

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ХІМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ
З ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА МАТЕМАТИКА»
ЗА ТЕМОЮ «КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ТА ДІЇ НАД НИМИ»
ДЛЯ СТУДЕНТІВ ОСВІТНЬО-КВАЛІФІКАЦІЙНОГО РІВНЯ БАКАЛАВР
НАПРЯМІВ ПІДГОТОВКИ
6.050202 – АВТОМАТИЗАЦІЯ ТА КОМП'ЮТЕРНО-ІНТЕГРОВАНІ
ТЕХНОЛОГІЇ
6.051001 – МЕТРОЛОГІЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНІ
ТЕХНОЛОГІЇ
6.050601 – ТЕПЛОЕНЕРГЕТИКА

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики
Протокол № 9 від 05.06.2015

Методичні вказівки до самостійної роботи з дисципліни «Вища математика» за темою «Комплексні числа та дії над ними» для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр напрямів підготовки 6. 050202 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології; 6.051001 – Метрологія та інформаційно-вимірювальні технології; 6.050601 – Теплоенергетика денної форми навчання / укл.: Гранкіна Т.О., Дубовик Д.О., Олевський В.І., Поліщук А.В. – Д.: ДВНЗ УДХТУ, 2016. – 20 с.

Укладачі: Т.О. Гранкіна
Д.О. Дубовик
В.І. Олевський, д-р техн. наук
А.В. Поліщук, канд. техн. наук

Відповідальний за випуск В.І. Олевський, д-р техн. наук

Навчальне видання

Методичні вказівки до самостійної роботи з дисципліни «Вища математика» за темою «Комплексні числа та дії над ними» для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр напрямів підготовки 6. 050202 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології; 6.051001 – Метрологія та інформаційно-вимірювальні технології; 6.050601 – Теплоенергетика денної форми навчання

Укладачі: ГРАНКІНА Тетяна Олександрівна
ДУБОВИК Дмитро Олександрович
ОЛЕВСЬКИЙ Віктор Ісаакович
ПОЛІЩУК Алла Вікторівна

Технічний редактор В.П. Синицька
Коректор В.П. Синицька

Підписано до друку 25.03.16. Формат 60×84¹/₁₆. Папір ксерокс. Друк різнограф.
Умов. друк. арк. 0,91. Обл.-вид. арк. 0,95. Тираж 100 прим. Зам. № 156.
Свідоцтво ДК № 5026 від 16.12.2015

ДВНЗ УДХТУ, 49005, м. Дніпропетровськ, 5, просп. Гагаріна, 8

Редакційно-видавничий комплекс

1 ПОНЯТТЯ ПРО УЯВНУ ОДИНИЦЮ

За відомою формулою знайдемо корені квадратного рівняння

$$x^2 - 2x + 2 = 0; \quad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-1}.$$

Під коренем стоїть від'ємне число, а добути корінь з від'ємного числа неможливо, якщо оперувати відомими натуральними, раціональними чи ірраціональними, додатними чи від'ємними числами. Жодне з них, будучи піднесене до квадрату, не дасть в результаті від'ємне число. Тому до сих пір вважалось, що кореня з від'ємного числа не існує.

Спробуємо, проте, ввести деяке число, що не відноситься до перелічених, таке, щоб при піднесенні до квадрату воно давало від'ємний результат:

$$i^2 = -1 \Leftrightarrow i = \sqrt{-1}. \quad (1.1)$$

Означення:

Число i , введене (1.1) називається "уявною одиницею". Всі відомі до сих пір числа в подальшому будемо називати дійсними.

З'ясуємо, чому дорівнюють різні степені цього числа:

$$\begin{array}{llll} i^1 = \sqrt{-1} = i & i^2 = -1 & i^3 = i^2 i = -i & i^4 = i^3 i = 1 \\ i^5 = i^4 i = i & i^6 = i^4 i^2 = -1 & i^7 = i^4 i^3 = -i & i^8 = i^4 i^4 = 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ i^{4n+1} = i^{4n} i = i & i^{4n+2} = i^{4n} i^2 = -1 & i^{4n+3} = i^{4n} i^3 = -i & i^{4n+4} = i^{4n} i^4 = 1 \end{array}$$

Очевидно, що виявлена закономірність дозволяє будь-який степінь числа i представляти як ± 1 або $\pm i$. Так як $i^4 = 1$, потрібно лише виділити та відкинути в показнику степеня доданок, кратний 4 (тобто розділити степінь на 4 і взяти остачу від ділення).

Приклади:

$$\begin{aligned} i^{55} &= i^{4 \cdot 13 + 3} = (i^4)^{13} i^3 = i^3 = -i; \\ i^{154} &= i^{4 \cdot 38 + 2} = (i^4)^{38} i^2 = i^2 = -1. \end{aligned}$$

Зауважимо, що згідно з ознаками ділення, ділити на 4 потрібно не весь степінь, а тільки дві останні цифри:

$$i^{25641872} = i^{256418 \cdot 100 + 72} = i^{256418 \cdot 25 \cdot 4} i^{72} = i^{72}.$$

Отже, можна сформулювати ще один варіант загальної формули

$$i^{2n} = (-1)^n \quad i^{2n+1} = (-1)^n i. \quad (1.2)$$

Використовуючи уявну одиницю, можна *добувати квадратний корінь з будь-якого від'ємного числа*:

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = 3i; \quad \sqrt{-7} = \sqrt{7 \cdot (-1)} = \sqrt{7}i.$$

Отримуємо, так звані, **уявні числа**.

2 КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Тепер, коли для квадратного кореня з від'ємного числа введено новий тип чисел, корені розглянутого на початку квадратного рівняння можна записати наступним чином: $x_{1,2} = 1 \pm i$.

Результат складено з двох складових: перше – звичайне дійсне число, друге включає в себе уявну одиницю. Такі числа будемо називати **комплексними**.

Означення:

Комплексним числом називається число виду

$$z = x + iy, \quad (2.1)$$

де x, y – дійсні числа; i – уявна одиниця. Число x називається дійсною частиною комплексного числа, число y – уявною і позначається:

$$x = \operatorname{Re} z; \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Приклади: У заданих комплексних числах виділити дійсну та уявну частини:

$$z = 5 + 3i \Rightarrow x = \operatorname{Re} z = 5, y = \operatorname{Im} z = 3;$$

$$z = 2 - 5i \Rightarrow x = \operatorname{Re} z = 2, y = \operatorname{Im} z = -5;$$

$$z = 25i \Rightarrow x = \operatorname{Re} z = 0, y = \operatorname{Im} z = 25.$$

Зауваження:

1. Завдання конкретного комплексного числа еквівалентно завданню пари чисел (x, y) .

2. Відомі дотепер дійсні числа можна розглядати як комплексні, у яких уявна частина, що дорівнює нулю, відсутня. Таким чином, поняття комплексного числа розширює поняття числа в математиці, множина комплексних чисел включає в себе, як частинний випадок, і всі дійсні числа. В цьому остаточно переконаємось при розгляданні алгебраїчних операцій над комплексними числами.

3. В подальшому зустрінуться інші способи представлення комплексних чисел. Тому форму запису (2.1) будемо називати **алгебраїчною формою запису комплексного числа**.

3 ДІЇ НАД КОМПЛЕКСНИМИ ЧИСЛАМИ

Визначимо, як виконуються операції додавання, віднімання, добутку та ділення для комплексних чисел, заданих в алгебраїчній формі.

1. Два комплексних числа z_1 і z_2 будемо вважати *рівними* тоді і тільки тоді, коли рівні дійсні частини обох чисел і рівні їх уявні частини:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2. \quad (3.1)$$

2. Додавання.

При додаванні комплексних чисел окремо додаються їх дійсні та уявні частини:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_2) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \quad (3.2)$$

Приклад: $(5-2i)+(7+i)=(5+7)+i(-2+1)=12-i$.

3. Віднімання.

Вводиться як операція, обернена додаванню, тобто $z = z_1 - z_2$, якщо $z + z_2 = z_1$. Також, як і при додаванні, окремо віднімаються дійсні частини числа, окремо уявні:

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_2) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \quad (3.3)$$

Приклад: $(-1+4i)-(2-3i)=-3+7i$, $(25i)-(-1+i)=1+24i$.

4. Множення.

Множаться комплексні числа як і алгебраїчні почленно, а потім приводяться подібні з урахуванням того, що $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ та ін.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_2) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 = \\ &= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Приклад: $(1-2i)(5+i)=5+i-10i-2i^2=7-9i$.

5. Піднесення до цілого степеня.

Комплексні числа множаться як многочлени, тому, піднесення до квадрату та куба потрібно виконувати по формулам квадрата суми і куба суми:

$$\begin{aligned} (x + iy)^2 &= x^2 + 2xiy + (iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy); \\ (x + iy)^3 &= x^3 + 3x^2iy + 3x(iy)^2 + (iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Приклад: $(3-4i)^2=3^2-2 \cdot 3 \cdot 4i+(4i)^2=(9-16)+i(-24)=-7-24i$.

Піднесення до більш високого степеня можна виконати за формулою бінома Ньютона:

$$(x + iy)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (iy)^{n-k}. \quad (3.5,a)$$

Приклад: $(2-i)^4 = 1 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^3(-i) + 6 \cdot 2^2(-i)^2 + 4 \cdot 2(-i)^3 + 1(-i)^4 = -7 - 24i$.

6. Ділення.

Щоб зрозуміти, як діляться комплексні числа в алгебраїчній формі, спочатку потрібно ввести поняття спряжених комплексних чисел.

Означення:

Два комплексних числа називаються спряженими, якщо вони відрізняються тільки знаком уявної частини (число, спряжене z , позначається $\bar{z}$):

$$z = x + iy \Leftrightarrow \bar{z} = x - iy. \quad (3.6)$$

Приклади:

$$z = 5 - i \Leftrightarrow \bar{z} = 5 + i \quad z = -3 + i \Leftrightarrow \bar{z} = -3 - i$$

$$z = -i \Leftrightarrow \bar{z} = i \quad z = 5 \Leftrightarrow \bar{z} = 5$$

Зараз найбільш важливо те, що добуток двох спряжених комплексних чисел дає в результаті дійсне число

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2. \quad (3.7)$$

Користуючись цим, операцію ділення двох комплексних чисел будемо виконувати, помноживши чисельник і знаменник на число, що спряжене до знаменника:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z_2}}{z_2 \cdot \bar{z_2}} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (3.8)$$

Приклад: $\frac{2+5i}{1-7i} = \frac{(2+5i)(1+7i)}{(1-7i)(1+7i)} = \frac{2+14i+5i+35i^2}{1^2-(7i)^2} = \frac{-33+19i}{50} = -0,66 + 0,38i$.

Зауваження

Запам'ятовувати загальні формули (3.2)–(3.8) для виконання операцій над числами нема необхідності. Запам'ятовувати слід загальне правило, за яким виконується та чи інша операція.

4 ГЕОМЕТРИЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. МОДУЛЬ ТА АРГУМЕНТ

Комплексне число z задається двома дійсними числами x та y . Їх можна представити як координати точок на площині.

Координатна площина називається в цьому випадку комплексною площиною; вісь x – дійсною, вісь y – уявною.

Відомо, що положення точки на площині може бути також задано радіус-вектором цієї точки (рис. 4.1).

Можна також використовувати полярні координати – довжину r полярного радіуса і полярний кут φ .

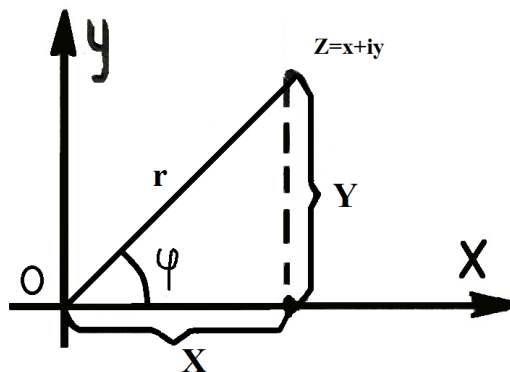


Рис. 4.1

Для комплексного числа z параметр r називається модулем, а φ – аргументом.

Означення:

Модулем ($|z|$) комплексного числа z називається довжина r радіус-вектора точки z , тобто відстань від точки до початку координат:

$$|z| = r.$$

Аргументом ($\text{Arg} z$) числа z називається кут φ , що відраховується від додатного напрямку осі OX до радіус-вектора точки z . Кут вважається додатним, якщо від відраховується проти годинникової стрілки:

$$\text{Arg} z = \varphi.$$

Аргумент комплексного числа багатозначний, так як одній і тій самій точці z можуть відповідати різні значення аргументу, що відрізняються один від одного на 2π ($k=\pm 1; \pm 2; \dots$) (рис 4.2).

У зв'язку з цим, виділяють головне значення аргументу ($\arg z$) – значення, що належить проміжку

$$-\pi < \arg z \leq \pi.$$

Фактично, головне значення аргументу – це кут, що відраховується по найкоротшому шляху від додатного напрямку осі OX до радіус-вектора точки z .

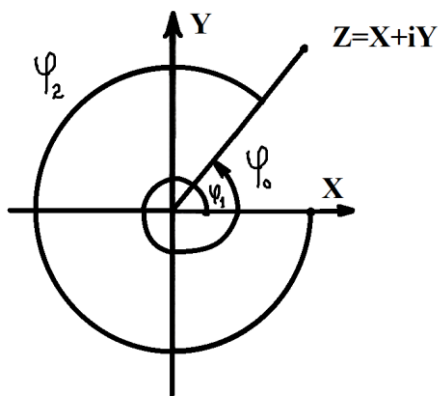


Рис. 4.2

В подальшому буквою φ будемо позначати тільки головне значення аргументу

$$((\varphi = \arg z)).$$

Очевидно, що $\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi$.

Два комплексних числа рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх модулі і головне значення аргументів (аргументи можуть відрізнятися на $2k\pi$).

Запишемо формули, за якими можна знаходити модуль і аргумент комплексного числа.

Для модуля формула очевидна (див. рис. 1, теорема Піфагора):

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (4.1)$$

Дещо складніше зі знаходженням аргументу. Можна знайти не сам кут, а його тригонометричну функцію:

$$\text{tg } \varphi = \frac{y}{x}.$$

Щоб знайти φ , можна скористатись оберненою функцією:

$$\varphi = \text{arctg } \frac{y}{x}.$$

Тут однак, потрібно врахувати те, що двом різним кутам (φ) та ($\varphi \pm \pi$) відповідає одне й те ж саме значення $\text{tg } \varphi$. Головні ж значення функції $\text{arctg } x$ лежать у проміжку $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Тому, якщо точка, що зображає число z , лежить в II-й чи III-й чверті комплексної площини, то для знаходження φ до значення $\text{arctg } \frac{y}{x}$, що отримуємо, використовуючи таблиці або калькулятор, потрібно додати чи відняти число π (рис. 4.3).

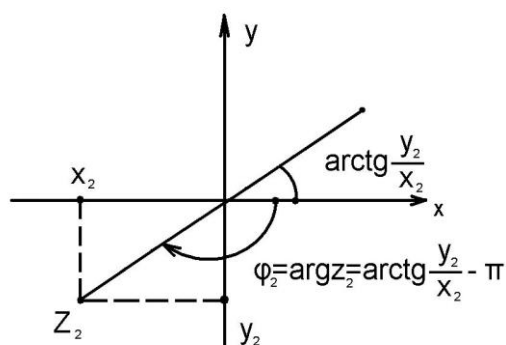
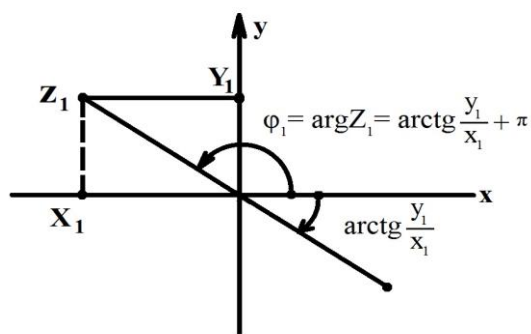


Рис. 4.3

Таким чином, для головного значення аргументу отримуємо співвідношення:

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & x \geq 0 \quad (I, IV \text{ четверти}) \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi & x < 0, y \geq 0 \quad (II \text{ четверть}) \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi & x < 0, y < 0 \quad (III \text{ четверть}) \end{cases} \quad (4.2)$$

Відмітимо, що для точки $z=0$ аргумент не визначений.

Приклади: Знайти модулі і головні значення аргументів комплексних чисел

$$z_1 = 1 + i \quad z_2 = 3i \quad z_3 = 4 \quad z_4 = -2 \quad z_5 = -1 - 3i.$$

Зобразимо точки на комплексній площині та врахуємо геометричний зміст модуля і аргументу комплексного числа, яке зразу отримуємо з рис. 4.4:

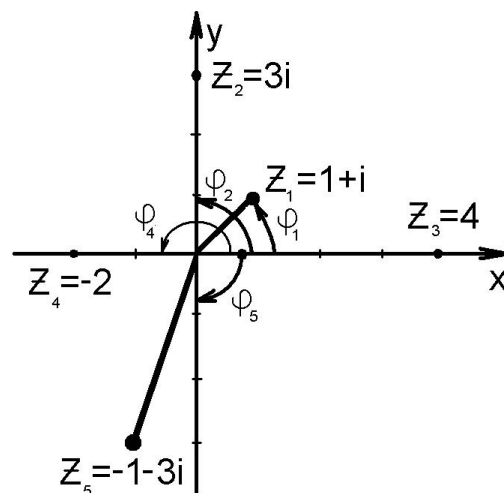


Рис. 4.4

Для точки z_3 одним тільки радіусом не обійтись і потрібно використовувати формулу (4.2):

$$\begin{aligned} r_1 = |z_1| &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} & \varphi_1 = \arg z_1 &= \frac{\pi}{4} \\ r_2 &= 3 & \varphi_2 &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\varphi_5 = \arg z_5 = \operatorname{arctg}\left(\frac{-3}{-1}\right) - \pi = \operatorname{arctg} 3 - \pi \approx 1.25 - 3.14 = -1.89$$

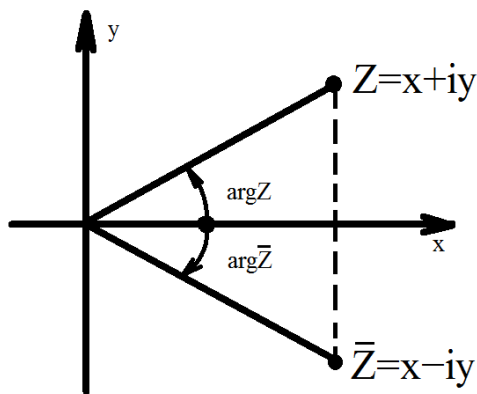
$$r_5 = |z_5| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

Перед тим як визначати модуль і аргумент числа z , треба зобразити точку на площині!

Зауваження. 1. Якщо для комплексного числа відомі модуль r і аргумент φ , легко знайти його дійсну і уявну частину:

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi. \quad (4.3)$$

2. Якщо разом з комплексним числом z існує число $\bar{z}$, то геометрично очевидно (рис. 4.5), що ці два числа симетричні відносно дійсної осі і мають один і той же модуль, відрізняється знаком аргументу:



$$|z| = |\bar{z}|;$$

$$\arg z = -\arg \bar{z}.$$

Рис. 4.5

3. Всі формули розділу 4 аналогічні співвідношенням, що зв'язують декартові і полярні координати точки на площині.

5 РІВНЯННЯ КРИВИХ І ОБЛАСТЕЙ НА КОМПЛЕКСНІЙ ПЛОЩИНІ

Як було встановлено в попередньому розділі, комплексне число зображується на комплексній площині радіусом-вектором з координатами (x, y) .

Отже, якщо при додаванні та відніманні комплексних чисел окремо додаються або віднімаються дійсні та уявні частини, а для векторів додавання і віднімання відбувається по координатно, то виявляється, що додавання і віднімання комплексних чисел геометрично є додавання і віднімання векторів, що зображують ці числа (рис. 5.1).

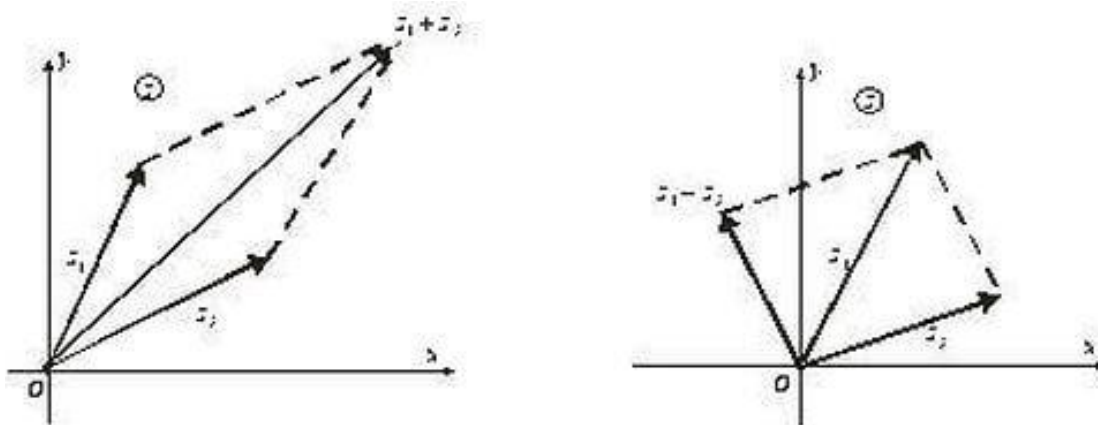


Рис. 5.1

Модуль комплексного числа геометрично – довжина відповідного вектора.

Очевидно, по-перше, що

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

По-друге, модуль різниці двох комплексних чисел $|z_2 - z_1|$ – це довжина вектора, що з'єднує точки z_1 і z_2 .

Отже, $|z_2 - z_1|$ – це відстань між точками z_1 і z_2 .

Така геометрична інтерпретація дозволяє дати зручний спосіб запису кривих і областей на комплексній площині.

1. Коло. Всі точки z , що належать колу, знаходяться на однаковій відстані R від його центру z_0 . Тоді для точок кола

$$|z - z_0| = R. \quad (5.1)$$

2. Круг. Для всіх внутрішніх точок круга радіуса R відстань до центра менша за радіус круга:

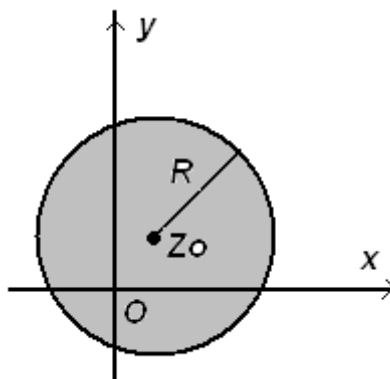


Рис. 5.2

$$|z - z_0| < R. \quad (5.2)$$

Множина точок, що не належить кругу:

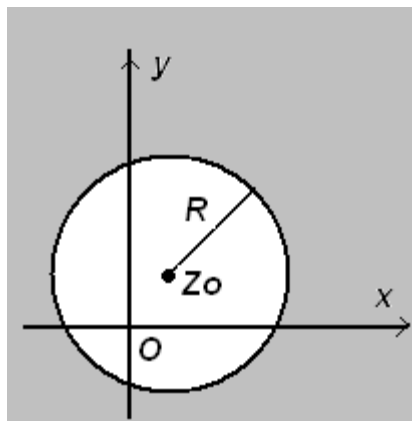


Рис. 5.3

$$|z - z_0| > R. \quad (5.3)$$

3. Еліпс, гіпербола.

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a. \quad (5.4)$$

Для всіх точок z комплексної площини, що задовольняють (5.4), сума відстаней до точок z_1 і z_2 стала і дорівнює $2a$. Але тоді за означенням точки z належать еліпсу з фокусами z_1 і z_2 і великою віссю, що дорівнює $2a$ (за умовою, що відстань між фокусами $|z_1 - z_2|$ менша за $2a$).

Аналогічно згідно з означенням гіперболи, різниця відстаней до фокусів повинна бути сталою:

$$|z - z_1| - |z - z_2| = \pm 2a. \quad (5.5)$$

Приклади:

Подвійна нерівність $\varphi_1 \leq \arg(z) \leq \varphi_2$ задає на площині множину точок, що лежить всередині кута, обмеженого променями: $\arg(z) = \varphi_1$ і $\arg(z) = \varphi_2$

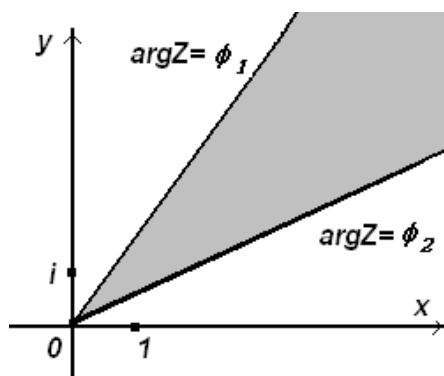


Рис.5.4

2. Зобразити на площині множину точок, що задана системою нерівностей

$$\begin{cases} |z - (1+i)| \geq 3 \\ -\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}.$$

Перша нерівність задає на площині зовнішню область кола з центром в точці (1,1) і радіусом 3, друга область задає внутрішність кута зі сторонами $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ і $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Загальна область – перетин цих двох областей (рис. 5.5).

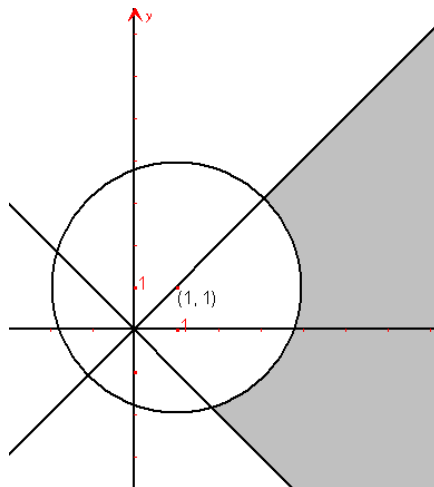
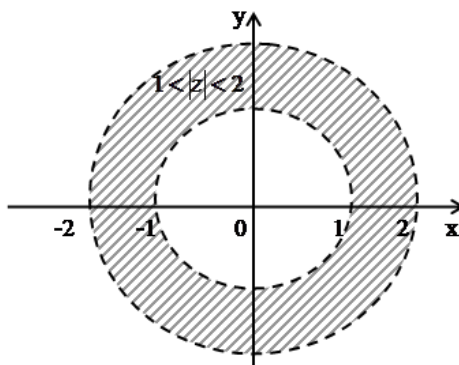


Рис. 5.5

3. Нерівність $1 < |z| < 2$ – всі точки z , для яких відстань до точки 0 більше 1 і менше 2. Ця область лежить всередині кільця, утвореного двома концентричними колами з центром у точці $z_0 = 0$ і радіусами $R_1 = 1$ і $R_2 = 2$.



6 ТРИГОНОМЕТРИЧНА ТА ПОКАЗНИКОВА ФОРМИ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Крім алгебраїчної форми запису комплексного числа застосовують також іншу, яка називається *тригонометричною*. Нехай комплексне число $z = a + bi \neq 0$ зображується вектором $\overrightarrow{OA}$ з координатами $(a; b)$ (рис. 6.1). Позначимо довжину вектора $\overrightarrow{OA}$ буквою r :

$$r = |\overrightarrow{OA}|,$$

а кут, який він утворює з додатним напрямом осі Ox , – через φ (кут φ вважається виміряним у радіанах) (рис.6.1).

Скориставшись означеннями функцій $\sin \varphi$ і $\cos \varphi$:

$$\sin \varphi = b / r, \quad \cos \varphi = a / r,$$

комплексне число $z = a + bi$ можна записати у вигляді

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (6.1)$$

де $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, а кут φ позначається з умов

$$\sin \varphi = b / \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \varphi = a / \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (6.2)$$

Вираз (6.1) називається *тригонометричною формою* запису комплексного числа. Дійсне число r є модулем комплексного числа і позначається $|z|$, а кут φ , виміряний в радіанах, – його аргументом і позначається $\text{Arg}z$.

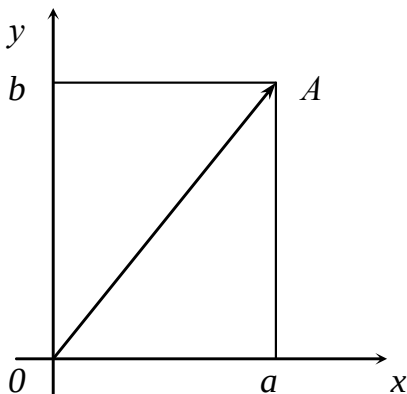


Рис. 6.1

Якщо комплексне число не дорівнює нулю, то модуль його додатний; якщо ж $z = 0$, тобто $a = b = 0$, то й модуль його дорівнює нулю. Модуль будь-якого комплексного числа визначено однозначно.

Якщо комплексне число не дорівнює нулю, то його аргумент визначається формулами (6.2) з точністю до кута, кратного

2π . Якщо $z = 0$, то $r = 0$ і аргумент комплексного числа, що дорівнює нулю, не визначено.

Звичайно для того, щоб уникнути неоднозначності, яка виникає при обчисленні аргументу комплексного числа, використовують поняття *головного значення* аргументу комплексного числа (позначення $\text{arg}z$), вважаючи, що $\text{arg}z \in (-\pi; \pi]$. Аргумент комплексного числа відповідає співвідношенню: $\text{Arg}z = \text{arg}z + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел).

Нехай z_1 і z_2 – два комплексні числа, що відмінні від нуля, записано в тригонометричній формі:

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Добутком двох комплексних чисел z_1 і z_2 є комплексне число, модуль якого дорівнює добутку модулів співмножників, а аргумент – сумі аргументів співмножників:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Вектор, що зображує добуток комплексних чисел z_1 і z_2 , дістаємо поворотом вектора $\vec{z}$ проти годинникової стрілки на кут, що дорівнює φ_2 , і розтягом його в $|z_2|$ раз (для випадку $|z_2| > 1$ див. рис.6.2).

Частка двох комплексних чисел z_1 і z_2 , що не дорівнюють нулю, є комплексне число, модуль якого дорівнює частці модулів діленого і дільника, а аргумент – різниці аргументів діленого і дільника:

$$z_1 / z_2 = r_1 / r_2 [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

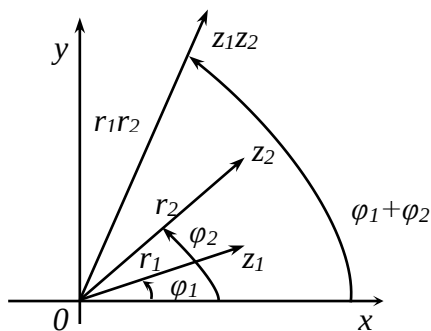


Рис. 6.2

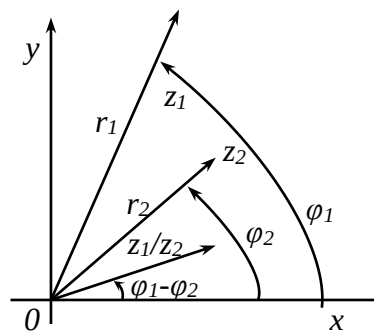


Рис. 6.3

Вектор, що зображує частку двох комплексних чисел z_1 і z_2 , дістаємо поворотом вектора, який зображує комплексне число z_1 , за годинниковою стрілкою на кут, що дорівнює φ_2 , і стиском його в $|z_2|$ раз (для випадку $|z_1| > 1$ (див. рис. 6.3)).

4. Натуральний степінь комплексного числа. n -м *степенем* комплексного числа z називається комплексне число w , знайдене внаслідок множення числа z самого на себе n раз: $w = z \cdot z \cdot \dots \cdot z$.

Звичайно використовують коротший запис: $w = z^n$, в якому число z є *основною степеня*, а натуральне число n – *показником степеня*.

n -й степінь комплексного числа z , заданого в тригонометричній формі обчислюється за *формулою Муавра*:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

5. Корінь n -го степеня з комплексного числа. *Коренем n -го степеня з комплексного числа z* називається таке комплексне число w , n -й степінь якого дорівнює z :

$$w^n = z.$$

Корінь n -го степеня з комплексного числа z позначається символом $\sqrt[n]{z}$. На відміну від кореня з дійсного числа, корінь n -го степеня з комплексного числа визначається неоднозначно. Саме в множині комплексних чисел існує рівно n коренів n -го степеня з даного комплексного числа.

Усі корені n -го степеня з комплексного числа z , заданого в тригонометричній формі, обчислюються за формулою

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} (\cos(\varphi + 2\pi k) / n + i \sin(\varphi + 2\pi k) / n),$$

де $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Геометрично всі корені n -го степеня з комплексного числа зображуються точками, що лежать на колі з центром в початку координат, радіус якого дорівнює $\sqrt[n]{r}$, а центральні кути між радіусами, проведеними у сусідні точки, дорівнює $2\pi / n$.

Приклад. Обчислити корені четвертого степеня з числа -1 .

Розв'язання. Число -1 у тригонометричній формі можна записати так:

$$-1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi).$$

Корені четвертого степеня з числа -1 – це комплексні числа

$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1}(\cos(\pi + 2\pi k) / 4 + i \sin(\pi + 2\pi k) / 4),$$

де $k = 0, 1, 2, 3$, тобто комплексні числа (рис. 6.4):

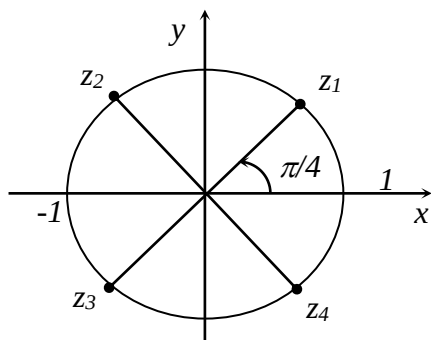


Рис. 6.4

Формула Ейлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \varphi \in R$$

надає можливість записувати комплексне число у показниковій формі:

$$z = re^{i\varphi}, \quad r = |z|; \quad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Для комплексних чисел у показниковій формі:

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}; \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$$

маємо

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2; \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \quad k \in Z;$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)};$$

$$z_1^n = r_1^n e^{in\varphi_1}, \quad n \in N;$$

$$\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{r_1} e^{i \frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n}}, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad n \in N.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Физматгиз, 2007. – 432 с.
2. Краснов, М.Л. Функции комплексного переменного: Задачи и примеры с подробными решениями: учебное пособие / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 208 с.
3. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник. – Львів: «Новий світ-2000», 2004. – 434 с.

Індивідуальні завдання

Завдання 1

Виконати вказані дії:

$$1. \quad (1+4i) \cdot (2-3i) + \frac{2i(5+2i)}{1+2i}$$

$$3. \quad \frac{5+i}{-1-2i} + \frac{2+3i}{i}$$

$$5. \quad (2-i)^2 + \frac{3+i}{1-2i}$$

$$7. \quad \frac{(1-2i)(1+i)}{3-i} - 2i(2-i)$$

$$9. \quad (3-2i)^2 + \frac{9-8i}{4+2i} - i^5$$

$$11. \quad 5-3i + \frac{i^3(2-i)}{2+i}$$

$$13. \quad \frac{(1-2i)^2}{3+i} - 1+i$$

$$15. \quad \frac{i^5(6-i)}{-2+i} - 2+3i$$

$$17. \quad \frac{i}{-1+3i} - 1+4i^5$$

$$19. \quad \frac{(1+5i) \cdot (1-i)}{-1+2i} - 3i$$

$$21. \quad (1+4i) \cdot (2-3i) + \frac{2i(5+2i)}{1+2i}$$

$$23. \quad \frac{5+i}{-1-2i} + \frac{2+3i}{i}$$

$$25. \quad (2-i)^2 + \frac{3+i}{1-2i}$$

$$27. \quad \frac{(1-2i)(1+i)}{3-i} - 2i(2-i)$$

$$29. \quad (3-2i)^2 + \frac{9-8i}{4+2i} - i^5$$

$$2. \quad \frac{(2-6i) \cdot i}{-4+2i} - (1-i)^2$$

$$4. \quad \frac{(1-5i) \cdot (2+i)}{-1+i} - i^7(2-3i)$$

$$6. \quad \frac{4-5i^3}{1+i} - 3i(5+2i)$$

$$8. \quad \frac{5+3i}{1+3i} - i(2+3i)$$

$$10. \quad (-1+i) \cdot (3+2i) + \frac{i(6-4i)}{2+2i}$$

$$12. \quad (4-i)^2 + \frac{1+8i^3}{4-2i}$$

$$14. \quad \frac{5i+2i^6}{1-i} - 3+2i$$

$$16. \quad \frac{(1+2i) \cdot (3-i)}{2-i} - i(5+3i)$$

$$18. \quad \frac{(1-i) \cdot (5+i)}{-3+i} - i^3(1+i)$$

$$20. \quad \frac{2+4i}{1-3i} - i^3(1+3i)$$

$$22. \quad \frac{(2-6i) \cdot i}{-4+2i} - (1-i)^2$$

$$24. \quad \frac{(1-5i) \cdot (2+i)}{-1+i} - i^7(2-3i)$$

$$26. \quad \frac{4-5i^3}{1+i} - 3i(5+2i)$$

$$28. \quad \frac{5+3i}{1+3i} - i(2+3i)$$

$$30. \quad (-1+i) \cdot (3+2i) + \frac{i(6-4i)}{2+2i}$$

Завдання 2

Представити комплексні числа z_1 та z_2 в тригонометричній і показниковій формах і зобразити точками на комплексній площині.

- | | |
|--|--|
| 1. $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$,
$z_2 = 3 - 3i$ | 2. $z_1 = -4\sqrt{3} + 4i$,
$z_2 = 0,5 + 0,5i$ |
| 3. $z_1 = -3 + 3i$,
$z_2 = \sqrt{3} + i$ | 4. $z_1 = -7 + 7\sqrt{3}i$,
$z_2 = 3\sqrt{3} + 3i$ |
| 5. $z_1 = -\sqrt{3} - i$, $z_2 = -5i$ | 6. $z_1 = 4 - 4\sqrt{3}i$, $z_2 = 0,5i$ |
| 7. $z_1 = -2 - 2i$,
$z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ | 8. $z_1 = 6\sqrt{3} + 6i$, $z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ |
| 9. $z_1 = -3 - 3\sqrt{3}i$, $z_2 = -2i$ | 10. $z_1 = -2 + 2\sqrt{3}i$, $z_2 = -0,5i$ |
| 11. $z_1 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$,
$z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$ | 12. $z_1 = 4\sqrt{3} + 4i$,
$z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$ |
| 13. $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$,
$z_2 = 4 + 4i$ | 14. $z_1 = 5 + 5\sqrt{3}i$,
$z_2 = -2\sqrt{3} + 2i$ |
| 15. $z_1 = 2 - 2\sqrt{3}i$,
$z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ | 16. $z_1 = -2\sqrt{3} + 2i$,
$z_2 = 4i$ |
| 17. $z_1 = -2 - 2\sqrt{3}i$,
$z_2 = 6\sqrt{3} + 6i$ | 18. $z_1 = \sqrt{3} - i$,
$z_2 = 4 + 4i$ |
| 19. $z_1 = -3 - 3i$,
$z_2 = 4\sqrt{3} + 4i$ | 20. $z_1 = -3 + 3\sqrt{3}i$,
$z_2 = 3\sqrt{3} - 3i$ |
| 21. $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$,
$z_2 = 3 - 3i$ | 22. $z_1 = -4\sqrt{3} + 4i$,
$z_2 = 0,5 + 0,5i$ |
| 23. $z_1 = -3 + 3i$,
$z_2 = \sqrt{3} + i$ | 24. $z_1 = -7 + 7\sqrt{3}i$,
$z_2 = 3\sqrt{3} + 3i$ |
| 25. $z_1 = -\sqrt{3} - i$, $z_2 = -5i$ | 26. $z_1 = 4 - 4\sqrt{3}i$, $z_2 = 0,5i$ |
| 27. $z_1 = -2 - 2i$,
$z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ | 28. $z_1 = 6\sqrt{3} + 6i$, $z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ |
| 29. $z_1 = -3 - 3\sqrt{3}i$, $z_2 = -2i$ | 30. $z_1 = -2 + 2\sqrt{3}i$, $z_2 = -0,5i$ |

Завдання 3

Надати геометричний опис множини точок комплексної площини, що задовольняє вказаний умові.

- | | |
|---|-----------------------------|
| 1. $Im(\bar{z}) > -1$ | 2. $-1 \leq Re(z) \leq 3$ |
| 3. $0 < arg z < \frac{\pi}{2}$ | 4. $1 \leq z - 3 \leq 3$ |
| 5. $ z - i < 5$ | 6. $ z ^2 = (Re z)^2 + 9$ |
| 7. $Im(z - 4i) > 0$ | 8. $ z + 4i < 4$ |
| 9. $Re(z \cdot i) > 3$ | 10. $Im(z^2) \leq 2$ |
| 11. $\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} + arg z \leq \pi$ | 12. $Re(z + 2) \geq 0$ |
| 13. $Re(z - 2) \leq 1$ | 14. $Im(z \cdot i) < -1$ |
| 15. $2 < Im(z) \leq 4$ | 16. $Re(z^2) = 0$ |
| 17. $\frac{\pi}{4} < arg z < \frac{\pi}{2}$ | 18. $Im(z + i) \leq 3$ |
| 19. $ z + 1 - 2i \leq 2$ | 20. $ z > (Re z)^2 - 4$ |
| 21. $Im(\bar{z}) > -1$ | 22. $-1 \leq Re(z) \leq 3$ |
| 23. $0 < arg z < \frac{\pi}{2}$ | 24. $1 \leq z - 3 \leq 3$ |
| 25. $ z - i < 5$ | 26. $ z ^2 = (Re z)^2 + 9$ |
| 27. $Im(z - 4i) > 0$ | 28. $ z + 4i < 4$ |
| 29. $Re(z \cdot i) > 3$ | 30. $Im(z^2) \leq 2$ |

Завдання 4

Для комплексних чисел z_1 та z_2 , що записані в тригонометричній формі, із завдання 4, виконати вказані дії.

- | | |
|---|---|
| 1. $z_1^5 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}, \sqrt[4]{z_2}$ | 2. $z_1 \cdot z_2, \frac{z_1^5}{z_2}, \sqrt[3]{z_2}$ |
| 3. $z_1 \cdot z_2^5, \frac{z_1}{z_2}, \sqrt[3]{z_2^5}$ | 4. $z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2^5}, \sqrt[3]{z_1}$ |
| 5. $z_1^7 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}, \sqrt[4]{z_2}$ | 6. $z_1 \cdot z_2, \frac{z_1^4}{z_2}, \sqrt[4]{z_1}$ |
| 7. $z_1 \cdot z_2, \frac{z_1^8}{z_2}, \sqrt[4]{z_2}$ | 8. $z_1^5 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}, \sqrt[4]{z_1^5}$ |
| 9. $z_1 \cdot z_2, \frac{z_1^3}{z_2}, \sqrt[5]{z_2}$ | 10. $z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}, \sqrt[4]{z_1^3}$ |
| 11. $z_1^5 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}, \sqrt[3]{z_2}$ | 12. $z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2^3}, \sqrt[5]{z_1}$ |
| 13. $z_1 \cdot z_2^6, \frac{z_1}{z_2}, \sqrt[4]{z_1}$ | 14. $z_1 \cdot z_2^7, \frac{z_1}{z_2}, \sqrt[3]{z_2}$ |
| 15. $z_1 \cdot z_2, \frac{z_1^5}{z_2}, \sqrt[4]{z_1^5}$ | 16. $z_1^3 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}, \sqrt[4]{z_1^3}$ |
| 17. $z_1 \cdot z_2^5, \frac{z_1}{z_2}, \sqrt[3]{z_1}$ | 18. $z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2^7}, \sqrt[4]{z_1}$ |
| 19. $z_1^5 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}, \sqrt[3]{z_2}$ | 20. $z_1 \cdot z_2, z_1 : z_2^3, \sqrt[4]{z_2^3}$ |
| 21. $z_1^5 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}, \sqrt[4]{z_2}$ | 22. $z_1 \cdot z_2, \frac{z_1^5}{z_2}, \sqrt[3]{z_2}$ |
| 23. $z_1 \cdot z_2^5, \frac{z_1}{z_2}, \sqrt[3]{z_2^5}$ | 24. $z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2^5}, \sqrt[3]{z_1}$ |
| 25. $z_1^7 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}, \sqrt[4]{z_2}$ | 26. $z_1 \cdot z_2, \frac{z_1^4}{z_2}, \sqrt[4]{z_1}$ |
| 27. $z_1 \cdot z_2, \frac{z_1^8}{z_2}, \sqrt[4]{z_2}$ | 28. $z_1^5 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}, \sqrt[4]{z_1^5}$ |
| 29. $z_1 \cdot z_2, \frac{z_1^3}{z_2}, \sqrt[5]{z_2}$ | 30. $z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}, \sqrt[4]{z_1^3}$ |