,17	0,0675	0,43	0,1664	0,69	0,2549	0,95	0,3289
0,18	0,0714	0,44	0,1700	0,70	0,2580	0,96	0,3315
0,19	0,0753	0,45	0,1736	0,71	0,2611	0,97	0,3340
0,20	0,0793	0,46	0,1772	0,72	0,2642	0,98	0,3365
0,21	0,0832	0,47	0,1808	0,73	0,2673	0,99	0,3389
0,22	0,0871	0,48	0,1844	0,74	0,2703	1,00	0,3413
0,23	0,0910	0,49	0,1879	0,75	0,2734	1,01	0,3438
0,24	0,0948	0,50	0,1915	0,76	0,2764	1,02	0,3461
0,25	0,0987	0,51	0,1950	0,77	0,2794	1,03	0,3485
1,04	0,3508	1,33	0,4082	1,62	0,4474	1,91	0,4719
1,05	0,3531	1,34	0,4099	1,63	0,4484	1,92	0,4726
1,06	0,3554	1,35	0,4115	1,64	0,4495	1,93	0,4732
1,07	0,3577	1,36	0,4131	1,65	0,4505	1,94	0,4738
1,08	0,3599	1,37	0,4147	1,66	0,4515	1,95	0,4744
1,09	0,3621	1,38	0,4162	1,67	0,4525	1,96	0,4750

1	2	3	4	5	6	7	8
1,10	0,3643	1,39	0,4177	1,68	0,4535	1,97	0,4756
1,11	0,3665	1,40	0,4192	1,69	0,4545	1,98	0,4761
1,12	0,3686	1,41	0,4207	1,70	0,4554	1,99	0,4767
1,13	0,3708	1,42	0,4222	1,71	0,4564	2,00	0,4772
1,14	0,3729	1,43	0,4236	1,72	0,4573	2,02	0,4783
1,15	0,3749	1,44	0,4251	1,73	0,4582	2,04	0,4793
1,16	0,3770	1,45	0,4265	1,74	0,4591	2,06	0,4803
1,17	0,3790	1,46	0,4279	1,75	0,4599	2,08	0,4812
1,18	0,3810	1,47	0,4292	1,76	0,4608	2,10	0,4821
1,19	0,3830	1,48	0,4306	1,77	0,4616	2,12	0,4830
1,20	0,3849	1,49	0,4319	1,78	0,4625	2,14	0,4838
1,21	0,3869	1,50	0,4332	1,79	0,4633	2,16	0,4846
1,22	0,3883	1,51	0,4345	1,80	0,4641	2,18	0,4854
1,23	0,3907	1,52	0,4357	1,81	0,4649	2,20	0,4861
1,24	0,3925	1,53	0,4370	1,82	0,4656	2,22	0,4868
1,25	0,3944	1,54	0,4382	1,83	0,4664	2,24	0,4875
1,26	0,3962	1,55	0,4394	1,84	0,4671	2,26	0,4881
1,27	0,3980	1,56	0,4406	1,85	0,4678	2,28	0,4887
1,28	0,3997	1,57	0,4418	1,86	0,4686	2,30	0,4893
1,29	0,4015	1,58	0,4429	1,87	0,4693	2,32	0,4898
1,30	0,4032	1,59	0,4441	1,88	0,4699	2,34	0,4904
1,31	0,4049	1,60	0,4452	1,89	0,4706	2,36	0,4909
1,32	0,4066	1,61	0,4463	1,90	0,4713	2,38	0,4913
2,40	0,4918	2,60	0,4953	2,80	0,4974	3,20	0,49931
2,42	0,4922	2,62	0,4956	2,82	0,4976	3,40	0,49966
2,44	0,4927	2,64	0,4959	2,84	0,4977	3,60	0,49984
2,46	0,4931	2,66	0,4961	2,86	0,4979	3,80	0,499928
2,48	0,4934	2,68	0,4963	2,90	0,4981	4,00	0,499968
2,50	0,4938	2,70	0,4965	2,92	0,4982	5,00	0,499997
2,52	0,4941	2,72	0,4967	2,94	0,4984		
2,54	0,4945	2,74	0,4969	2,96	0,49846		
2,56	0,4948	2,76	0,4971	2,98	0,49856		
2,58	0,4951	2,78	0,4973	3,00	0,49865	$x > 5$	0,5