

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ХІМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ
«ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ РЕАКЦІЙ ПРИ ОБЕРТАННІ
ТВЕРДОГО ТІЛА НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ОСІ»
ДЛЯ СТУДЕНТІВ ІІ КУРСУ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ:
ХМ, МП, ТМ, ОХВ, ХОМ, ХВ

Затверджено на засіданні кафедри
матеріалознавства.
Протокол № 10 від 9.04.2014

Дніпропетровськ УДХТУ 2014

Методичні вказівки до виконання лабораторної роботи «Дослідження динамічних реакцій при обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі» для студентів II курсу спеціальностей: ХМ, МП, ТМ, ОХВ, ХОМ, ХВ / Укл.: Б.В. Виноградов, С.І. Немчинов. – Дніпропетровськ: ДВНЗ УДХТУ, 2014. – 27 с.

Укладачі: Б.В. Виноградов, д-р техн. наук
С.І. Немчинов, канд. техн. наук

Відповідальний за випуск Б.В. Виноградов, д-р техн. наук

Навчальне видання

Методичні вказівки до виконання лабораторної роботи
«Дослідження динамічних реакцій при обертанні твердого тіла навколо
нерухомої осі» для студентів II курсу спеціальностей:
ХМ, МП, ТМ, ОХВ, ХОМ, ХВ

Укладачі: ВІНОГРАДОВ Борис Володимирович
НЕМЧИНОВ Сергій Ілліч

Редактор Л.М. Тонкошкур
Коректор Л.Я. Гоцуцова

Підписано до друку 13.05.14. Формат 60×84 1/16. Папір ксерокс. Друк різогр.
Умов.-друк. арк. 1,23. Облік.-вид. арк. 1,28. Тираж 50 прим. Замов. № 182.
Свідоцтво ДК № 303 від 27.12.2000.

ДВНЗ УДХТУ, 49005, Дніпропетровськ-5, просп. Гагаріна, 8.

Видавничо-поліграфічний комплекс ІнКомЦентру

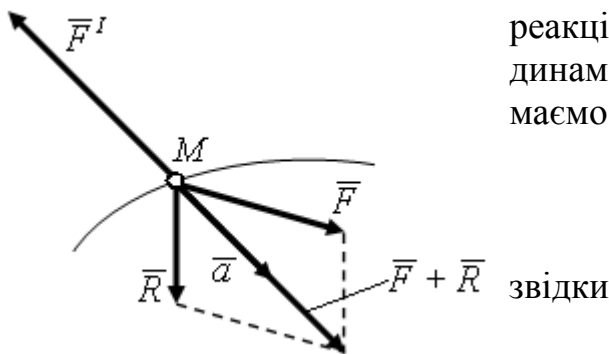
ПРИНЦИП Д'АЛАМБЕРА. ДИНАМІЧНІ РЕАКЦІЇ ПРИ ОБЕРТАННІ ТІЛА НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ОСІ

1. Принцип Д'Аламбера для точки та системи матеріальних точок

Закони Ньютона дозволяють дослідити рух будь-яких механічних систем. В той час, коли не була сформульована аксіома про звільнення від в'язей, вони застосовувалися лише для дослідження руху вільних матеріальних точок. Для дослідження руху невільних систем Д'Аламбер запропонував спеціальний принцип, який отримав назву принципу Д'Аламбера. Спочатку знайдемо вираз принципу для однієї матеріальної точки.

Принцип Д'Аламбера для невільної матеріальної точки. Розглянемо рух матеріальної точки M , що здійснює невільний рух під дією активної сили \vec{F} (рис. 1). Застосуємо до точки аксіому про звільнення від в'язей, тобто уявно

відкинемо в'язь і дію в'язі на точку замінимо реакцією в'язі \vec{R} . Тоді згідно з рівнянням динаміки для невільної матеріальної точки маємо



$$m \cdot \vec{a} = \vec{F} + \vec{R}, \quad (1)$$

$$\vec{F} + \vec{R} + (-m \cdot \vec{a}) = 0. \quad (2)$$

Рис. 1

Доданок $(-m \cdot \vec{a})$ називають даламберовою силою інерції і позначають \vec{F}^I . З урахуванням введеного позначення рівність (2) набуває вигляду

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{F}^I = 0. \quad (3)$$

Рівняння (3) є математичним відображенням принципу Д'Аламбера для матеріальної точки: для невільної матеріальної точки в кожний момент часу векторна сума активної сили \vec{F} , що прикладена до точки, реакції в'язі \vec{R} та сили інерції \vec{F}^I дорівнює нулю.

Принцип Д'Аламбера для системи матеріальних точок.

Диференціальним рівнянням руху механічної системи можна надати форми рівнянь статички. В цьому полягає принцип Д'Аламбера для механічної системи. Принцип Д'Аламбера доцільно застосовувати для розв'язання першої задачі динаміки системи. Цей принцип особливо ефективний для визначення динамічних реакцій в'язей, що виникають при русі механічної системи. *Метод, що дозволяє розв'язувати задачі динаміки методами статички, часто називають методом кінестатички.*

Розглянемо систему n матеріальних точок, до кожної точки якої в загальному вигляді прикладені рівнодійна активних сил і рівнодійна реакцій в'язей. Тоді на підставі принципу Д'Аламбера для однієї матеріальної точки (3) матимемо

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k + \bar{F}_k^I = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

де $\bar{F}_k^I = -m_k \cdot \bar{a}_k$ – сила інерції для k -ї точки.

Підсумовуючи (4) за індексом k отримаємо

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k + \sum_{k=1}^n \bar{R}_k + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^I = 0. \quad (5)$$

Позначимо головні вектори активних сил, реакцій в'язей та сил інерції відповідно

$$\bar{F} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k, \quad \bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{R}_k, \quad \bar{F}^I = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^I.$$

Тоді вираз (5) набуває вигляду

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{F}^I = 0. \quad (6)$$

Виберемо довільний центр O , проведемо в k -ту точку системи радіус-вектор \bar{r}_k і помноживши його векторно на сили, що входять в (4), визначимо їхні моменти відносно центра O . Підсумовуючи за k визначимо головні моменти активних сил, реакцій в'язей і сил інерції:

$$\bar{M}_O + \bar{M}_O^R + \bar{M}_O^I = 0, \quad (7)$$

де

$$\bar{M}_O = \sum_{k=1}^n (\bar{r}_k \times \bar{F}_k), \quad \bar{M}_O^R = \sum_{k=1}^n (\bar{r}_k \times \bar{R}_k), \quad \bar{M}_O^I = \sum_{k=1}^n (\bar{r}_k \times \bar{F}_k^I).$$

Рівняння (6) і (7) виражають принцип Д'Аламбера для системи: в кожний момент часу при русі невільної механічної системи векторна сума головних векторів активних сил, реакцій в'язей і сил інерції, а також векторна сума головних моментів активних сил, реакцій в'язей і сил інерції, що обчислені відносно довільного нерухомого центра, дорівнюють нулю.

2. Визначення головного вектора і головного моменту сил інерції твердого тіла

Обчислення головного вектора і головного моменту сил інерції становить практичний інтерес для розв'язування важливих задач динаміки механізмів, машин і приладів, роботів-маніпуляторів.

При застосуванні методу кінетостатики для твердого тіла величини \bar{F} , \bar{R} , \bar{M}_O , \bar{M}_O^R визначаються звичайним чином, тобто шляхом безпосереднього підсумовування відповідних сил та їх векторних моментів. Щодо величин \bar{F}^I і \bar{M}_O^I то вони обчислюються за спеціальними формулами. Це пов'язано з тим, що сил інерції в твердому тілі нескінченно багато, і безпосередньо підсумовування стає неможливим.

Головний вектор сил інерції механічної системи (твердого тіла) дорівнює добутку маси системи (тіла) на прискорення центра мас і напрямлений протилежно цьому прискоренню:

$$\bar{F}^I = -M \cdot \bar{a}_C. \quad (8)$$

Головний момент сил інерції механічної системи (твердого тіла) відносно деякого нерухомого центра дорівнює взятій зі знаком мінус першій похідній за часом від кінетичного моменту системи (тіла) відносно того самого центра:

$$\bar{M}_O^I = -\frac{d\bar{K}_O}{dt}. \quad (9)$$

Підкреслюємо, що в цій формулі центр зведення O має бути нерухомим. Для рухомого центра зведення наведена формула (9) зберігається тільки у випадку, коли таким центром є центр мас C тіла.

Відповідно до (9) головний момент сил інерції твердого тіла відносно осі z

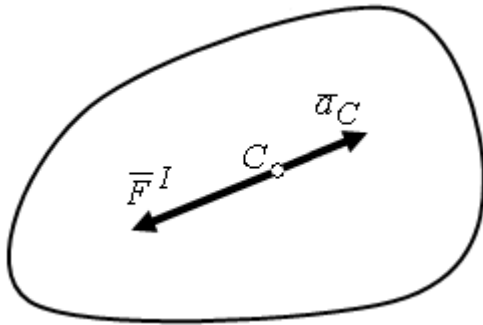
$$M_z^I = -\frac{dK_z}{dt}. \quad (10)$$

При застосуванні принципу Д'Аламбера для механічної системи, що складається з твердих тіл (або для твердого тіла), необхідно вміти визначати головний вектор \bar{F}^I і головний момент \bar{M}_O^I при різних рухах твердого тіла.

Розглянемо деякі випадки руху твердого тіла і визначимо, чому дорівнюють головний вектор і головний момент сил інерції тіла.

Поступальний рух твердого тіла. При поступальному русі тіла прискорення всіх точок однакові і рівні прискоренню \bar{a}_C центра мас C . Тоді всі сили інерції утворюють систему паралельних сил, які напрямлені в один бік. Така система сил зводиться до рівнодійної, яка дорівнює головному вектору

$$\bar{F}^I = -M\bar{a}_C. \quad (11)$$



Лінія дії рівнодійної сили інерції в цьому випадку проходить через центр мас (рис. 2), оскільки головний момент сил інерції точок тіла відносно центра мас C

Рис. 2

$$\bar{M}_C^I = \sum_{k=1}^n \bar{M}_C (\bar{F}_k^I) = 0.$$

Вектор \bar{F}^I прикладений в центрі мас C тіла і має напрям, прямо протилежний до напрямку вектора прискорення центра мас. Чисельно вектор становить:

$$F^I = Ma_C.$$

Отже, при поступальному русі сили інерції твердого тіла зводяться до однієї рівнодійної, що прикладена в центрі мас тіла і дорівнює головному вектору сил інерції $\bar{F}^I = -M\bar{a}_C$.

Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі. При розміщенні центра зведення сил інерції в точці O , що знаходиться на осі обертання Oz , головний вектор і головний момент сил інерції в цій точці дорівнюють:

$$\bar{F}^I = -M\bar{a}_C, \quad \bar{M}_O^I = -\frac{d\bar{K}_O}{dt}.$$

Якщо тверде тіло, що обертається навколо нерухомої осі Oz , має площину матеріальної симетрії і центр O збігається з центром мас C тіла (осі координат $Oxuz$ – головні центральні осі інерції тіла, рис. 3, а), то головний вектор сил інерції дорівнюватиме нулю:

$$\bar{F}_O^I = \bar{F}_C^I = -M\bar{a}_C = 0,$$

а головний момент сил інерції, з урахуванням того, що $J_{xz} = J_{yz} = 0$, $\bar{\omega}(0, 0, \omega_z)$, $\bar{\varepsilon}(0, 0, \varepsilon_z)$, дорівнюватиме:

$$\bar{M}_O^I = \bar{M}_C^I = -J_z \varepsilon_z \bar{k} = -J_z \bar{\varepsilon}_z,$$

де J_z – момент інерції тіла відносно осі обертання, $\bar{\varepsilon}_z$ – вектор кутового прискорення тіла при обертанні навколо осі Oz .

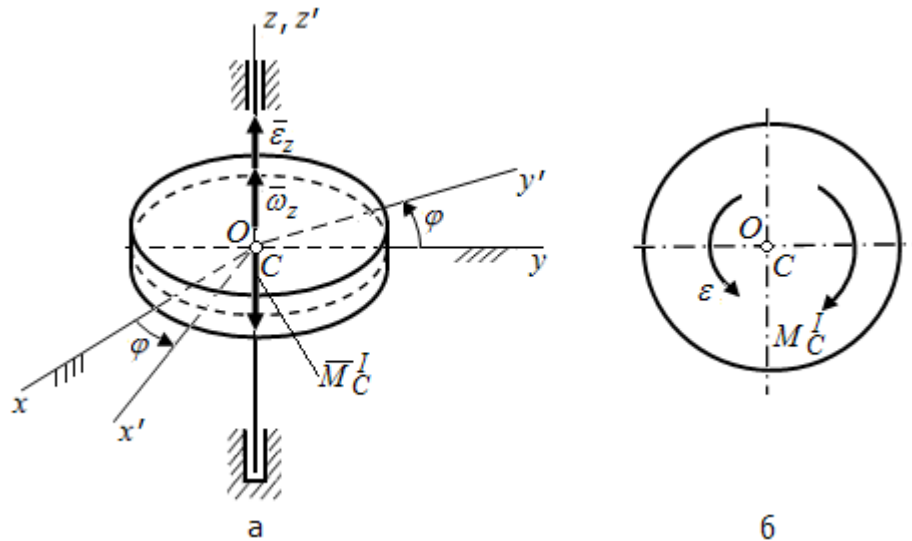


Рис. 3

Вектор $\bar{M}_O^I = \bar{M}_C^I$ розташований на осі обертання твердого тіла і має напрям, протилежний напрямку вектора $\bar{\varepsilon}_z$ (рис. 3, а).

Оскільки головний вектор сил інерції дорівнює нулю, а головний момент відмінний від нуля, то *сили інерції тіла зводяться до пари сил з моментом \bar{M}_O^I* . З виразу $\bar{M}_O^I = -J_z \bar{\varepsilon}_z$ випливає, що *ця пара сил діє в площині, яка перпендикулярна осі обертання, а її момент дорівнює добутку моменту інерції тіла відносно осі обертання на кутове прискорення і напрямлений протилежно кутовому прискоренню тіла* (рис. 3, б).

Плоскопаралельний рух твердого тіла, що має площину матеріальної симетрії. Якщо при плоскому русі тіла всі його точки рухаються паралельно площині симетрії тіла і в якості центра зведення сил інерції взяти

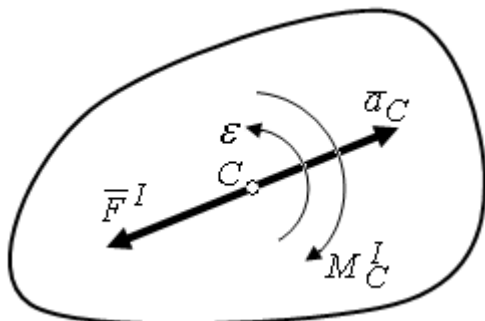


Рис. 4

центр мас C тіла, то система сил інерції зводиться до сили, що прикладена в центрі мас C тіла і дорівнює \bar{F}^I , та парі сил з моментом $\bar{M}_C^I = -J_{Cz} \bar{\varepsilon}_z$. Сила \bar{F}^I і пара сил з моментом \bar{M}_C^I діють в площині руху, мають модулі $F^I = Ma_c$, $M_C^I = J_{Cz} \varepsilon_z$ і напрями протилежні напрямкам прискорення центра мас та кутового прискорення тіла відповідно (рис. 4).

Отже, *при плоскому русі тіла, всі точки якого рухаються паралельно площині матеріальної симетрії тіла,*

$$\bar{F}^I = -M\bar{a}_C, \quad \bar{M}_C^I = -I_{Cz}\bar{\varepsilon}_z,$$

де I_{Cz} – момент інерції тіла відносно осі z , яка перпендикулярна площині симетрії і проходить через центр мас C тіла.

3. Тестове завдання

1. Матеріальна точка маси m рухається з прискоренням \bar{a} . Чому дорівнює сила інерції, що діє на точку?

Варіанти відповіді:

а) $\bar{F}^I = -m\bar{g}$; б) $\bar{F}^I = -m\bar{a}$; в) $\bar{F}^I = m\bar{a}$.

2. Яке рівняння виражає принцип Д'Аламбера для k -ї матеріальної точки системи?

Варіанти відповіді:

а) $\bar{F}_k + \bar{R}_k + \bar{F}_k^I = 0$; б) $\bar{F}_k + \bar{R}_k - \bar{F}_k^I = 0$; в) $\bar{F}_k + \bar{F}_k^{-I} = 0$.

3. Чому дорівнює головний вектор сил інерції твердого тіла, що здійснює будь-який рух?

Варіанти відповіді:

а) $\bar{F}^I = \sum m\bar{a}_k$; б) $\bar{F}^I = -M\bar{a}_C$; в) $\bar{F}^I = -I\varepsilon$.

4. За якою формулою обчислюється момент сил інерції твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі z , має площину симетрії і центр O збігається з центром мас C ?

Варіанти відповіді:

а) $M_z^I = -M\bar{a}_C$; б) $M_z^I = -I_z\varepsilon$; в) $\bar{M}_z^I = -I\omega$.

5. На якій схемі (рис. 5) вірно показано напрямок моменту сил інерції зубчастого колеса, що обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю ω і кутовим прискоренням ε ?

Варіанти відповіді:

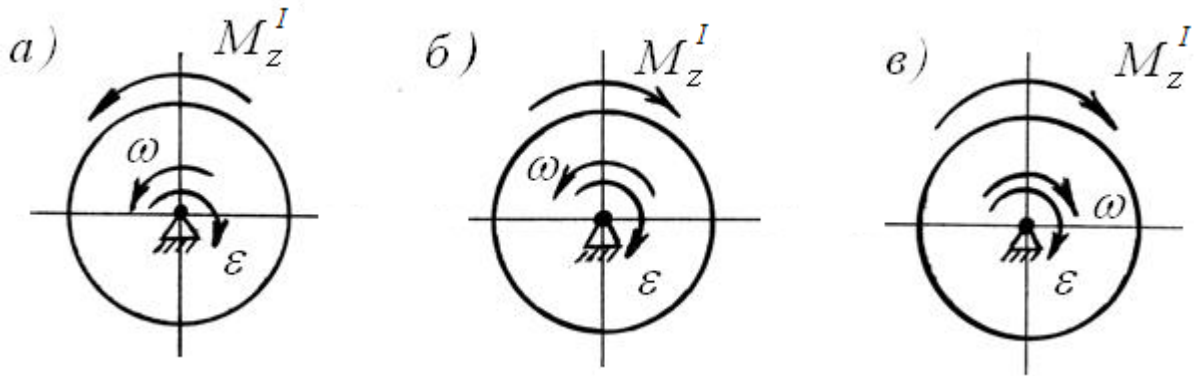


Рис. 5

6. На якій схемі (рис. 6) вірно показана точка прикладання рівнодійної сил інерції \bar{F}^I однорідного стержня маси m та довжини l , який обертається навколо нерухомої осі з постійною кутовою швидкістю ω ?

Варіанти відповіді:

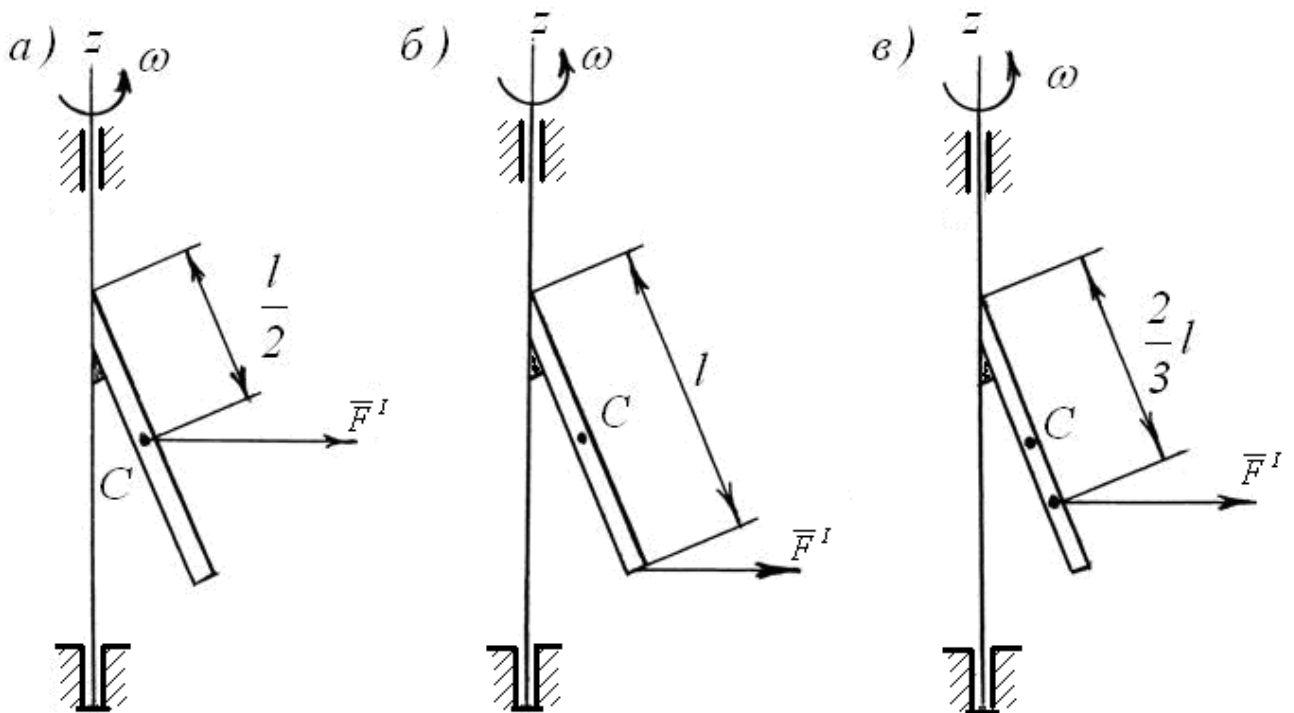


Рис. 6

7. Вантаж А вагою P підіймається по похилій гладкій поверхні під кутом α до горизонту з прискоренням \bar{a} за допомогою невагомої нитки, що перекинута через блок В (рис. 7). Чому дорівнює зусилля натягу нитки?

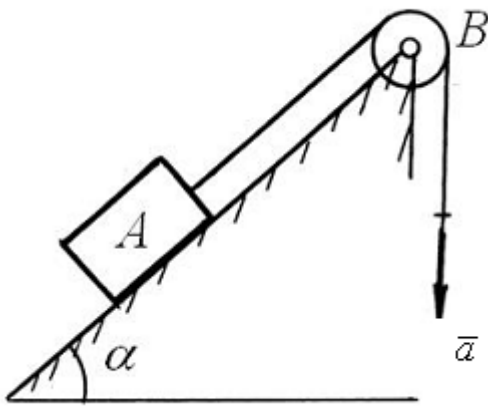


Рис. 7

Варіанти відповіді:

а) $T = P(\cos \alpha + \frac{a}{g});$

б) $T = P(\sin \alpha + \frac{a}{g});$

в) $T = F + \frac{a}{g} .$

4. Приклади розв'язання задач

Задача 1. До вертикального валу AB , що обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо вертикальної осі Oz , закріплено однорідний круглий диск маси M (рис. 8). Вісь Oz розташована в площині диска та знаходиться на відстані $OC = a$ від центра мас C диска (рис. 8). Визначити сили динамічного тиску вала на під'ятник A та підшипник B , якщо $OB = OA$. Масою вала AB знехтувати. Вісі x та y незмінно зв'язані з диском, вісь z проходить через центр мас C диска.

Розв'язання

Для визначення сил динамічного тиску застосуємо рівняння (6) і (7) методу кінестатики, які в проекціях на вісі $Oxyz$ можна представити у вигляді:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} + \sum_{k=1}^n R_{kx} + \sum_{k=1}^n F_{kx}^I = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} + \sum_{k=1}^n R_{ky} + \sum_{k=1}^n F_{ky}^I = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} + \sum_{k=1}^n R_{kz} + \sum_{k=1}^n F_{kz}^I = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) + \sum_{k=1}^n M_x(\bar{R}_k) + \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k^I) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) + \sum_{k=1}^n M_y(\bar{R}_k) + \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k^I) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) + \sum_{k=1}^n M_z(\bar{R}_k) + \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^I) = 0.$$

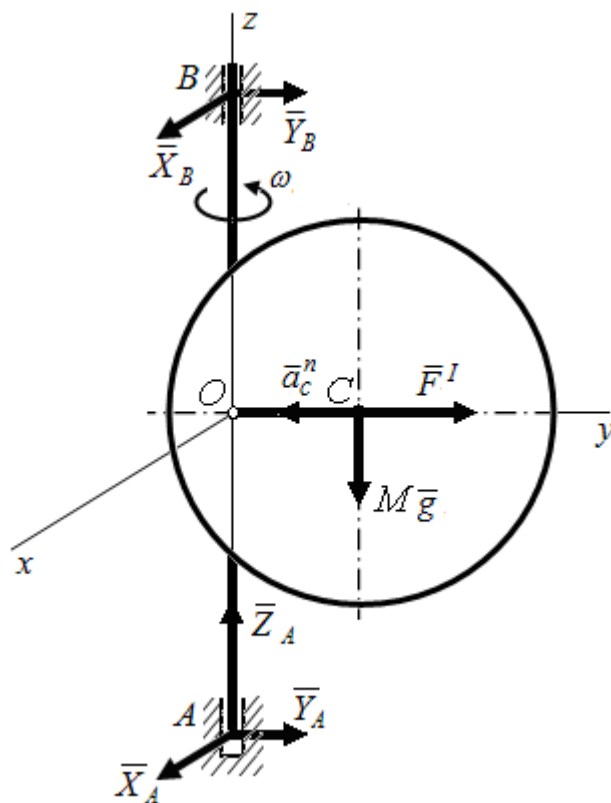


Рис. 8

Розглядаємо рух механічної системи, що включає вал AB і однорідний круглий диск.

Активна сила – сила ваги однорідного круглого диска $M\bar{g}$, вагою вала AB нехтуємо.

В'язями для виділеної системи є підп'ятник A та циліндричний підшипник B , а їх реакціями $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$.

Для складання рівнянь рівноваги до заданих сил та реакцій в'язей додамо сили інерції точок системи.

Зазначимо, що за умови задачі вал AB не має маси (безінерційний).

Сили інерції точок диска зведемо до точки O , що знаходиться на осі обертання Oz . В результаті отримаємо головний вектор сил інерції

$\bar{F}^I = -M \cdot \bar{a}_c$ і головний момент сил інерції відносно точки O $\bar{M}_O^I = -\frac{d\bar{K}_O}{dt}$, які

прикладені в точці O .

Оскільки диск обертається рівномірно, то $\varepsilon = 0, a_c^t = 0, \bar{a}_c = \bar{a}_c^n$.

Тоді модуль прискорення \bar{a}_c центра мас C диска

$$a_c = a_c^n = \omega^2 \cdot OC = \omega^2 \cdot a.$$

Отже вектор \bar{F}^I дорівнює за модулем

$$F^I = Ma_c^n = M\omega^2 a$$

і напрямлений уздовж осі Oy у бік протилежний напрямку прискоренню \bar{a}_c^n .

Оскільки вісь Oz перпендикулярна до площини матеріальної симетрії Oxy круглого однорідного диска, то вона є головною віссю інерції диска для точки O і тому відцентрові моменти: $J_{YZ} = 0$, $J_{XZ} = 0$. Тоді у відповідності до формул для обчислення проєкцій головного моменту сил інерції та умови $\omega = const$ випливає, що $\bar{M}_O^I = 0$.

Отже, сили інерції круглого однорідного диска зводяться до однієї рівнодійної, що дорівнює головному вектору \bar{F}^I , проходить через точку O і напрямлена уздовж осі Oy .

Отже на виділену механічну систему діятиме система сил $M\bar{g}$, \bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{Z}_A , \bar{X}_B , \bar{Y}_B , \bar{F}^I (рис.8). На підставі принципу Д'Аламбера ці сили утворюють зрівноважену систему сил.

Зазначимо, що реакції підп'ятника A і підшипника B мають статичні складові, що спричинюються активними силами (силою тяжіння) і динамічні складові, що спричинюються силами інерції. Тому для обчислення динамічних реакцій не будемо враховувати силу тяжіння $M\bar{g}$.

Складемо рівняння рівноваги, вважаючи, що диск в розглядуємий момент часу знаходиться в координатній площині Oyz . Тоді для проєкцій сил і моментів їх відносно осей координат Ox , Oy , Oz маємо:

$$X_A^{\text{дин}} + X_B^{\text{дин}} = 0,$$

$$Y_A^{\text{дин}} + Y_B^{\text{дин}} + F^I = 0,$$

$$Z_A^{\text{дин}} = 0,$$

$$-Y_B^{\text{дин}} \cdot OB + Y_A^{\text{дин}} \cdot OA = 0,$$

$$-X_A^{\text{дин}} \cdot OA + X_B^{\text{дин}} \cdot OB = 0,$$

$$0 = 0.$$

Розв'язуючи отриману систему рівнянь і підставляючи значення F^I знаходимо динамічні реакції підп'ятника A і підшипника B .

$$X_A^{\text{дин}} = X_B^{\text{дин}} = 0;$$

$$Y_A^{\text{дин}} = -\frac{1}{2}F^I = -\frac{1}{2}M\omega^2 a; \quad Y_B^{\text{дин}} = -\frac{1}{2}F^I = -\frac{1}{2}M\omega^2 a;$$

$$Z_A^{\text{дин}} = 0.$$

Знак мінус свідчить про те, що напрямки реакцій \bar{Y}_A, \bar{Y}_B протилежні вказаним на рис. 8.

Таким чином сили динамічного тиску системи на підп'ятник та підшипник дорівнюють:

$$F_{Ax} = F_{Bx} = 0; \quad F_{Ay} = F_{By} = \frac{1}{2}M\omega^2 a; \quad F_{Az} = 0.$$

Задача 2. До вертикального вала AB , що обертається зі сталою кутовою швидкістю ω , жорстко прикріплені два невагомих стержні OE і OD , на кінцях яких містяться матеріальні точки масою m (рис. 9). Стержень OE утворює з валом кут φ , стержень OD перпендикулярний до площини, в якій розташовані вал AB та стержень OE . $OE = OD = l$, $AB = 2a$.

Визначити повні та додаткові динамічні реакції підп'ятника A і підшипника B , якщо $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$, $m = 4 \text{ кг}$, $l = 0,3 \text{ м}$, $a = 0,4 \text{ м}$, $\varphi = 30^\circ$. Вагою вала AB знехтувати.

Розв'язання

Для визначення сил динамічного тиску вала на підп'ятник A і підшипник B застосуємо метод кінетостатики.

Розглядаємо рух механічної системи, що включає вал AB , два невагомих стержні OE і OD , дві матеріальні точки, що містяться на кінцях невагомих стержнів. Спочатку визначимо повні реакції опор. Зв'яжемо жорстко з тілом рухому систему координат $Oxyz$.

На виділену механічну систему діють активні сили – сили ваги $m\bar{g}$ матеріальних точок, прикладених в точках D і E . В'язями для виділеної системи є підп'ятник A та циліндричний підшипник B , а реакціями в'язей – $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$. Активні сили і реакції в'язей вказано на рис. 9. Для складання рівнянь рівноваги до заданих активних сил та реакцій в'язей додамо сили інерції точок системи.

Визначаємо величини та напрями сил інерції.

Враховуємо, що за умови задачі вал AB та стержні OE і OD не мають маси (тобто безінерційні).

Зауважимо, що при сталій кутовій швидкості ω всі точки системи мають лише нормальні прискорення, які прямо пропорційні відстані точки від осі обертання. Той самий закон задовольняють і складові сил інерції.

Модулі сил інерції матеріальних точок: $F_D^I = ma_D$; $F_E^I = ma_E$.

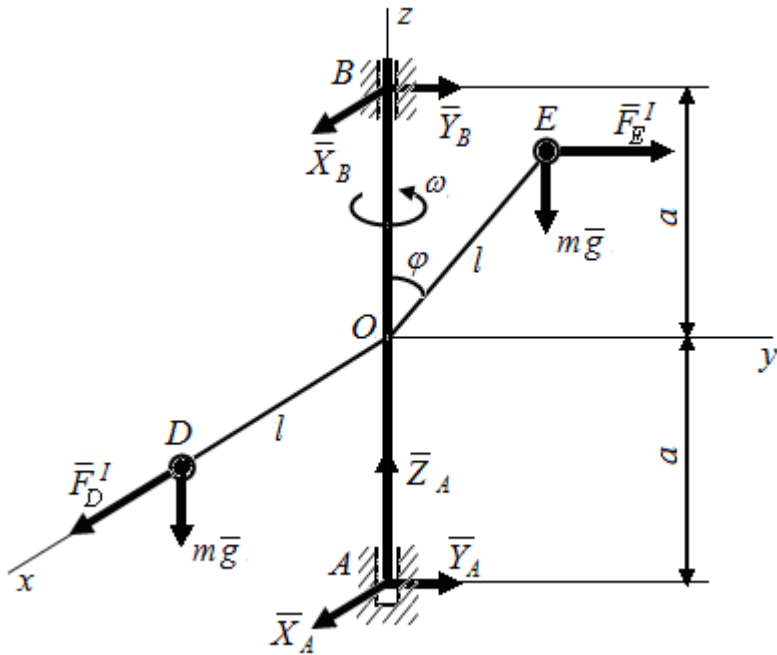


Рис. 9

Отже на виділену механічну систему діятиме система сил $m\bar{g}$, \bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{Z}_A , \bar{X}_B , \bar{Y}_B , \bar{F}_D^I , \bar{F}_E^I (рис. 9). На підставі принципу Д'Аламбера ці сили утворюють довільну просторову зрівноважену систему сил, для якої можна скласти рівняння рівноваги:

$$X_A + X_B + F_D^I = 0;$$

$$Y_A + Y_B + F_E^I = 0;$$

$$Z_A - 2 \cdot mg = 0;$$

$$-Y_B \cdot a + Y_A \cdot a - F_E^I \cdot l \cos \varphi - mg \cdot l \cdot \sin \varphi = 0;$$

$$X_B \cdot a - X_A \cdot a + mg \cdot l = 0;$$

Розв'язуючи отриману систему рівнянь і підставляючи значення сил інерції матеріальних точок дістанемо:

$$X_A = \frac{mgl}{2a} - \frac{m\omega^2 l}{2}; \quad Y_A = \frac{mgl \sin \varphi}{2a} + \frac{m\omega^2 l \sin \varphi (l \cos \varphi - a)}{2a}; \quad Z_A = 2mg;$$

$$X_B = -\frac{mgl}{2a} - \frac{m\omega^2 l}{2}; \quad Y_B = -\frac{mgl \sin \varphi}{2a} - \frac{m\omega^2 l \sin \varphi (a + l \cos \varphi)}{2a}.$$

При рівномірному обертанні вала $\varepsilon = 0$, $a^r = 0$, $\bar{a} = \bar{a}^n$, тоді $a_D = \omega^2 l$, $a_E = \omega^2 l \sin \varphi$.

За модулем сили інерції матеріальних точок дорівнюють: $F_D^I = m\omega^2 l$, $F_E^I = m\omega^2 l \sin \varphi$ і спрямовані у бік протилежний напрямку відповідного нормального прискорення.

Підставляємо чисельні значення всіх величин в отримані вирази і знаходимо повні реакції опор:

$$X_A = -45,3 \text{ H}; \quad Y_A = -3,165 \text{ H}; \quad Z_A = 78,4 \text{ H};$$

$$X_B = -74,7 \text{ H}; \quad Y_B = -56,835 \text{ H}.$$

Від'ємні знаки показують, відповідні реакції напрямлені протилежно до вказаних на рис. 9.

В спокої ($\omega = 0$) на кулі будуть діяти тільки сили їх ваги mg . Статичні реакції підшипників можна визначити зі складених рівнянь рівноваги, якщо прийняти $F_D^I = F_E^I = 0$. При обертанні вала виникнуть сили інерції, які приведуть до додаткового динамічного тиску вала на опори.

Для визначення додаткових динамічних реакцій підп'ятника A і підшипника B в отриманих рівняннях рівноваги покладемо $mg = 0$ і підставимо значення F_D^I, F_E^I . Тоді система рівнянь рівноваги набуває вигляду:

$$X_A^{\text{дин}} + X_B^{\text{дин}} + m\omega^2 l = 0;$$

$$Y_A^{\text{дин}} + Y_B^{\text{дин}} + m\omega^2 l \sin \varphi = 0;$$

$$Z_A^{\text{дин}} = 0;$$

$$-Y_B^{\text{дин}} \cdot a + Y_A^{\text{дин}} \cdot a - m\omega^2 l \sin \varphi \cdot l \cos \varphi = 0;$$

$$-X_A^{\text{дин}} \cdot a + X_B^{\text{дин}} \cdot a = 0.$$

Розв'язуючи отриману систему рівнянь дістанемо:

$$X_A^{\text{дин}} = -\frac{m\omega^2 l}{2}; \quad Y_A^{\text{дин}} = \frac{m\omega^2 l \sin \varphi (l \cos \varphi - a)}{2a}; \quad Z_A^{\text{дин}} = 0;$$

$$X_B^{\text{дин}} = -\frac{m\omega^2 l}{2}; \quad Y_B^{\text{дин}} = -\frac{m\omega^2 l \sin \varphi (a + l \cos \varphi)}{2a}.$$

Підставляємо чисельні значення всіх величин в отримані вирази і знаходимо додаткові динамічні реакції опор:

$$X_A^{\text{дин}} = -60 \text{ H}; \quad Y_A = -10,515 \text{ H}; \quad Z_A^{\text{дин}} = 0;$$

$$X_B^{\text{дин}} = -60 \text{ H}; \quad Y_B = -49,485 \text{ H}.$$

5. Лабораторна робота «Дослідження динамічних реакцій при обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі»

5.1. Будова та кінематична схема лабораторної установки

Основними елементами лабораторної установки є: ротор, фрикційний привід, диски, плита зі стійками (рис. 10).

Ротор являє собою вал 1, на якому вільно насаджено п'ять алюмінієвих дисків 2, відстань між якими 80 мм. Ступці дисків 3 жорстко фіксуються за допомогою гвинтів 4 і мають можливість встановлювати диски під необхідним кутом. Диски мають два пази: один для кріплення вантажів, інший – для зрівноважування диска. Пази розташовані під кутом 180° . На диску, поряд з пазом, прикручена шкала, що дозволяє встановити вантаж на потрібний радіус. Вал з дисками (ротор) змонтований на двох стійках. Лівий кінець валу закріплений в сферичному шарикопідшипнику, а правий кінець валу – в радіальному шарикопідшипнику, який вмонтований в каретці 6.

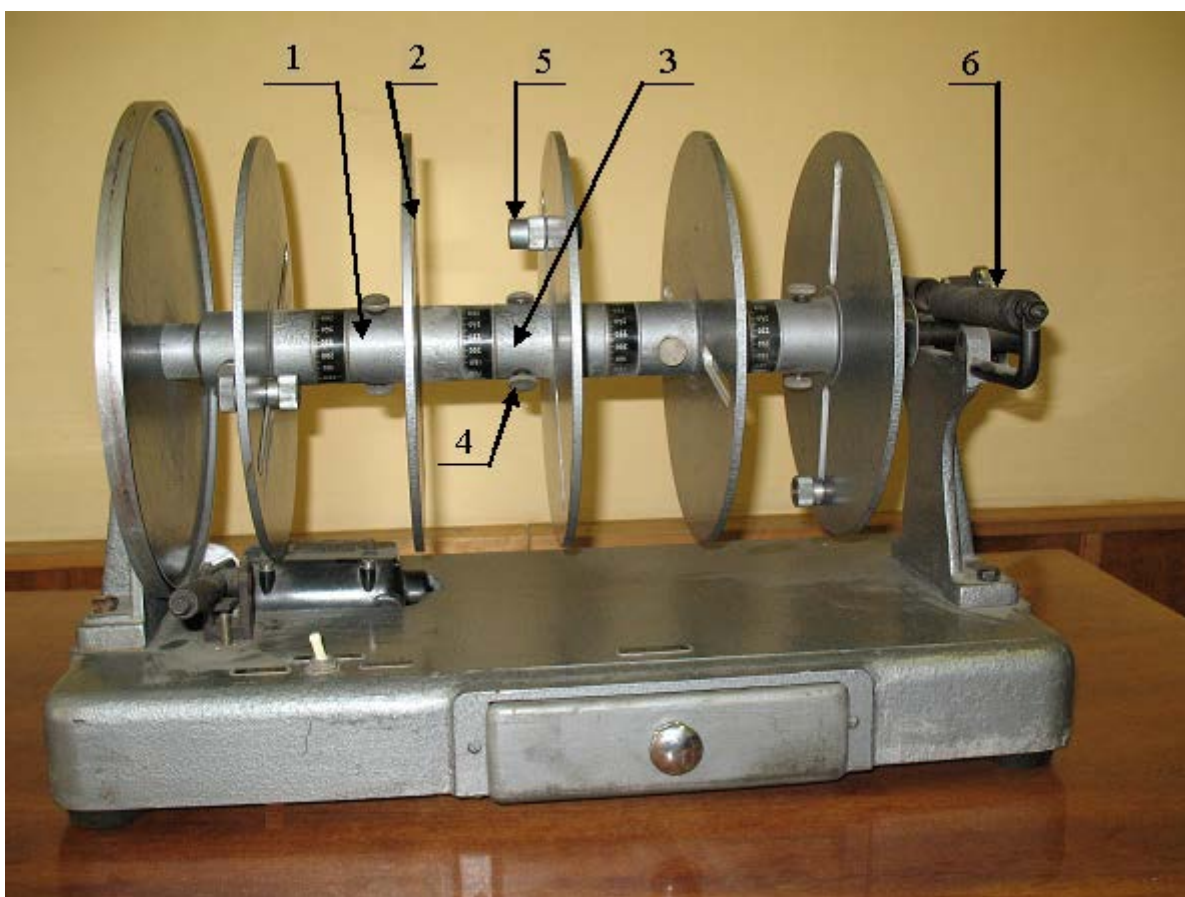


Рис. 10. Лабораторна установка

Каретка переміщується на роликах по напрямній в горизонтальній площині і утримується в центральному положенні за допомогою пружин розтягування 7 (рис. 11). Обертання ротора здійснюється від електродвигуна 8 за допомогою фрикційної передачі. Електродвигун змонтовано біля лівої стійки на важелі 9 (рис. 11). Під важелем встановлена пускова кнопка подвійної дії. Натисненням рукоятки важеля «вниз» фрикційний диск 10 притискається до шківів 11 і включається електродвигун, який розганяє ротор. При звільненні рукоятки, під дією ваги електродвигуна, фрикціон віджимається і електродвигун вимикається.

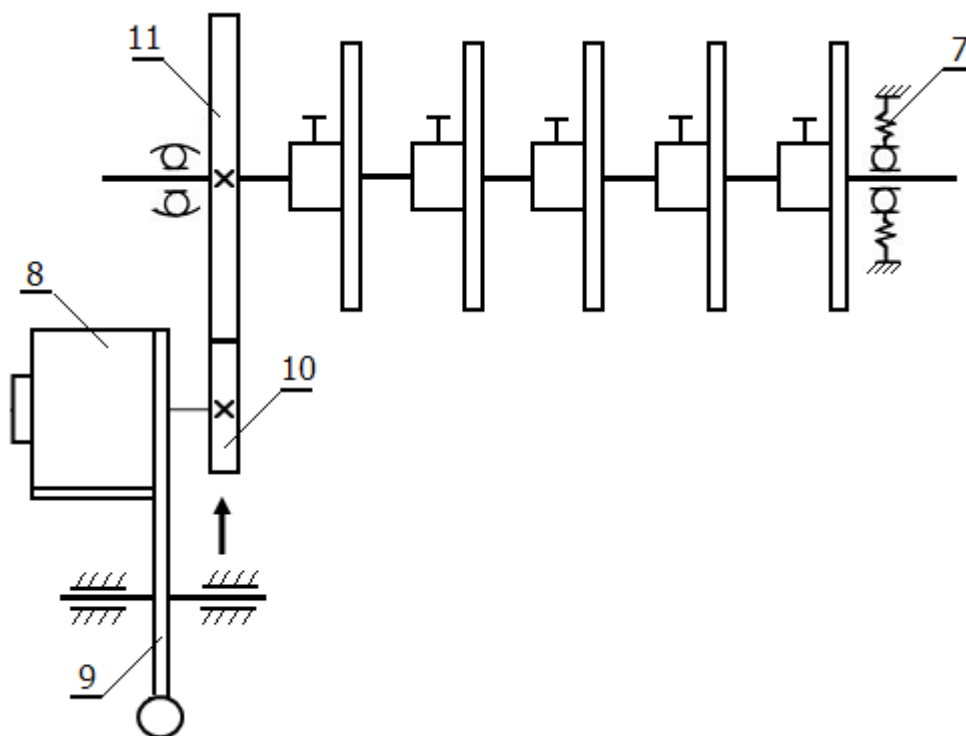


Рис. 11. Кінематична схема лабораторної установки

5.2. Методика проведення лабораторної роботи

Для моделювання дисбалансу системи встановимо вантаж дисбалансу на третьому диску на відстані від осі обертання $r_{\partial} = x_{\partial}$ (рис. 12 і 12, а).

В цьому випадку система буде статично і динамічно невірноважена. Статична невірноваженість обумовлена тим, що центр мас системи не знаходиться на осі обертання, тобто $\sum m_k x_k \neq 0, \sum m_k y_k \neq 0$. В цьому можна переконатися, так як в положенні, що наведене на рис. 12, а система нестійка. Координати центра мас системи дорівнюють $x_c = x_{\partial}, y_c = 0$. Динамічна невірноваженість обумовлена тим, що при обертанні системи навколо осі z на вісь тіла буде діяти сила інерції, модуль якої $F_{\partial}^I = m_{\partial} \omega^2 x_{\partial}$.

Для демонстрації динамічної невірноваженості вмикається електродвигун та приводиться до обертання вал з дисками. При цьому

підресорена опора буде здійснювати коливальний рух у вільному горизонтальному напрямку.

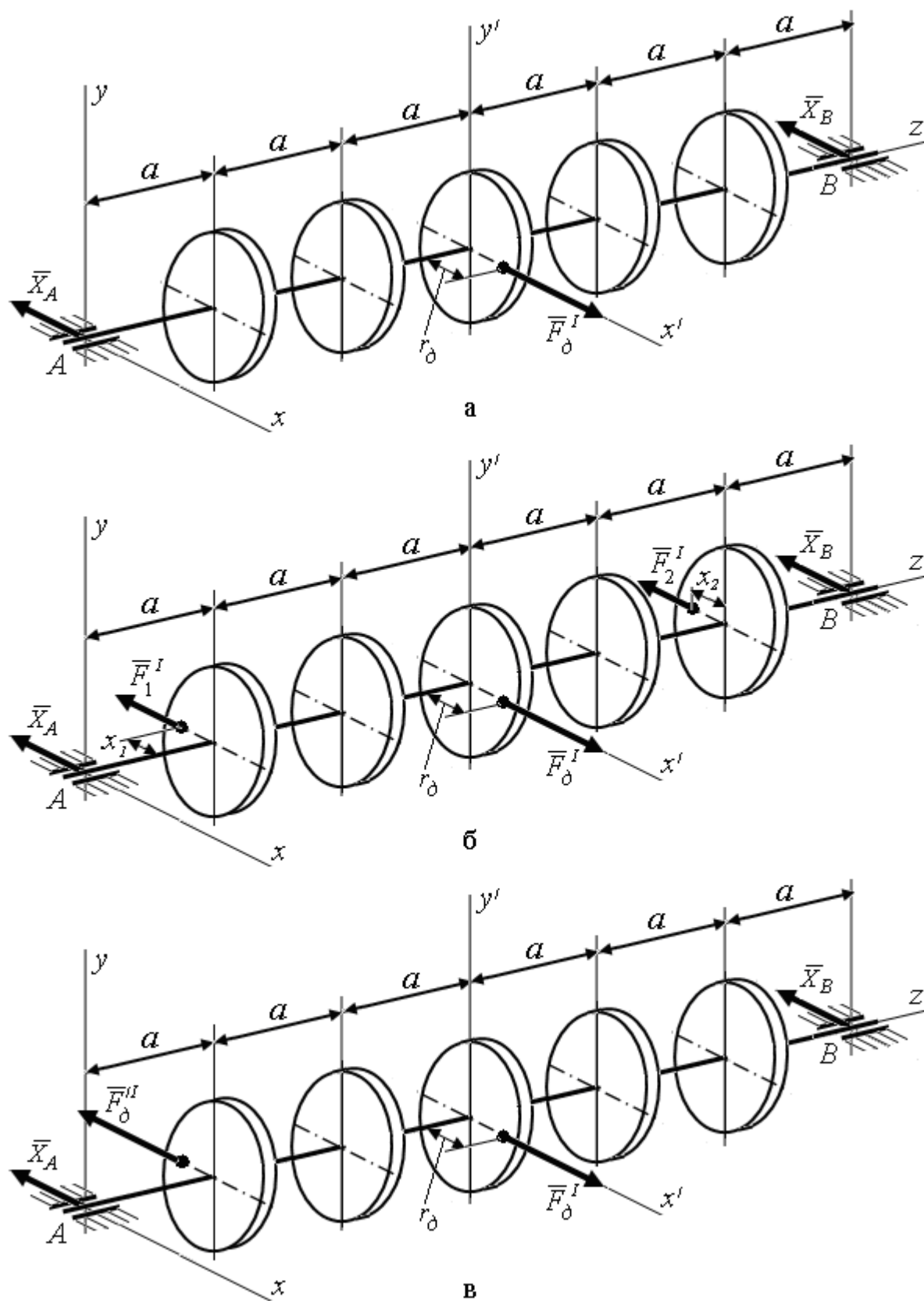


Рис. 12. Розрахункова схема лабораторної установки

Визначимо динамічні реакції підшипників \bar{X}_A, \bar{X}_B для випадку, коли вони абсолютну жорстко закріплені (на відміну від лабораторної установки). Розрахункова схема наведена на рис. 12, а, де динамічна сила $F_\partial^I = m_\partial \omega^2 r_\partial$ (r_∂ - радіус встановлення маси дисбалансу).

Відповідно до принципу Д'Аламбера запишемо рівняння рівноваги

$$\sum F_{kx} = F_\partial^I - X_A - X_B = 0,$$

$$\sum M_B(\bar{F}_k) = -X_A \cdot 6a + F_\partial^I \cdot 3a = 0.$$

Звідси

$$X_A = \frac{F_\partial^I}{2} = \frac{1}{2} m_\partial \omega^2 r_\partial, \quad X_B = F_\partial^I - X_A = \frac{1}{2} m_\partial \omega^2 r_\partial.$$

Динамічне зрівноваження мас полягає в створенні умов, при яких вісь обертання буде центральною і головною, тобто $x_c = y_c = 0$, $I_{xz} = I_{yz} = 0$. На практиці це можливо досягти додаванням до тіла двох точкових мас, вибираючи їх величин і місце розташування так, щоб виконувались ці умови.

Тобто, будь-яку вісь, що проведена в тілі, можна зробити головною центральною віссю інерції додаванням до тіла двох точкових мас.

Відповідно рівняння статичної і динамічної зрівноваженості матимуть вигляд

$$m_\partial x_\partial + m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0, \quad m_\partial y_\partial + m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0,$$

$$m_\partial x_\partial z_\partial + m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2 = 0, \quad m_\partial y_\partial z_\partial + m_1 y_1 z_1 + m_2 y_2 z_2 = 0.$$

Розглянемо випадок, коли урівноваження необхідно виконати за допомогою двох мас m_1 і m_2 ($m_1 < m_\partial, m_2 < m_\partial$). Тоді відповідно до розрахункової схеми (рис. 12, б) $y_\partial = 0$.

Розв'язуючи рівняння, визначаємо

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{m_\partial(z_1 - z_\partial)x_\partial}{m(z_1 - z_2)}, & y_2 &= 0, \\ x_1 &= -\frac{m_\partial x_\partial + m_2 x_2}{m_1}, & y_1 &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Для демонстрації урівноваження ротора установки візьмемо масу дисбалансу $m_{\partial} = 70\text{г}$ і встановимо його на третьому диску $z_{\partial} = 3a$ з координатами $x_{\partial} = 90\text{мм}$, $y_{\partial} = 0$. Виберемо одну масу противаги $m_1 = 40\text{г}$, а другу $m_2 = 50\text{г}$ і встановимо їх відповідно на першому і п'ятому дисках $z_1 = a$, $z_2 = 5a$. Потім за допомогою формул (12) визначимо їх координати: $x_1 = -78,7\text{мм}$ $x_2 = -63\text{мм}$ $y_1 = y_2 = 0$.

Переконаємося на підставі розрахунків і експерименту в тому, що в цьому випадку динамічні реакції опори дорівнюють нулю.

Динамічні реакції опор ротора визначаються з рівнянь рівноваги і розрахункової схеми (рис. 12, б).

Враховуючи, що $F_{\partial}^I = m_{\partial}\omega^2 r_{\partial}$, $F_1^I = m_1\omega^2 r_1$, $F_2^I = m_2\omega^2 r_2$, де $r_{\partial} = |x_{\partial}|$, $r_1 = |x_1|$, $r_2 = |x_2|$ – радіуси встановлення мас першої та другої противаги, дістанемо

$$\sum M_B(\bar{F}_k) = X_A \cdot 6a - m_1\omega^2 x_1 5a + m_{\partial}\omega^2 x_{\partial} 3a - m_2\omega^2 x_2 a = 0,$$

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = X_B \cdot 6a + m_2\omega^2 x_2 5a - m_{\partial}\omega^2 x_{\partial} 3a + m_1\omega^2 x_1 a = 0.$$

Звідси

$$X_A = \frac{\omega^2}{6} (3m_{\partial}x_{\partial} - 5m_1x_1 - m_2x_2) = \frac{\omega^2}{6} (3 \cdot 70 \cdot 90 - 5 \cdot 40 \cdot 78,75 - 50 \cdot 63) = 0,$$

$$X_B = \frac{\omega^2}{6} (3m_{\partial}x_{\partial} - 5m_2 - m_1x_1) = \frac{\omega^2}{6} (3 \cdot 70 \cdot 90 - 5 \cdot 50 \cdot 63 - 40 \cdot 78,75) = 0.$$

Таким чином, розрахунки підтверджують, що система статично та динамічно урівноважена.

Для експериментального підтвердження розрахункових даних встановимо маси – противаги, що отримали розрахунком. Надаючи системі обертання, переконуємося в динамічному балансуванні.

Одночасно переконуємося, що тільки статичне балансування не забезпечує динамічного балансування.

Розрахунком і експериментально неважко переконатися в тому, що для статичного балансування достатньо на будь-якому диску установити противагу масою $m'_{\partial} = m_{\partial}$ на радіусі $\bar{r} = -\bar{r}_{\partial}$.

Знімемо противаги m_1, m_2 і установимо противагу m'_{∂} , як показано на рис. 12, в.

Вимкненням електродвигуна приведемо до обертання вал з дисками, який будучи збалансований тільки статично буде «бити», тобто каретка на кінці вала буде здійснювати коливальний рух у вільному горизонтальному напрямку.

Дійсно, враховуючи, що $\bar{F}_O^I = -\bar{F}'_O^I$, з рівнянь рівноваги маємо (рис.12, в)

$$\sum F_{kx} = 0, \quad -X_A - X_B = 0.$$

$$\sum M_B(\bar{F}_k) = 0, \quad F_O^I \cdot 3a - F'_O^I \cdot 5a - X_A \cdot 6a = 0.$$

$$X_A = -\frac{1}{3}F_O^I, \quad X_B = \frac{1}{3}F_O^I.$$

5.3 Питання до захисту лабораторної роботи

1. Сформулюйте принцип Д'Аламбера для матеріальної точки.
2. Сформулюйте принцип Д'Аламбера для механічної системи матеріальних точок.
3. За якими формулами визначаються головний вектор і головний момент сил інерції механічної системи?
4. Чому дорівнюють головний вектор і головний момент сил інерції твердого тіла, що здійснює поступальний рух?
5. Чому дорівнюють головний вектор і головний момент сил інерції твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, яка проходить через мас тіла і є головною центральною віссю інерції?
6. Чому дорівнюють головний вектор і головний момент сил інерції твердого тіла відносно центра мас при плоскопаралельному русі тіла?
7. Записати рівняння для визначення динамічних реакцій опор нерухомої осі твердого тіла, що обертається навколо цієї осі.
8. Яке тіло називають статично зрівноваженим?
9. Яке тіло називають динамічно зрівноваженим?
10. За якої умови не виникають динамічні реакції опор нерухомої осі твердого тіла при його обертанні навколо цієї осі?

6. Індивідуальне завдання ДД-4 «Визначення реакцій в опорах нерухомої осі тіла, що обертається навколо цієї осі»

До вала AB , що обертається з постійною кутовою швидкістю ω , жорстко закріплені невагомий стержень 1 довжини l_1 , на кінці якого розміщена кулька маси m_1 , та однорідний прямолінійний стержень 2 довжини l_2 і маси m_2 (рис. 13). Використовуючи метод кінетостатики знайти повні і додаткові динамічні реакції в підшипниках A та B . Кульку вважати матеріальною точкою, вагою вала AB знехтувати, $AB = L = 1,2$ м. Необхідні для розв'язання задач дані наведені в таблиці 1.

Таблиця 1 – Вихідні дані до індивідуальних завдань*

№ варіанта	$m_1, кг$	$m_2, кг$	$l_1, м$	$l_2, м$	$\omega, с^{-1}$	$\alpha, ^\circ$	$\beta, ^\circ$	$a, м$	$b, м$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	20	10	0,3	0,3	$6,2\pi$	90	30	0,3	0,6
2	25	15	0,4	0,8	$6,4\pi$	45	30	0,2	0,5
3	18	16	0,3	0,4	$6,8\pi$	40	20	0,4	0,5
4	15	18	0,2	0,3	$7,2\pi$	25	90	0,3	0,8
5	20	8	0,3	0,2	$7,6\pi$	40	30	0,5	0,8
6	7	10	0,25	0,3	8π	60	30	0,25	0,6
7	6	8	0,35	0,4	$8,4\pi$	35	45	0,4	0,8
8	5	7	0,2	0,4	$8,8\pi$	90	40	0,8	0,4
9	7	10	0,3	0,4	$9,2\pi$	25	35	0,15	0,7
10	12	8	0,2	0,3	$9,6\pi$	90	70	0,3	0,6
11	9	7	0,4	0,2	10π	40	75	0,4	0,7
12	10	12	0,5	0,4	$9,2\pi$	90	65	0,2	0,6
13	5	8	0,3	0,25	$9,4\pi$	90	30	0,5	0,8
14	6	10	0,4	0,3	$9,6\pi$	20	35	0,3	0,6
15	4	6	0,35	0,4	9π	30	90	0,8	0,6
16	3	5	0,15	0,3	8π	30	60	0,4	0,7
17	5	8	0,35	0,4	$8,6\pi$	30	90	0,5	0,8
18	12	3	0,6	0,2	$8,2\pi$	90	30	0,8	0,5
19	6	7	0,15	0,5	$8,4\pi$	90	60	0,7	0,2
20	3	6	0,2	0,3	$7,8\pi$	90	70	0,6	0,2
21	2	4	0,3	0,4	$7,4\pi$	28	90	0,8	0,4
22	3	4	0,4	0,4	$7,2\pi$	44	90	0,25	0,6
23	2	3	0,5	0,4	8π	40	90	0,3	-
24	1,5	4	0,3	0,2	19π	30	70	0,5	-

* Примітка.

Стержень 1 в схемах 1 – 12, 15 знаходиться в площині yAz ; в схемах 13, 14, 16, 17, 21 – в площині xAz ; в схемах 18 – 20, 22 – 24 – в площині xAy .

Стержень 2 в схемах 1 – 14, 16, 19, 20, 22 знаходиться в площині yAz ; в схемах 15, 18 – в площині xAz ; в схемах 17, 21, 23, 24 – в площині xAy .

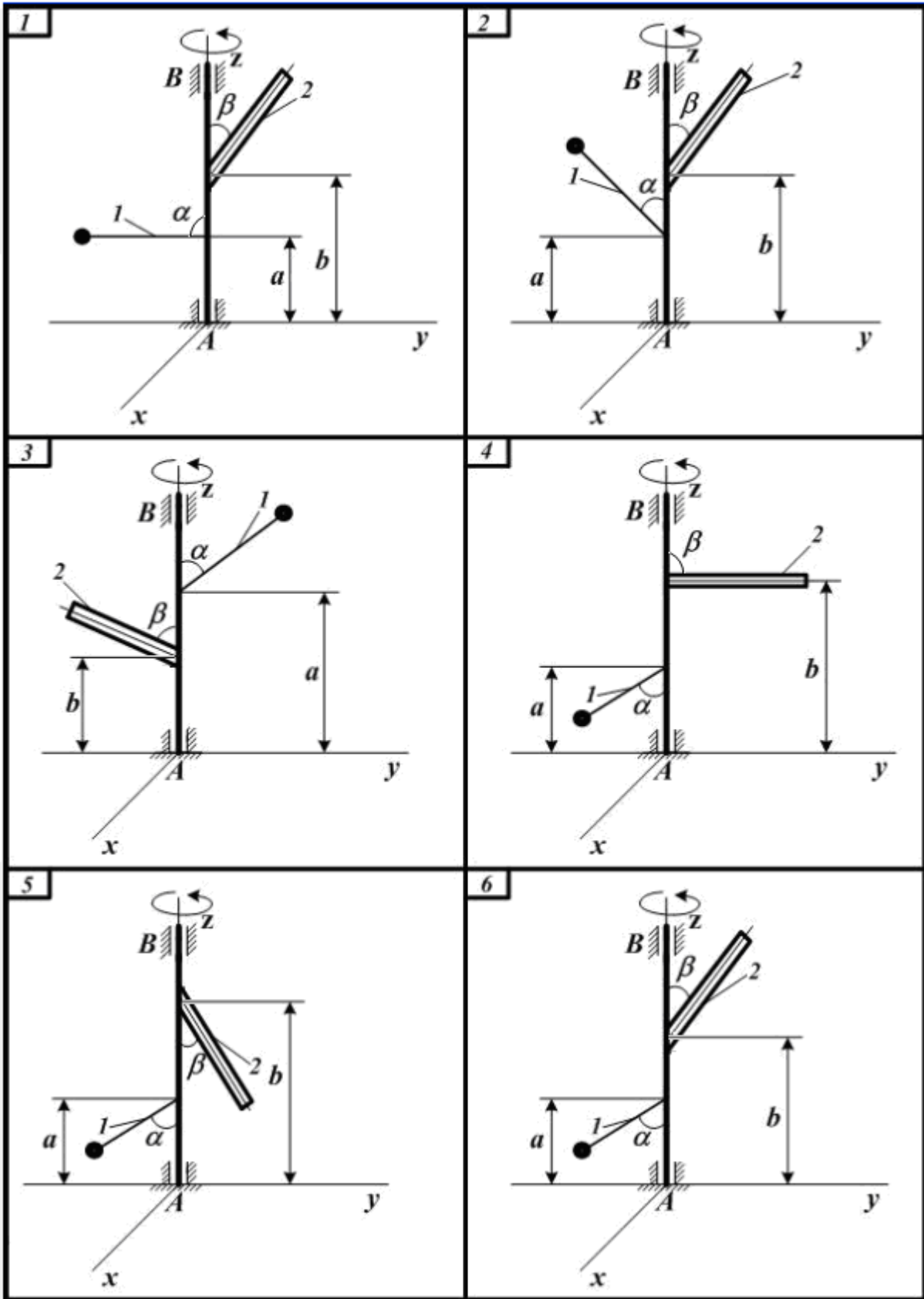


Рис. 13. Розрахункові схеми

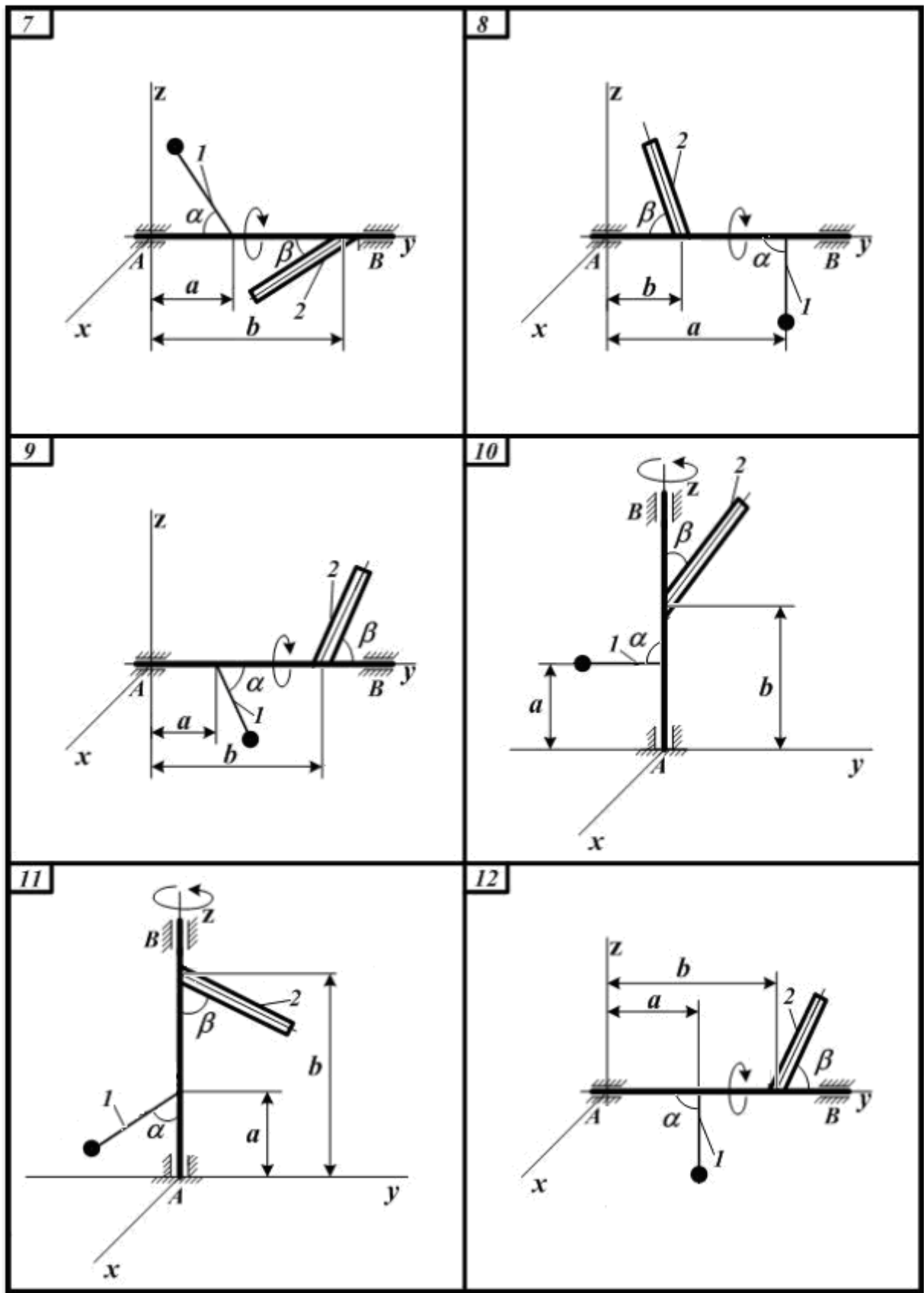


Рис. 13. Розрахункові схеми (продовження)

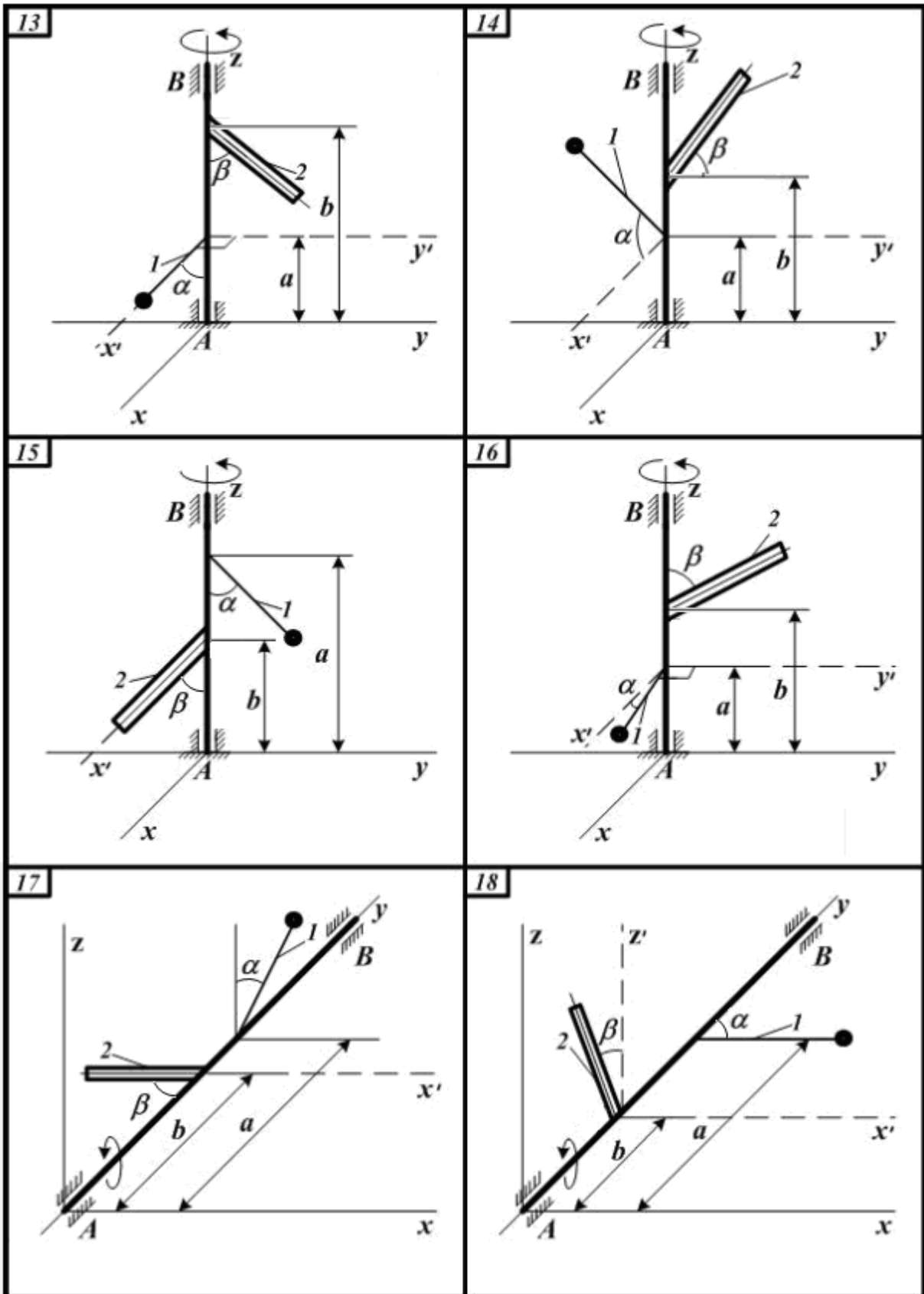


Рис. 13. Розрахункові схеми (продовження)

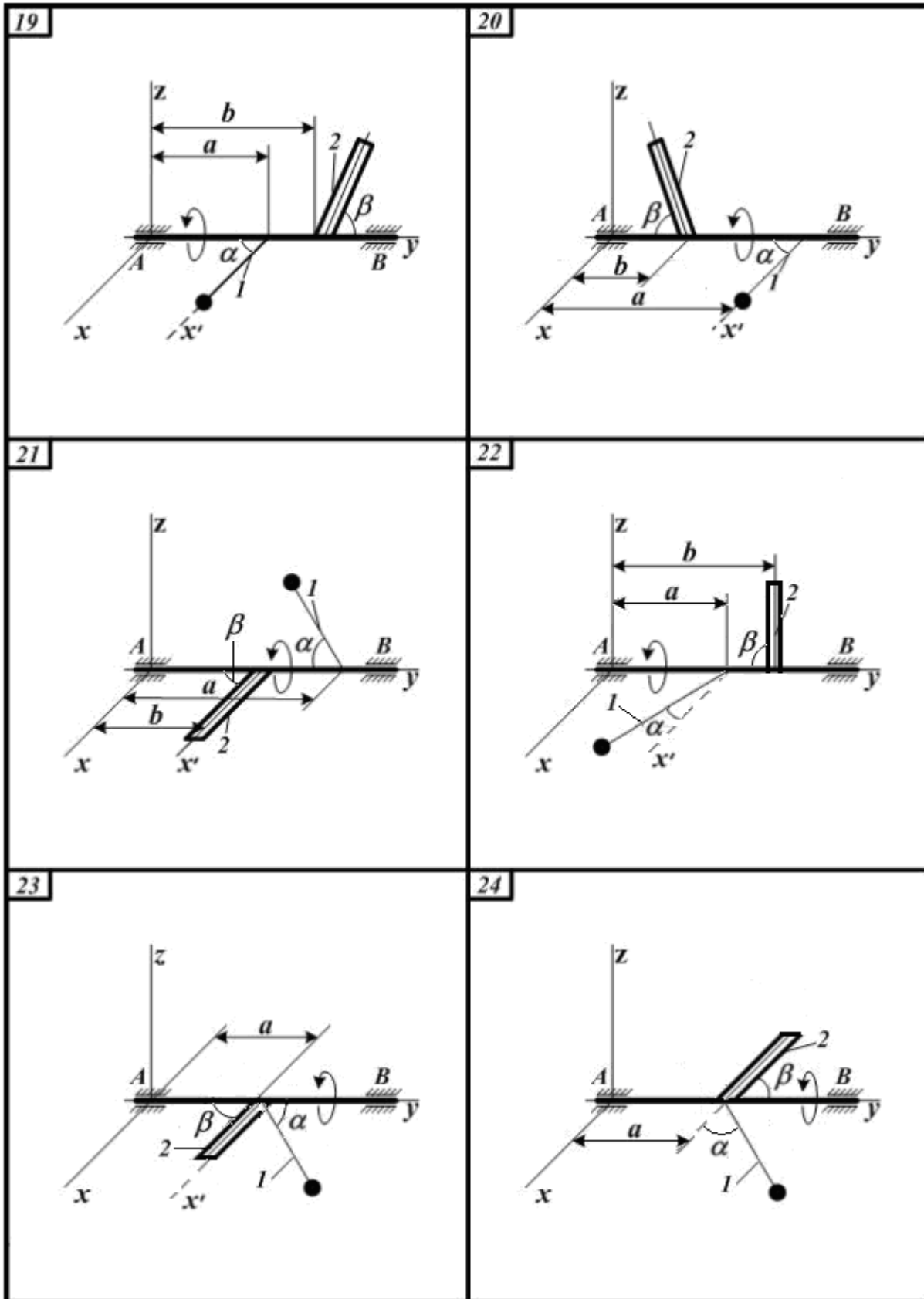


Рис. 13. Розрахункові схеми (продовження)

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бондаренко А.А., Дубінін О.О., Переяславцев О.М. Теоретична механіка: Підручник: У 2 ч. – Ч.1: Статика. Кінематика. – К.: Знання, 2004. – 599 с.
2. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики: В 2 т. – М.: Наука, 1976-1979. – Т. 1. – 240 с.; Т. 2. – 461 с.
3. Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1980. – 446 с.
4. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1990. – 607 с.
5. Павловський М.А. Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
6. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учеб. пособие для техн. вузов / Яблонский А.А., Норейко С.С., Вольфсон С.А. и др.; Под ред. А.А. Яблонского. – М.: Высш. шк., 1985. – 367 с.
7. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 1986. – 416 с.
8. Теоретична механіка: Збірник задач / О.С. Апостолюк, В.М. Воробйов, Д.І. Ільчишина та ін.; За ред. М.А. Павловського. – К.: Техніка, 2007. – 400 с.
9. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: В 2 т. – М.: Высш. шк., 1977. – Т. 1. – 431 с.; Т. 2. – 532 с.
10. Ишлинский А. Ю. Классическая механика и силы инерции. – М.: Наука, 1987. – 320 с.

