

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ХІМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ
ДЛЯ СТУДЕНТІВ МЕХАНІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ
ЧАСТИНА II
КІНЕМАТИКА ТОЧКИ І ТВЕРДОГО ТІЛА

Затверджено на засіданні
кафедри матеріалознавства
Протокол № 12 від 13.06.2014

Конспект лекцій з теоретичної механіки для студентів механічних спеціальностей. Частина II. Кінематика точки і твердого тіла / Укл. Виноградов Б.В. – Д.: ДВНЗ УДХТУ, 2015. – 64 с.

Укладач Б.В. Виноградов, д-р техн. наук

Відповідальний за випуск О.Б. Гірін, д-р техн. наук

Навчальне видання

Конспект лекцій
з теоретичної механіки для студентів механічних спеціальностей
Частина II. Кінематика точки і твердого тіла

Укладач ВІНОГРАДОВ Борис Володимирович

Редактор Л.М. Тонкошкур
Коректор В.П. Синицька

Підписано до друку 16.04.15. Формат 60×84 1/16. Папір ксерокс. Друк різнограф.
Умов. друк. арк. 2,91. Обл.-вид. арк. 2,99. Тираж 100 прим. Зам. № 111.
Свідоцтво ДК № 303 від 27.12.2000.

ДВНЗ УДХТУ, 49005, м. Дніпропетровськ, 5, просп. Гагаріна, 8

Видавничо-поліграфічний комплекс ІнКомЦентру

ЗМІСТ

ЛЕКЦІЯ 8	4
Розділ 8. Кінематика точки	4
8.1 Способи задання руху точки. Траєкторія	4
8.1.1 Натуральний спосіб задання руху.	4
8.1.2 Координатний спосіб задання руху	5
8.1.3 Векторний спосіб задання руху	6
8.2 Вектор швидкості точки	7
8.3 Визначення швидкості при координатному способі задання руху	8
8.4 Визначення швидкості точки при натуральному способі задання руху	9
ЛЕКЦІЯ 9	12
9.5 Вектор прискорення точки	12
8.6 Визначення прискорення при координатному способі задання руху	13
8.7 Визначення прискорення точки при натуральному способі задання руху. Дотичне і нормальне прискорення	14
8.8 Окремі випадки руху точки	16
8.8.1 Прямолінійний рух	16
8.8.2 Рівномірний криволінійний рух	17
8.8.3 Рівномірний прямолінійний рух	17
8.8.4 Рівнозмінний рух	17
ЛЕКЦІЯ 10	23
Розділ 9. Поступальний і обертальний рух твердого тіла	23
9.1 Поступальний рух	23
9.2 Обертальний рух твердого тіла. Кутова швидкість і кутове прискорення	24
9.3 Рівномірне і рівнозмінне обертання	26
9.4 Швидкість і прискорення точок тіла при обертальному русі	27
ЛЕКЦІЯ 11	32
Розділ 10. Плоскопаралельний рух твердого тіла	32
10.1 Рівняння плоскопаралельного руху	32
10.2 Визначення швидкостей точок тіла	33
10.3 Теорема про проекції швидкості двох точок тіла	34
10.4 Визначення швидкості точок тіла за допомогою миттєвого центру швидкостей	35
10.5 Визначення прискорення точок тіла	37
10.6 Миттєвий центр прискорень	39
ЛЕКЦІЯ 12	48
Розділ 11. Рух твердого тіла навколо нерухомої точки і рух вільного твердого тіла	48
11.1 Рух твердого тіла, що має одну нерухому точку	48
11.2 Швидкість і прискорення точок тіла	49
11.3 Похідні від одиничних векторів рухомих осей	50
11.4 Загальний випадок руху вільного твердого тіла	51
ЛЕКЦІЯ 13	55
Розділ 12. Складний рух точки	55
12.1 Відносний, переносний та абсолютний рух	55
12.2 Абсолютна та відносна похідні від вектора. Формула Бура	56
12.3 Додавання швидкостей	57
12.4 Додавання прискорень точки	59
12.4.1 Обчислювання відносного, переносного та Коріолісового прискорення	59
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	64

ЛЕКЦІЯ 8

Розділ 8. Кінематика точки

Кінематикою називається частина механіки, в якій вивчаються геометричні властивості руху тіл без з'ясування причин, що його викликає.

Основне завдання кінематики полягає в тому, щоб, знаючи закон руху даного тіла, визначити необхідні кінематичні величини (швидкість, прискорення, траєкторію), що характеризують рух тіла.

Таким чином, для визначення кінематичних величин, необхідно знати закон руху тіла.

8.1 Способи задання руху точки. Траєкторія

Щоб задати рух точки, необхідно знати її положення відносно до вибраної системи відліку в будь-який момент часу. Для задання руху точки можна застосувати один із трьох способів: натуральний, координатний, векторний.

8.1.1 Натуральний спосіб задання руху

Неперервна лінія, яку описує точка при русі відносно заданої системи відліку, називається траєкторією точки. Якщо траєкторією є пряма лінія рух називається прямолінійним, а якщо крива – криволінійним.

Натуральним засобом задання руху точки зручно користуватися у тих випадках, коли траєкторія її руху наперед відома. Нехай точка M рухається відносно системи відліку $O_1x_1y_1z_1$ уздовж якоїсь траєкторії AB (рис. 8.1).

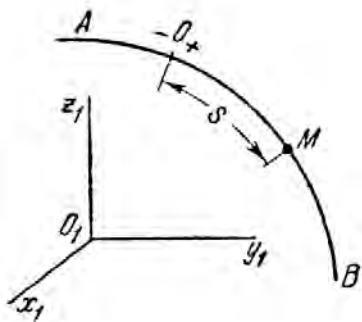


Рис. 8.1

Виберемо на цій траєкторії яку-небудь нерухому точку O , яку приймемо за початок відліку. Розглянемо траєкторію як криволінійну координатну вісь і позначимо на ній додатний і від'ємний напрямки, як на звичайній координатній осі. Положення точки M на координатній осі буде однозначно визначатися криволінійною координатою S , яка дорівнює відстані від точки O до точки M , виміряній уздовж дуги траєкторії і взятій з відповідним знаком. При русі

точка M буде переміщуватися в положення $\tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \dots$, отож відстань s буде з часом змінюватися. Для того, щоб знати положення точки M на траєкторії у будь-який момент часу необхідно знати залежність:

$$s = f(t). \quad (8.1)$$

Рівняння (8.1) і виражає закон руху точки M уздовж траєкторії. Таким чином, щоб задати рух точки натуральним способом, необхідно задати: 1) траєкторію точки; 2) початок відліку на траєкторії та указати додатний і від'ємний напрямки відліку; 3) закон руху точки уздовж траєкторії у вигляді $S=f(t)$.

Наприклад, якщо точка рухається із початку відріку O уздовж якої-небудь кривої так, що її відстань від цього початку збільшується пропорційно квадрату часу, то закон руху точки буде:

$$s = at^2.$$

Це рівняння дозволяє визначити положення точки на траєкторії в будь-який момент часу. Наприклад при $t=2c$, $S=4a$ та ін.

Треба визначити, що величина S у рівнянні (8.1) визначає положення точки при русі, а не пройдений шлях. Наприклад, точка, рухаючись із точки O , через деякий час знову може прийти у ту ж саму точку. При цьому $S=0$, а пройдений шлях може бути яким завгодно великим.

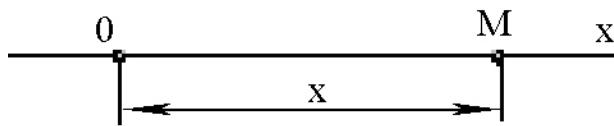


Рис. 8.2

У випадку прямолінійного руху, якщо спрямувати вісь Ox уздовж траєкторії точки (рис. 8.2), будемо мати $S=x$, і закон прямолінійного руху буде:

$$x = f(t). \quad (8.3)$$

8.1.2 Координатний спосіб задання руху

Положення точки відносно до заданої системи відліку $Oxyz$ можна визначити її декартовими координатами x, y, z (рис. 8.3). При русі усі ці три координати будуть змінюватися з часом. Щоб знати закон руху точки, тобто її положення у просторі в будь-який момент часу, необхідно знати значення координат точки для кожного моменту часу:

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t). \quad (8.4)$$

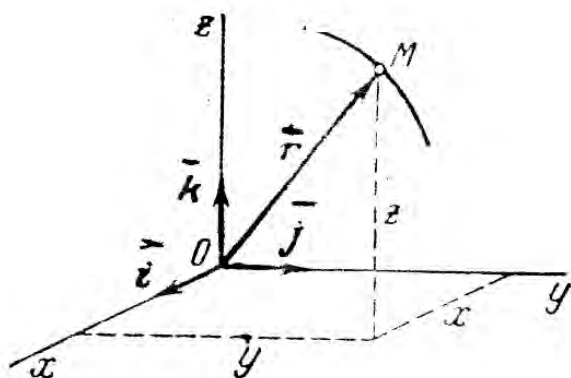


Рис. 8.3

Рівняння (8.4) являє собою рівняння руху точки у декартових прямокутних координатах. Вони визначають закон руху точки при координатному способі задання руху.

Якщо рух точки весь час здійснюється в одній площині Oxy , то ми маємо два рівняння руху:

$$x = f_1(t), y = f_2(t).$$

Нарешті при прямолінійному русі точки він буде описуватися рівнянням (8.3), тобто у цьому випадку натуральний і координатний способи задання руху співпадають.

Приклад. Нехай рух точки у площині Оху заданий рівняннями:

$$x=2t, y=12t^2. \quad (a)$$

За цими рівняннями можна визначити положення точки у будь-який момент часу, а отже, і її траєкторією.

Цю траєкторію можна знайти іншим способом, якщо вилучити t із рівнянь (а). Для цього з першого рівняння (а) визначаємо $t=x/2$ і підставимо це значення в друге рівняння. Отримуємо $y=3x^2$. Таким чином траєкторія точки є парабола з вершиною на початку координат і віссю, паралельною осі Оу.

Покажемо, що від координатного способу задання руху точки можна перейти до натурального. Відомо, що $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$ або $ds^2=(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)dt^2$, де $\dot{x} = dx / dt$. Звідси маємо:

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt. \quad (8.5)$$

8.1.3 Векторний спосіб задання руху

Нехай точка М рухається відносно до якої-небудь системи відліку Охуz. Положення цієї точки в будь-який момент часу можна визначити, якщо задати вектор $\vec{r}$, проведений із початку координат О у точку М (рис. 8.3). Вектор $\vec{r}$ називається радіус-вектором точки М.

При русі точки М вектор $\vec{r}$ буде з часом змінюватися, як за модулем, так і за напрямком, тобто

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (8.6)$$

Рівність (8.6) визначає закон криволінійного руху точки у векторній формі, так як вона дозволяє в будь-який момент часу t побудувати відповідний вектор $\vec{r}$ і знайти положення точки, що рухається.

Встановимо зв'язок між координатним і векторним способами задання руху. Введемо одиничні вектори осей $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, тобто вектори, які дорівнюють одиниці і направлені відповідно уздовж осей x, y і z (рис. 8.3). тоді, враховуючи, що $r_x=x, r_y=y, r_z=z$, маємо:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (8.7)$$

Наприклад, якщо рух точки у площині Оху задано координатним способом за допомогою рівнянь $x=2t, y=12t^2$, то векторне рівняння (8.4) в цьому випадку буде:

$$\vec{r} = 2t\vec{i} + 12t^2\vec{j}.$$

8.2 Вектор швидкості точки

Однією з основних кінематичних характеристик руху точки є величина, що характеризує зміну *переміщення* за часом. Ця кінематична величина називається швидкістю. Оскільки переміщення змінюється з часом за модулем і напрямком, то швидкість є векторною величиною. Спочатку введемо поняття середньої швидкості точки за який-небудь проміжок часу. Нехай точка, що рухається, в момент часу t знаходиться в положенні M , якому відповідає радіус-вектор $\vec{r}$, а в момент t_1 переходить у положення M_1 , що визначається радіус-вектором $\vec{r}_1$ (рис. 8.4).

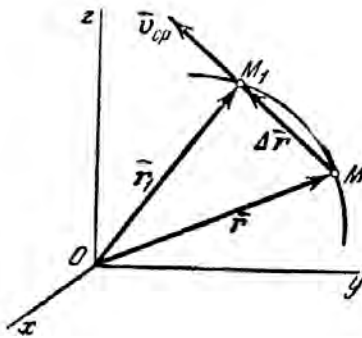


Рис. 8.4

Тоді переміщення точки M за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ визначається вектором $\overline{MM_1}$. Цей вектор спрямований по хорді, якщо точка рухається по криволінійній траєкторії, або уздовж самої траєкторії, якщо рух точки є прямолінійним. З трикутника OMM_1 бачимо, що $\vec{r} + \overline{MM_1} = \vec{r}_1$, звідси:

$$\overline{MM_1} = \vec{r}_1 - \vec{r} = \Delta \vec{r}.$$

Відношення вектора переміщення точки до відповідного проміжку часу дає векторну величину, яка називається середньою швидкістю:

$$\vec{v}_{\text{сеп.}} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (8.8)$$

Модуль середньої швидкості, що визначається формулою (8.8), дорівнює

$$v_{\text{сеп.}} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}.$$

Спрямований вектор $\vec{v}_{\text{сеп.}}$ так само, як і вектор $\overline{MM_1}$. Очевидно, що чим меншим є проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$, тим точніше $\vec{v}_{\text{сеп.}}$ характеризує рух точки. Щоб отримати характеристику руху, незалежну від проміжку часу Δt , введемо поняття про швидкість точки в даний момент часу.

Швидкістю точки в даний момент часу t називається величина $\vec{v}$, до якої прямує середня швидкість $\vec{v}_{\text{сеп.}}$, коли проміжок часу Δt прямує до нуля:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{v}_{\text{сеп.}}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Границя відношення $\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$ при $\Delta t \rightarrow 0$ являє собою першу похідну від вектора $\bar{r}$ по аргументу t . Таким чином:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \quad (8.9)$$

Вектор швидкості в заданий момент часу дорівнює першій похідній від радіуса-вектора точки з часом.

Так як граничним напрямком січної MM_1 є дотична, то вектор швидкості точки в даний момент часу спрямований по дотичній до траєкторії точки в бік руху. При прямолінійному русі вектор швидкості $\bar{v}$ весь час спрямований уздовж прямої, по якій рухається точка. Розмірність швидкості – відстань/час, тобто м/с або км/ч.

8.3 Визначення швидкості при координатному способі задання руху

Розкладемо радіус-вектор і вектор швидкості на складові, паралельні осям координат:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \quad \bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}, \quad (8.10)$$

де v_x, v_y, v_z – проекції вектора швидкості на осі координат.

Відповідно до визначення швидкості:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}, \quad (8.11)$$

де

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad \dot{z} = \frac{dz}{dt}.$$

Порівнюючи формули (8.10) і (8.11), отримуємо такі формули проекцій швидкості на осі координат:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (8.12)$$

Тобто, проекція швидкості точки на будь-яку координатну вісь дорівнює першій похідній за часом від відповідної координати цієї точки..

За проекціями визначають числове значення швидкості і косинуси кутів вектора швидкості з осями координат:

$$v = |\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

$$\cos(\bar{v}, \wedge x) = \frac{v_x}{v}, \cos(\bar{v}, \wedge y) = \frac{v_y}{v}, \cos(\bar{v}, \wedge z) = \frac{v_z}{v}. \quad (8.13)$$

Якщо точка рухається в площині, то після вибору осей координат Ox і Oy у цієї площині, отримаємо

$$v = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j}, v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2},$$

$$\cos(\bar{v}, \wedge x) = \frac{\dot{x}}{v}, \cos(\bar{v}, \wedge y) = \frac{\dot{y}}{v}.$$

Для прямолінійного руху уздовж, наприклад, осі Ox , проекція швидкості та її модуль визначаються за формулами:

$$v_x = \dot{x}, \quad v = |\dot{x}|.$$

8.4 Визначення швидкості точки при натуральному способі задання руху

Нехай задана траєкторія точки та закон руху по цій траєкторії у вигляді:

$$S = f(t).$$

Припустимо, що за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ точка проходить із положення M у положення M_1 , здійснюючи уздовж траєкторії переміщення $\Delta s = s_1 - s$ (рис. 8.5).

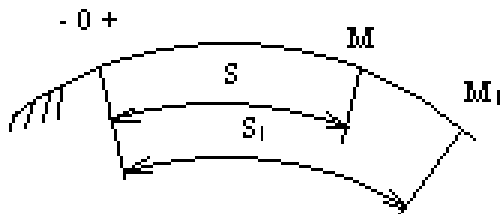


Рис. 8.5

Тоді чисельна величина середньої швидкості буде дорівнювати:

$$\Delta v_{cp.} = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (8.14)$$

Перейдемо до границі і знайдемо швидкість точки у заданий момент часу t :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{або} \quad v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}. \quad (8.15)$$

Таким чином, *чисельна величина швидкості точки в даний момент часу дорівнює першій похідній від відстані (криволінійної координати) s точки за часом.*

Знак чисельної (алгебраїчної) величини швидкості v співпадає зі знаком Δs , оскільки завжди $\Delta t > 0$. Тоді, якщо $v > 0$, то вектор швидкості $\bar{v}$ спрямований в додатному напрямку відліку відстані S .

Приклад. За даними рівняннями руху точки знайти рівняння її траєкторії в координатній формі, показати на рисунку напрямок руху, а також визначити закон руху точки по траєкторії, відраховуючи відстань від початкового положення точки.

$$\begin{cases} x = 3t - 5; \\ y = 4 - 2t. \end{cases}$$

У рівняннях x , y вимірюються в сантиметрах, t – в секундах.

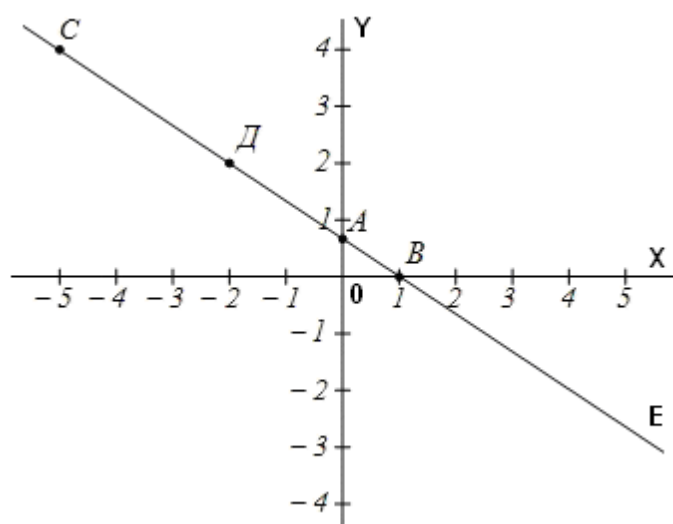


Рис. 8.6

Розв'язок. Вибираємо систему координат з початком в точці O (рис. 8.6).

Рівняння траєкторії в координатній формі отримаємо шляхом вилучення часу із обох рівнянь руху. Для цього спочатку помножимо перше рівняння на 2, а друге на 3, а потім отримані рівняння додамо:

$$\begin{array}{r} 2x = 6t - 10 \\ + \quad 3y = -6t + 12 \\ \hline 2x + 3y = 2. \end{array}$$

Отже рівняння траєкторії – рівняння прямої лінії.

Для побудови прямої спочатку визначимо координати двох точок A і B з урахуванням того, що при $x = 0$ $y = \frac{2}{3}$ см, а при $y = 0$ $x = 1$ см. Потім на кресленні (рис. 8.6) вказуємо ці точки ($A(0, \frac{2}{3})$ і $B(1, 0)$) і через них проводимо пряму.

Але не вся нескінченна пряма являтиме траєкторію точки M . Обчислимо положення точки в початковий момент при $t = 0$. Підставляємо це значення часу в рівняння руху і знаходимо координати початкового положення точки: $x_0 = -5$ см, $y_0 = 4$ см. Отже точка починає рухатися із точки $C(-5; 4)$. Із рівнянь руху випливає, що із зростанням часу координата x буде збільшуватися, а y – зменшуватися. Наприклад, при $t = 1$ с координати точки дорівнюватимуть: $x = -2$ см, $y = 2$ см. Знаходимо цю точку на траєкторії і позначимо її літерою D (рис. 8.6).

Таким чином, траєкторією точки буде напівпряма CDE . Інша частина прямої не являтиме траєкторію точки.

Для знаходження закону руху точки застосуємо залежність між координатним і натуральним способами задання руху:

$$S = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt.$$

Обчислимо похідні: $\dot{x} = 3$, $\dot{y} = -2$, тоді

$$S = \int_0^t \sqrt{3^2 + (-2)^2} dt = \sqrt{13} \cdot t.$$

Отже, закон руху точки має вигляд:

$$S = \sqrt{13} \cdot t.$$

Відповідь: траєкторія точки M – напівпряма $2x + 3y - 2 = 0$ з початком в точці $x = -5$ см; $y = 4$ см; – закон руху точки $s = \sqrt{13} \cdot t$.

Питання для самоконтролю (Лекція 8)

1. Які існують способи задання руху?
2. Що треба знати для того, щоб задати рух натуральним способом?
3. Що відомо при координатному та векторному способах задання руху?
4. За якими формулами можна перейти від координатного до натурального та векторного способів задання руху?
5. Що характеризує вектор швидкості?
6. За якими формулами визначається вектор швидкості в даний момент часу і його проекції на осі координат?
7. Як визначити модуль та напрямлення вектора швидкості при координатному способі задання руху?
8. Як визначити модуль та напрямлення вектора швидкості при натуральному способі задання руху?

ЛЕКЦІЯ 9

8.5 Вектор прискорення точки

Прискоренням точки називається векторна величина, що характеризує змінювання з часом модуля і напрямку швидкості точки.

Нехай у деякий момент часу t точка, що рухається, знаходиться у положенні M і має швидкість $\vec{v}$, а в момент t_1 приходить в положення M_1 і має швидкість $\vec{v}_1$ (рис. 8.7). Тоді, за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ швидкість точки отримує приріст швидкості $\Delta \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}$.

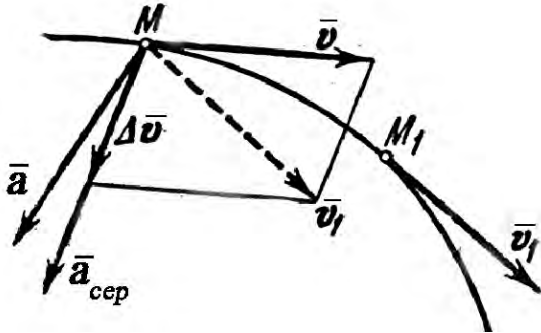


Рис. 8.7

Для побудови вектора $\Delta \vec{v}$ відкладемо від точки M вектор, що дорівнює $\vec{v}_1$ та побудуємо паралелограм, у якому діагоналю буде $\vec{v}_1$, а однією із сторін $\vec{v}$. Тоді друга сторона і буде зображати вектор $\Delta \vec{v}$. Зауважимо, що вектор $\Delta \vec{v}$ завжди має напрямок в бік угнутості траєкторії.

Відношення приросту швидкості $\Delta \vec{v}$ до відповідного проміжку часу Δt визначає середнє прискорення точки за цей проміжок часу:

$$a_{cp} = \frac{\Delta \vec{v}_{cp}}{\Delta t}. \quad (8.16)$$

Очевидно, вектор середнього прискорення буде мати однаковий напрямок з вектором $\Delta \vec{v}_{cp}$, тобто напрямлений у бік угнутості траєкторії. Прискорення точки у даний момент часу t називається векторна величина $\vec{a}$, до якої прямує середнє прискорення $\vec{a}_{cp}$ при прямуванні проміжку часу Δt до нуля.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

або з урахуванням формули (8.9)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \quad (8.17)$$

Таким чином, *вектор прискорення точки в даний момент часу дорівнює першій похідній від вектора швидкості або другій похідній від радіуса-вектора точки за часом.*

Розмірність прискорення – довжина/(час)²; за одиницю вимірювання використовується звичайно м/с².

Знайдемо, як розташовується вектор $\bar{a}$ відносно до траєкторії точки. При прямолінійному русі вектор $\bar{a}$ спрямований, очевидно, уздовж прямої, по якій рухається точка. Якщо траєкторія точки є плоска крива, то вектор прискорення $\bar{a}$, так як і вектор $\bar{a}_{\text{ср.}}$, лежить у площині цієї кривої і спрямований в бік її угнутості. Якщо траєкторія не є плоскою кривою, то вектор $\bar{a}_{\text{ср.}}$ буде направлений у бік угнутості траєкторії і буде лежати у площині, що проходить через дотичну до траєкторії в точці М і пряму, паралельну дотичній у сусідній точці М₁ (рис. 8.7). В границі, коли точка М₁ прямує до М, ця площина приймає положення *стичної площини*. Отже, у загальному випадку вектор прискорення $\bar{a}$ лежить у стичній площині і направлений у бік угнутості траєкторії.

8.6 Визначення прискорення при координатному способі задання руху

Розкладемо прискорення точки на складові, паралельні осям декартової системи координат:

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}, \quad (8.18)$$

де a_x, a_y, a_z – проекції прискорення на координатні осі.

Відповідно до визначення прискорення і згідно з формул (8.10), (8.11), маємо

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k}) = \frac{dv_x}{dt} \bar{i} + \frac{dv_y}{dt} \bar{j} + \frac{dv_z}{dt} \bar{k} = \ddot{x} \bar{i} + \ddot{y} \bar{j} + \ddot{z} \bar{j}. \quad (8.19)$$

Прирівнюючи формули (8.18) і (8.19) отримуємо формули для проекцій прискорення на осі декартової системи координат:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \ddot{z}. \quad (8.20)$$

Проекція прискорення на будь-яку координатну вісь дорівнює другій похідній за часом від відповідної координати точки, що рухається.

Числове значення прискорення і косинуси кутів вектора прискорення з осями координат визначаються за формулами:

$$a = |\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2},$$

$$\cos(\bar{a}, \wedge x) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\bar{a}, \wedge y) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos(\bar{a}, \wedge z) = \frac{a_z}{a}. \quad (8.21)$$

Коли точка рухається по площині, то осі Ох, Оу вибирають у цій же площині. Тоді $z = \text{const} = 0$, $a_z = \ddot{z} = 0$, а формули для прискорення і його проекцій на вісі координат приймають вигляд:

$$\bar{a} = \ddot{x} \bar{i} + \ddot{y} \bar{j}, \quad a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}. \quad (8.22)$$

Відповідно

$$\bar{a} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}, \quad \cos(\bar{a}, \wedge x) = \frac{\ddot{x}}{a}, \quad \cos(\bar{a}, \wedge y) = \frac{\ddot{y}}{a}.$$

При прямолінійному русі вісь Ox напрямляємо уздовж траєкторії точки.

Тоді:

$$y = \text{const} = 0 \quad \text{і} \quad a_x = \ddot{y} = 0, \quad a_z = \ddot{x} = 0. \quad (8.23)$$

Відповідно чисельне значення прискорення буде:

$$a = |\ddot{x}|.$$

8.7 Визначення прискорення точки при натуральному способі задання руху. Дотичне і нормальне прискорення

При натуральному способі задання руху прискорення визначають за його проекціями на осі натурального тригранника $M\tau n b$. Ці осі мають початок у точці M і рухаються разом з нею. Осі натурального тригранника напрямлені наступним чином: вісь $M\tau$ – уздовж дотичної до траєкторії у бік додатного відліку відстані s ; вісь Mn – по нормалі, що лежить у стичній площині і напрямлена у бік угнутості траєкторії; вісь Mb – перпендикулярна до перших двох так, щоб вона створила праву трійку (рис. 8.8).

Осі натурального тригранника називаються: $M\tau$ – дотична, Mn – головна нормаль, Mb – бінормаль.

У зв'язку з тим, що прискорення точки $\bar{a}$ лежить у стичній площині, тобто у площині $M\tau n$, проекція вектора $\bar{a}$ на бінормаль дорівнює нулю ($a_b = 0$).

Обчислимо проекції $\bar{a}$ на дві інші осі.

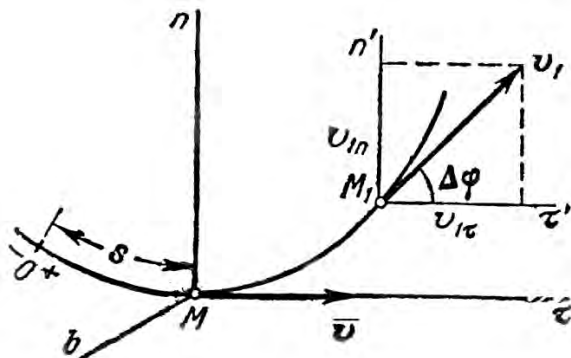


Рис. 8.8

Нехай в момент часу t точка знаходиться в положенні M і має швидкість $\bar{v}$, а в момент $t_1 = t + \Delta t$ приходить в положення M_1 і має швидкість $\bar{v}_1$. Тоді за визначенням:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{v}_1 - \bar{v}}{t_1 - t}.$$

Проекції $\bar{a}$ на осі $M\tau$ і Mn будуть

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{1\tau} - v_\tau}{\Delta t}, \quad a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{1n} - v_n}{\Delta t}.$$

Враховуючи, що проекції вектора на паралельні осі однакові, проведемо через точку M_1 осі $M_{\tau'}$, $M_{n'}$, паралельні $M\tau$, Mn , і позначимо кут між напрямком вектора $\bar{v}_1$ і напрямком дотичної $M\tau$ через $\Delta\varphi$. Цей кут між

дотичними до кривої у точках M і M_1 називається кут *суміжності*. *Кривизною кривої* k у точці M називається границя до якої прямує кут суміжності, віднесений до відстані Δs , коли Δs прямує до нуля, тобто

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Радіусом кривизни кривої ρ у точці M називають величину обернену кривизні кривій у цій точці, тобто

$$\rho = \frac{1}{k} = \frac{ds}{d\varphi}.$$

Відповідно до рис. 8.7 проекції векторів $\bar{v}$ і $\bar{v}_1$ на осі M_τ і M_n будуть дорівнювати:

$$v_{\tau} = v, \quad v_n = 0,$$

$$v_{1\tau} = v_1 \cos \Delta \varphi, \quad v_{1n} = v_1 \sin \Delta \varphi,$$

де v і v_1 – чисельні величини швидкості в моменти t і t_1

Отже:

$$a_{\tau} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 \cos \Delta \varphi - v}{\Delta t}, \quad a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(v_1 \frac{\sin \Delta \varphi}{\Delta t} \right).$$

Помітимо, що при $\Delta t \rightarrow 0$ точка M_1 необмежено наближається до M і одночасно $\Delta \varphi \rightarrow 0$, $v_1 \rightarrow v$. Тоді, враховуючи, що $\lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} (\cos \Delta \varphi) = 1$, отримуємо для

a_{τ} вираз

$$a_{\tau} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 - v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

Праву частину виразу a_n перетворимо так, щоб до неї увійшли відношення, границі яких нам відомі. Для цього помножимо чисельник і знаменник дробу, що стоїть під знаком $\lim$, на $\Delta \varphi \cdot \Delta s$. Тоді будемо мати:

$$a_n = \lim \left(v_1 \frac{\sin \Delta \varphi}{\Delta \varphi} \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \frac{v^2}{\rho},$$

так як границі кожного із співмножників, що стоять у дужках, при $\Delta t \rightarrow 0$ дорівнюють:

$$\lim v_1 = v, \quad \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi}{\Delta \varphi} = 1, \quad \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{1}{\rho}, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v.$$

Остаточно отримуємо:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}. \quad (8.24)$$

Таким чином, ми довели, що *дотичне прискорення дорівнює першій похідній від чисельної величини швидкості або другій похідній від відстані (криволінійної координати) S по часу, а нормальне прискорення дорівнює квадрату швидкості поділеному на радіус кривизни траєкторії у заданій точці кривої.*

Відкладемо уздовж дотичної $M\tau$ і головної нормалі Mn вектори $\bar{a}_{\tau}$ і $\bar{a}_n$,

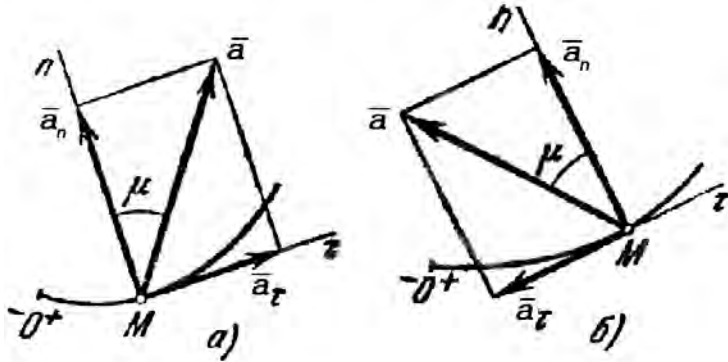


Рис. 8.9

тобто дотичну і нормальну складову прискорення (рис. 8.9). При цьому складова $\bar{a}_n$ завжди буде напрямлена у бік угнутості кривої, так як завжди $a_n > 0$, а складова $\bar{a}_{\tau}$ може бути спрямована і у додатному, і у від'ємному напрямку осі $M\tau$ залежно від знака проекції a_{τ} (рис. 8.8).

Вектор прискорення точки $\bar{a}$ зображується діагоналлю паралелограма, побудованого на складових $\bar{a}_{\tau}, \bar{a}_n$. Модуль вектора $\bar{a}$ і кут μ його відхилення від нормалі Mn визначаються формулами:

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}, \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{|a_{\tau}|}{a_n}. \quad (8.25)$$

Таким чином, якщо рух точки задано натуральним способом, то за формулами (8.24) і (8.25) можна визначити модуль і напрямок прискорення точки.

8.8 Окремі випадки руху точки

8.8.1 Прямолінійний рух

Якщо траєкторія точки є пряма лінія, то $\rho = \infty$. Тоді $a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$ і повне прискорення точки дорівнює тільки дотичному прискоренню:

$$a = a_{\tau} = \frac{dv}{dt}.$$

Так як у даному випадку швидкість змінюється тільки чисельно, звідси заключаємо, що *дотичне прискорення характеризує змінювання швидкості за чисельною величиною.*

8.8.2 Рівномірний криволінійний рух

Рівномірним називається такий *криволінійний* рух точки по траєкторії будь-якої форми, в якому чисельна величина швидкості за весь час руху залишається сталою величиною: $a_\tau = \text{const}$. Тоді $a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$ і повне прискорення точки дорівнює тільки нормальному прискоренню:

$$a = a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Так як при цьому прискорення з'являється тільки за рахунок змінювання напрямку швидкості, то звідси заключаємо, що *нормальне прискорення характеризує змінювання швидкості за напрямком*.

Знайдемо закон рівномірного криволінійного руху. З формули (8.15) маємо $\frac{ds}{dt} = v$ або $ds = v dt$. Нехай у початковий момент $t = 0$ точка знаходиться від початку відліку на відстані S_0 . Тоді, беручи визначені інтеграли від обох частин рівності, отримаємо

$$\int_{s_0}^s ds = v \int_0^t dt \quad \text{або} \quad s - s_0 = vt.$$

Остаточно знаходимо закон рівномірного криволінійного руху точки у вигляді

$$s = s_0 + vt. \quad (8.26)$$

Якщо у рівності (8.26) покласти $s_0 = 0$, то s буде дорівнювати шляху, що пройшла точка за час t . Отже, при рівномірному русі шлях, пройдений точкою, зростає пропорційно швидкості, а швидкість дорівнює відношенню шляху до часу:

$$s = vt, \quad v = \frac{s}{t}. \quad (8.27)$$

8.8.3 Рівномірний прямолінійний рух

У даному випадку $v = \text{const}$, $\rho = \infty$ і $a_\tau = a_n = 0$. Відмітимо, що це єдиний рух, в якому прискорення точки весь час дорівнює нулю.

8.8.4 Рівнозмінний рух

Рівнозмінним криволінійним рухом називається такий криволінійний рух точки, при якому дотичне прискорення залишається весь час сталою величиною: $a_\tau = \text{const}$. Найдемо закон цього руху, враховуючи, що при $t = 0$ $s = s_0$, а $v = v_0$, де v_0 – початкова швидкість точки. Відповідно до формули (8.24)

$\frac{dv}{dt} = a_\tau$ або $dv = a_\tau dt$. Беручи від обох частин рівності визначені інтеграли

$\int_{v_0}^v dv = a_\tau \int_0^t dt$, отримуємо:

$$v = v_0 + a_\tau t. \quad (8.28)$$

Формулу (8.28) представимо у вигляді $\frac{ds}{dt} = v_0 + a_\tau t$ або $ds = v_0 dt + a_\tau t dt$.

Вдруге інтегруючи, отримуємо закон рівномірного руху точки у вигляді:

$$s = s_0 + v_0 t + a_\tau \cdot \frac{t^2}{2}. \quad (8.29)$$

Якщо при русі швидкість точки збільшується, то рух називають прискореним, а якщо зменшується – сповільненим. При прискореному русі швидкість v і дотичне прискорення a_τ мають однакові знаки, а при сповільненому вони мають різні знаки.

Приклад. Рух точки визначений рівняннями (x, y – в сантиметрах, t – в секундах) $x = 2 \sin \pi t$; $y = 2 - 3 \sin \pi t$.

Визначити швидкість і прискорення точки, а також радіус кривизни траєкторії.

Розв'язок. Швидкість точки:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2\pi \cos \pi t; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = -3\pi \cos \pi t;$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(4\pi^2 + 9\pi^2) \cos^2 \pi t} = \sqrt{13}\pi \cos \pi t.$$

Прискорення точки:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -2\pi^2 \sin \pi t; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = 3\pi^2 \sin \pi t;$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(4\pi^4 + 9\pi^4) \sin^2 \pi t} = \sqrt{13}\pi^2 \sin \pi t.$$

Дотичне прискорення точки:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = -\sqrt{13}\pi^2 \sin \pi t.$$

Нормальне прискорення:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{(\sqrt{13}\pi^2 \sin \pi t)^2 - (-\sqrt{13}\pi^2 \sin \pi t)^2} = 0.$$

Радіус кривизни траєкторії:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^2}{0} \rightarrow \infty.$$

Траєкторія точки – пряма лінія.

Питання для самоконтролю (Лекція 9)

1. Що характеризує прискорення точки?
2. Чому дорівнює вектор прискорення у даний момент часу?
3. Чому дорівнює проекція вектора прискорення на будь-яку координатну вісь?
4. Як визначити прискорення при координатному способі завдання руху?
5. Чому дорівнює дотичне і нормальне прискорення?
6. Як визначити прискорення точки (модуль і напрямлення) при натуральному способі завдання руху?
7. Що характеризує дотичне і нормальне прискорення точки?

Тести до теми 9 «Кінематика точки»

Таблиця 8.1

№	Питання
1	2
1	Натуральним способом задання руху точки користуються, коли: 1. відома її траєкторія; 2. положення точки можна визначити її декартовими координатами; 3. положення точки можна визначити радіус-вектором.
2	Для того, щоб задати рух точки натуральним способом необхідно задати: 1. закон зміни її декартових координат; 2. закон руху точки уздовж траєкторії; 3. закон зміни радіус-вектора.
3	Яким способом заданий закон руху точки $s = 10t^2 - 1$? 1. натуральним; 2. стаціонарним; 3. регулярним.
4	Яким способом заданий закон руху точки $x = a \cos \omega t$, $y = d \sin \omega t$? 1. натуральним; 2. координатним; 3. векторним.

1	2
5	Яким способом заданий закон руху $\vec{r} = 2t\vec{i} + 12t^2\vec{j}$? 1. натуральним; 2. координатним; 3. векторним.
6	Якщо закон руху точки $x = a \sin kt$, $y = a \sin kt$, то рівняння її руху 1. еліпс; 2. коло; 3. пряма.
7	Якщо закон руху точки $r = 5t^2\vec{i} + 3t^2\vec{j}$, то рівняння її руху 1. еліпс; 2. парабола; 3. пряма.
8	Вектор швидкості в заданий момент часу дорівнює: 1. першій похідній від радіус-вектора за часом; 2. першій похідній від переміщення точки за часом; 3. другій похідній від декартової координати точки за часом.
9	Перша похідна за часом від відповідної координати точки дорівнює: 1. проекції вектора прискорення на цю вісь; 2. куту нахилу вектора швидкості до дотичної; 3. проекції вектора швидкості на цю вісь.
10	Величина $\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ визначає: 1. радіус-вектор точки; 2. модуль швидкості точки; 3. вектор швидкості точки.
11	Величина $\frac{v_x}{v}$ визначає: 1. тангенс кута нахилу вектора швидкості до осі x ; 2. косинус кута нахилу вектора швидкості до осі x ; 3. синус кута нахилу вектора швидкості до осі x .
12	Перша похідна від відстані за часом $\frac{ds}{dt}$ дорівнює: 1. вектору швидкості в даний момент часу; 2. середній величині швидкості; 3. чисельній величині швидкості в даний момент часу.
13	Вектор прискорення точки характеризує змінювання з часом: 1. модуля і напрямку швидкості точки; 2. модуля швидкості точки; 3. радіус-вектора точки.

1	2
14	Якщо точка рухається по колу зі сталою за модулем швидкістю, то її прискорення буде 1. дорівнювати нулю; 2. більше нуля; 3. менше нуля.
15	При прямолінійному русі вектор прискорення $\vec{a}$ спрямований: 1. уздовж прямої; 2. під деяким кутом до прямої.
16	Якщо траєкторія точки є плоска крива, то вектор прискорення $\vec{a}$: 1. лежить у площині цієї кривої та співпадає з дотичною до траєкторії; 2. лежить у площині цієї кривої і спрямований у бік угнутості траєкторії; 3. лежить у площині цієї кривої і спрямований у бік опуклості траєкторії.
17	Друга похідна за часом від відповідної координати точки, що рухається дорівнює: 1. модулю прискорення точки; 2. вектору прискорення точки; 3. проекції вектора точки на цю вісь.
18	Величина $\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = \sqrt{\dot{v}_x^2 + \dot{v}_y^2 + \dot{v}_z^2}$ дорівнює: 1. вектору прискорення; 2. модулю вектора прискорення; 3. алгебраїчній величині прискорення.
19	Прискорення визначають за його проекціями на дотичну і нормаль при задані руху: 1. натуральним способом; 2. координатним способом; 3. векторним способом.
20	Величина $\frac{dv}{dt}$ визначає: 1. нормальне прискорення; 2. дотичне прискорення; 3. вектор прискорення.
21	Величина $\frac{d^2s}{dt^2}$ визначає: 1. нормальне прискорення; 2. дотичне прискорення; 3. вектор прискорення.
22	Величина $\sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ визначає: 1. модуль прискорення точки; 2. вектор прискорення точки; 3. напрямок прискорення точки.

1	2
23	Величина $\frac{ a_\tau }{a_n}$ визначає: 1. кут відхилення вектора прискорення від дотичної; 2. кут відхилення вектора прискорення від нормалі; 3. відносну величину прискорення.
24	Дотичне прискорення характеризує: 1. змінювання вектора швидкості за чисельною величиною; 2. змінювання вектора швидкості за напрямком; 3. змінювання вектора швидкості за модулем та напрямком.
25	Нормальне прискорення характеризує змінювання швидкості: 1. за чисельною величиною; 2. в залежності від відстані; 3. за напрямком.
26	При прямолінійному русі нормальне прискорення дорівнює: 1. нулю; 2. дотичному; 3. нескінченності.
27	Прискорення точки дорівнює нулю при: 1. рівномірному будь-якому криволінійному русі; 2. рівномірному прямолінійному русі; 3. при рівномірному русі по колу.

ЛЕКЦІЯ 10

Розділ 9. Поступальний і обертальний рух твердого тіла

9.1 Поступальний рух

Поступальним називається такий рух твердого тіла, при якому будь-яка пряма проведена на цьому тілі, переміщується, залишаючись паралельною сама собі.

Поступальний рух не слід змішувати з прямолінійним. При поступальному русі тіла траєкторії точок можуть бути будь-якими кривими лініями.

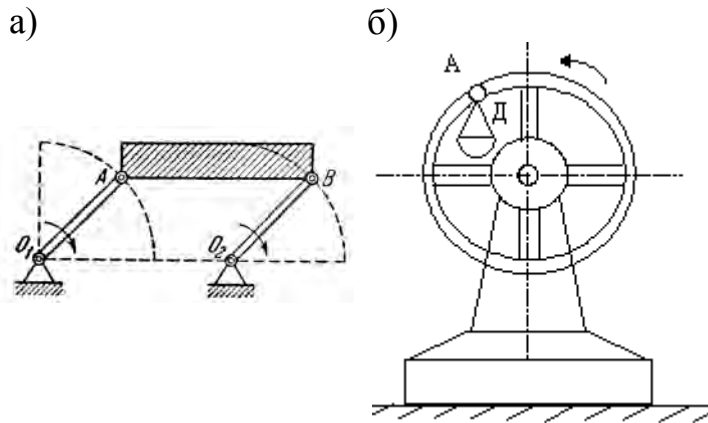


Рис. 9.1

Наведемо приклади поступального руху. На рис. 9.1,а зображено спарник АВ, який залишається паралельним сам собі при обертанні кривошипів O_1A і O_1B ($O_1A = O_1B$).

На рис. 9.1,б ланка Д здійснює поступальний рух за рахунок того, що зв'язана ідеальним шарніром з іншим тілом, яке здійснює обертальний рух.

Кузов вантажівки на прямолінійній ділянці дороги також здійснює поступальний рух.

Властивості поступального руху визначаються такою теоремою: *при поступальному русі всі точки тіла описують однакові (при накладанні співпадають) траєкторії і мають в кожний момент часу однакові за модулем і напрямком швидкості і траєкторії.*

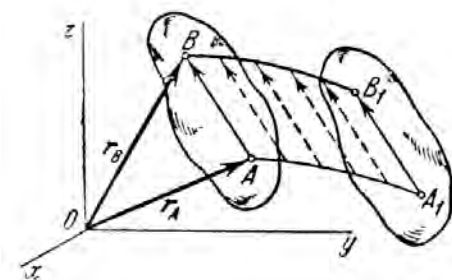


Рис. 9.2

Для доведення розглянемо тверде тіло, що здійснює поступальний рух відносно системи відліку $Oxyz$. Візьмемо на тілі дві довільні точки А і В, положення яких в момент часу t визначається радіус-векторами $\vec{r}_A$ і $\vec{r}_B$ (рис. 9.2). Проведемо вектор $\overline{AB}$, що сполучає ці точки. Тоді

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB}. \quad (9.1)$$

Так як тіло тверде, то довжина $\overline{AB}$ залишається незмінною. Крім того, так як рух поступальний, то і напрямок $\overline{AB}$ також залишається незмінним. Таким чином, вектор $\overline{AB}$ за весь час руху тіла залишається сталим ($\overline{AB} = \text{const}$). Внаслідок цього, як видно з формули (9.1) (і безпосередньо з рисунка),

траєкторія точки В визначається траєкторією точки А, бо при накладанні ці траєкторії (криві) співпадають.

Для визначення швидкостей точок А і В продиференціюємо обидві частини рівності (9.1) за часом. Тоді маємо:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d(\overline{AB})}{dt}.$$

Але похідна від сталого вектора $\overline{AB}$ дорівнює нулеві. Похідні ж від векторів $\vec{r}_A$ і $\vec{r}_B$ по часу дають швидкості точок А і В. В результаті знаходимо:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B,$$

тобто швидкості точок А і В тіла в будь-який момент часу однакові, як за модулем, так і за напрямком. Візьмемо від обох частин отриманої рівності похідні по часу:

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d\vec{v}_B}{dt}, \text{ або } \vec{a}_A = \vec{a}_B.$$

Отже, прискорення точок А і В тіла в будь-який момент часу теж однакові за модулем і напрямком.

Так як точки А і В були вибрані довільно, то можна зробити висновок, що у всіх точок тіла їх траєкторії, а також швидкості і прискорення однакові. Таким чином, теорема доведена.

Із теореми випливає, що поступальний рух твердого тіла цілком може визначатися рухом будь-якої однієї точки.

При поступальному русі спільну для всіх точок тіла швидкість $\vec{v}$ називають *швидкістю поступального руху тіла*, а прискорення $\vec{a}$ – *прискоренням поступального руху*. Вектори $\vec{v}$ і $\vec{a}$, можна, очевидно, прикладати в будь-якій точці тіла. Відмітимо, що поняття про швидкість і прискорення тіла мають рацію тільки при поступальному русі. В решті випадках, як ми побачили, точки тіла рухаються з різними швидкостями і прискореннями. Терміни “швидкість тіла”, і “прискорення тіла” для цих рухів втрачають зміст.

9.2 Обертальний рух твердого тіла. Кутова швидкість і кутове прискорення

Обертальним називається такий рух твердого тіла, при якому які-небудь дві точки, що належать тілу (або незмінно з ним зв'язані), залишаються за весь час руху нерухомими (рис. 9.3). Пряма що проходить через нерухомі точки А і В твердого тіла, називається *віссю обертання*. Так як відстані між точками твердого тіла мають залишатися незмінними, то, очевидно, при обертальному русі всі точки, що належать осі обертання, будуть нерухомі, а решта точок тіла будуть описувати кола, площини яких перпендикулярні до осі обертання, а центри лежать на цій осі.

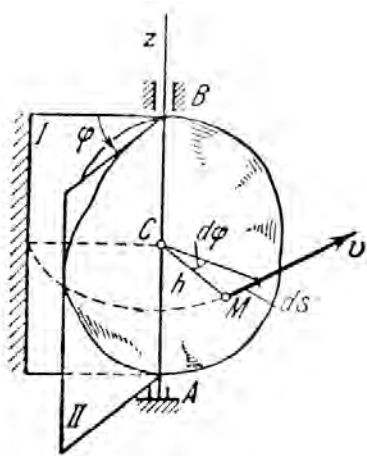


Рис. 9.3

Для визначення положення тіла, що обертається, проведемо через вісь обертання Az дві напівплощини: напівплощину I – нерухому і напівплощину II, врізану у саме тіло і яка обертається з ним (рис. 9.3). Тоді положення тіла в будь-який момент часу буде однозначно визначатися взятим з відповідним знаком кутом φ між цими напівплощинами, який назовемо *кутом повороту тіла*. Кут φ будемо вважати додатним, якщо він відкладений від нерухомої площини проти ходу стрілки годинника (для спостерігача що дивиться із додатнього кінця осі Az) і від'ємним, якщо за ходом стрілки годинника. Вимірюється кут φ завжди в радіанах. Таким чином, щоб знайти положення тіла в будь-який момент часу необхідно знати залежність кута φ від часу t , тобто

$$\varphi = f(t). \quad (9.2)$$

Рівняння (9.2) виражає *закон обертального руху твердого тіла*.

Основними кінематичними характеристиками обертального руху твердого тіла є його кутова швидкість ω і його кутове прискорення ε .

Якщо за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ тіло здійснює поворот на кут $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$, то середня кутова швидкість тіла за цей проміжок часу буде чисельно дорівнювати:

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Кутова швидкість тіла в даний момент часу t називається величина, до якої прямує значення ω_{cp} , коли проміжок часу Δt прямує до нуля:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \text{або} \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (9.3)$$

Таким чином, *кутова швидкість тіла в даний момент часу чисельно дорівнює першій похідній від кута повороту за часом*.

Легко бачити, що, коли обертання здійснюється проти ходу стрілки годинника, то $\omega > 0$, а коли за ходом стрілки годинника, то $\omega < 0$.

Розмірність кутової швидкості є радіан/год, або 1/год, так як радіан величина безрозмірна; як одиниця вимірювання здебільшого використовується $1/c = c^{-1}$.

Кутову швидкість можна зображувати у вигляді вектора $\vec{\omega}$, чисельна величина якого ω дорівнює $\frac{d\varphi}{dt}$ і який направлений уздовж осі обертання тіла в

той бік, звідки видно, що обертання здійснюється проти ходу стрілки годинника (9.4,а).

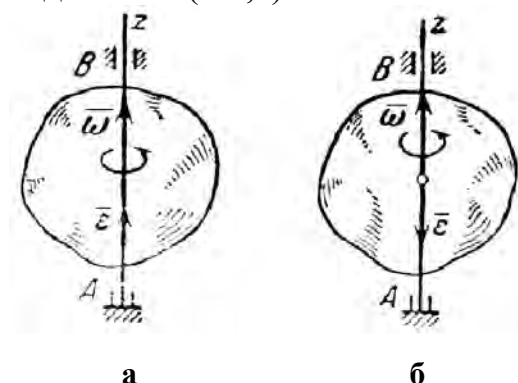


Рис. 9.4

Кутове прискорення характеризує зміну кутової швидкості з плином часу.

Якщо за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ кутова швидкість тіла змінюється на величину $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$, то середнє прискорення кутової швидкості тіла за цей проміжок часу буде чисельно дорівнювати:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Кутове прискорення тіла в даний момент часу називається величиною, до якої прямує значення ε_{cp} , коли проміжок часу Δt прямує до нуля; тобто:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}.$$

Якщо взяти до уваги рівність (9.3), то можна записати:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (9.4)$$

Отже, кутове прискорення тіла в даний момент часу чисельно дорівнює першій похідній від кутової швидкості або другої похідної від кута повороту тіла за часом.

Розмірність кутового прискорення є $1/\text{час}^2$, але здебільше як одиницю вимірювання використовують $1/\text{с}^2 = \text{с}^{-2}$.

Якщо модуль кутової швидкості з часом збільшується, то обертання тіла називається *прискореним*, а якщо зменшується – *сповільненим*.

Кутове прискорення тіла (за аналогією з кутовою швидкістю) також можна зобразити у вигляді вектора $\vec{\varepsilon}$, направленого уздовж осі обертання. При цьому напрямок $\vec{\varepsilon}$ співпадає з напрямком $\vec{\omega}$, коли тіло обертається прискорено і протилежний $\vec{\omega}$ при сповільненому обертанні (рис. 9.4,б).

9.3 Рівномірне і рівнозмінне обертання

Якщо кутова швидкість тіла за модулем не змінюється ($\omega = \text{const}$), то обертання тіла називається *рівномірним*. Знайдемо закон рівномірного обертання. Із формули (9.3) маємо $d\varphi = \omega dt$. Звідки, вважаючи, що у початковий момент при $t=0$, кут $\varphi = 0$, отримуємо:

$$\int_0^\varphi d\varphi = \omega \int_0^t dt \quad \text{або} \quad \varphi = \omega t. \quad (9.5)$$

Із рівності (9.3) також випливає, що при рівномірному обертанні:

$$\omega = \frac{\varphi}{t}. \quad (9.6)$$

В техніці швидкість рівномірного обертання часто визначають частотою обертання в хвилину, позначаючи цю величину через n об/хв. Знайдемо залежність між n в об/хв і ω в с^{-1} . При одному оберті тіло повертається на кут 2π , а при n обертах на $2\pi n$. Цей поворот відбувається за час $t = 1 \text{ хв} = 60 \text{ с}$. Тоді з рівності (9.6) випливає:

$$\omega = \frac{\pi n}{30}. \quad (9.7)$$

Якщо кутове прискорення тіла за весь час руху залишається незмінним ($\varepsilon = \text{const}$), то обертання називається рівнозмінним. Знайдемо закон рівнозмінного обертання, вважаючи, що в початковий момент часу $t = 0$, кут $\varphi = 0$, а кутова швидкість $\omega = \omega_0$ (ω_0 – початкова швидкість).

З формули (9.4) маємо $d\omega = \varepsilon dt$. Інтегруючи ліву частину в межах від ω_0 до ω , а праву – в межах від 0 до t , маємо:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \int_0^t dt, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t. \quad (9.8)$$

Представимо вираз (9.8) у вигляді $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t$, або $d\varphi = \omega_0 dt + \varepsilon t dt$.

Вдруге інтегруючи, маємо закон рівнозмінного обертання:

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (9.9)$$

Якщо величини ω і ε мають однакові знаки, обертання буде рівноприскореним, а якщо різні – рівносповільненим.

9.4 Швидкість і прискорення точок тіла при обертальному русі

Візьмемо яку-небудь точку M твердого тіла, що знаходиться на відстані h від осі обертання Az (рис. 9.3). При обертанні тіла точка M буде описувати коло радіусом h , площа якої перпендикулярна до осі обертання, а центр C лежить на осі.

Якщо за час dt відбувається елементарний поворот тіла на кут $d\varphi$, то точка M при цьому здійснює уздовж своєї траєкторії елементарне переміщення $ds = h d\varphi$. Тоді швидкість точки буде дорівнювати відношенню ds і dt , тобто:

$$v = \frac{ds}{dt} = h \frac{d\varphi}{dt}$$

або

$$v = h\omega. \quad (9.10)$$

Швидкість точки v називають лінійною або коловою швидкістю точки M .

Таким чином, *лінійна швидкість точки тіла при його обертальному русі дорівнює добутку кутової швидкості тіла на відстань від цієї точки до осі обертання.*

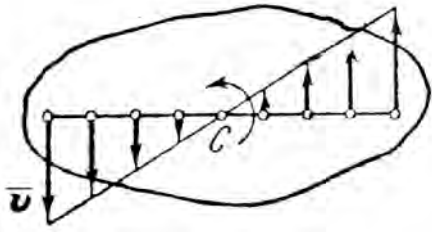


Рис. 9.5

Лінійна швидкість має напрямок дотичний до кола, що його описує точка M . Так як для всіх точок тіла кутова швидкість має одне і те ж значення, то з формул (9.10) випливає, що лінійні швидкості точок тіла при його обертанні, пропорційні їх відстаням від осі обертання (рис. 9.5).

Для знаходження прискорення точки M скористуємось формулами

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

В нашому випадку $\rho = h$. Підставляючи сюди значення v із формули (9.10), отримуємо:

$$a_\tau = h \frac{d\omega}{dt}, \quad a_n = \frac{h^2 \omega^2}{h}$$

або остаточно:

$$a_\tau = h\varepsilon; \quad a_n = h\omega^2. \quad (9.11)$$

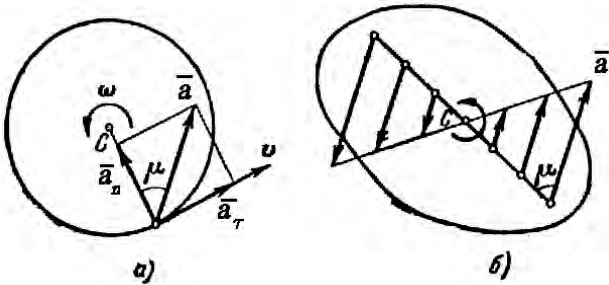


Рис. 9.6

Дотичне прискорення $\bar{a}_\tau$, спрямоване по дотичній до траєкторії (у бік руху, якщо тіло обертається прискорено, або у зворотній бік, якщо тіло обертається сповільнено); нормальне прискорення a_n завжди має напрямок по радіусу h до осі обертання (рис. 9.6,а). Повне прискорення

точки M буде дорівнювати:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(h\varepsilon)^2 + (h\omega^2)^2}$$

або

$$a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Відхилення вектора повного прискорення від радіуса описаного точкою кола визначається кутом μ , який обчислюється за формулою

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|a_\tau|}{a_n}.$$

Підставляючи сюди значення a_τ і a_n із рівностей (9.11), отримуємо:

$$tg\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \quad (9.13)$$

Із формул (9.12) і (9.13) випливає, що прискорення всіх точок тіла пропорційні їх відстаням від осі обертання та утворюють один і той же кут μ з радіусом кіл, які вони описують при русі (рис. 9.6,б).

Приклад. Махове колесо починає обертатися із стану покою рівно прискорено і через 10 хв після початку руху має кутову швидкість $4\pi \cdot \text{рад}/\text{с}$. Скільки обертів здійснило колесо за ці 10 хв?

Розв'язок. Оскільки махове колесо здійснює рівноприскорене обертання, то рівняння його руху мають такий вигляд:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t. \quad (a)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}. \quad (б)$$

За умовою задачі колесо починає обертатися із стану покою, тоді $\varphi_0 = 0, \omega_0 = 0$. Також відомо, що через 10 хв кутова швидкість колеса дорівнює $4\pi \cdot \text{рад}/\text{с}$. Підставляючи значення ω і t у рівняння (а), знайдемо кутове прискорення ε колеса:

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t}.$$

$$\varepsilon = \frac{4\pi}{600} = 6,667\pi \cdot 10^{-3} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Із рівняння (б) знайдемо кут повороту:

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

$$\varphi = \frac{6,667 \cdot \pi \cdot 10^{-3} \cdot 600^2}{2} = 1200 \cdot \pi \text{ рад}.$$

Кут повороту можна визначити також за формулою

$$\varphi = 2 \cdot \pi \cdot N, \quad (11.12)$$

де N – кількість обертів.

Звідси

$$N = \frac{\varphi}{2 \cdot \pi}.$$

Підставляємо значення φ в останню формулу і знаходимо N :

$$N = \frac{1200\pi}{2\pi} = 600 \text{ об.}$$

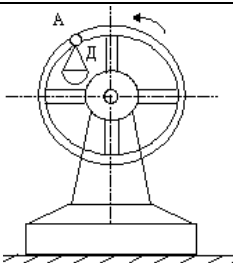
Відповідь: махове колесо здійснило за 10 хв 600 обертів.

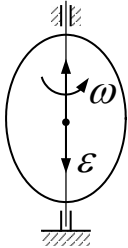
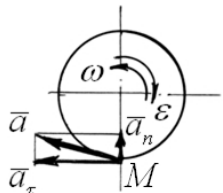
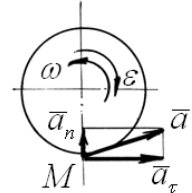
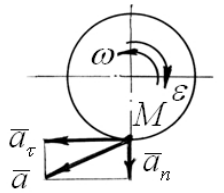
Питання для самоконтролю (Лекція 10)

1. Який рух називається поступальним?
2. Які властивості має поступальний рух?
3. Чому тільки при поступальному русі можна казати про швидкість або прискорення тіла, а не окремих точок?
4. Яке рівняння визначає закон обертального руху?
5. Що характеризують і якими формулами виражаються кутова швидкість і кутове прискорення тіла в даний момент часу?
6. Як напрямлений вектор кутової швидкості? Коли вектор кутового прискорення співпадає з напрямком вектора кутової швидкості, а коли йому протилежний?
7. Як визначити швидкість точки тіла при обертальному русі?
8. Як визначити прискорення точки при обертальному русі?

Тести до теми 10 «Поступальний і обертальний рух твердого тіла»

Таблиця 10.1

№	Питання
1	2
1	 Ланка Д, що наведена на рисунку, сполучена з колесом А ідеальним шарніром і здійснює рух 1. обертальний; 2. поступальний; 3. криволінійний.
2	При поступальному русі всі точки тіла 1. мають в кожній момент часу однакові за модулем і напрямком швидкості і прискорення та описують однакові траєкторії; 2. мають в кожній момент часу однакові за модулем і напрямком швидкості і прискорення та описують різні траєкторії; 3. мають однакові за модулем і напрямком тільки швидкості і описують однакові траєкторії.
3	Кутова швидкість точок тіла при обертальному русі буде: 1. однакова для всіх точок; 2. різною для всіх точок; 3. прямопропорційна відстані точок від осі обертання.
4	Величина $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ дорівнює: 1. кутовій швидкості; 2. кутовому прискоренню; 3. тангенсу кута нахилу швидкості точки тіла до дотичної.

1	2
5	На рисунки наведено вектори кутової швидкості та кутового прискорення. Тіло в цьому випадку обертається: 1. прискорено; 2. сповільнено; 3. рівномірно. 
6	Кутова швидкість вимірюється в: 1. рад/с²; 2. м/с; 3. рад/с.
7	Кутове прискорення вимірюється в: 1. с⁻²; 2. с⁻¹; 3. рад/с.
8	Залежність між частотою обертання (n, об./хв) і кутовою швидкістю таке: 1. $\omega = \frac{\pi n}{30}$; 2. $n = \frac{\pi \omega}{30}$; 3. $\omega = \frac{2\pi n}{30}$.
9	При обертальному русі швидкість точки тіла, що перебуває на відстані h від осі обертання, визначається за формулою: 1. $v = \varepsilon h^2$; 2. $v = \omega h$; 3. $v = \frac{\omega}{h}$.
10	При обертальному русі прискорення точки обчислюється за формулою: 1. $a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$; 2. $a = h\sqrt{\omega^2 + \varepsilon^4}$; 3. $a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}$.
11	При обертальному русі формула $tg\mu = \frac{ \varepsilon }{\omega^2}$ визначає: 1. кут нахилу вектора прискорення точки до дотичної; 2. кут відхилення вектора прискорення від радіуса кола, що описує точка; 3. відносну величину кутового прискорення.
12	Повне прискорення точки М визначено правильно на рисунку: 1. а; 2. б; 3. в. а)  б)  в) 

ЛЕКЦІЯ 11

Розділ 10. Плоскопаралельний рух твердого тіла

10.1 Рівняння плоскопаралельного руху

Плоскопаралельним (або плоским) називається такий рух тіла, при якому всі його точки переміщуються паралельно деякій площині Π (рис. 10.1).

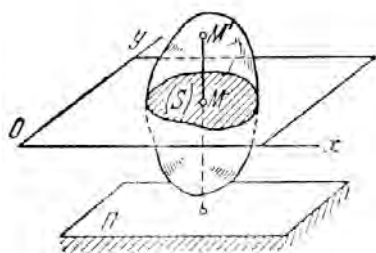


Рис. 10.1

При паралельному русі всі точки тіла, що лежать на прямій MM' , перпендикулярній до перерізу S , тобто до площини Π , рухаються тотожно.

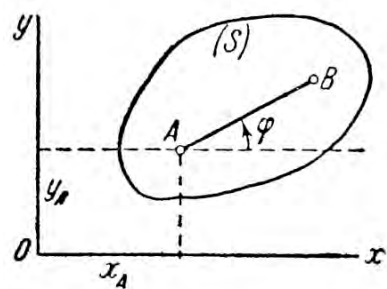


Рис. 10.2

Прикладами плоскопаралельного руху можуть служити: колесо, що котиться на прямолінійній ланці шляху; шатун у кривошипно-шатунному механізмі та інше. Окремим випадком плоскопаралельного руху є обертальний рух твердого тіла.

Розглянемо переріз S тіла будь-якою площиною Oxy , паралельній площині Π (рис. 10.1).

При паралельному русі всі точки тіла, що лежать на

Тому надалі, замість усього тіла будемо зображати тільки його переріз S . Положення перерізу S у площині Oxy визначається, положенням будь-якого відрізка AB , проведеного у цьому перерізі (рис. 10.2). У свою чергу, положення відрізка AB можна визначити, якщо знати координати x_A , y_A точки A і кут φ , який відрізок AB створює з віссю Ox . Точку A , вибрану для визначення положення перерізу S , будемо надалі

називати *полюсом*.

При русі тіла величини x_A , y_A , φ будуть змінюватися. Для того, щоб знати закон руху тіла, тобто знати його положення у просторі у будь-який момент часу, необхідно знати залежності:

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t). \quad (10.1)$$

Рівняння (10.1) називають *рівняннями плоскопаралельного руху твердого тіла*.

Покажемо, що плоский рух складається із поступального і обертального. Для цього розглянемо два послідовних положення I і II, які займає переріз S тіла, що рухається, в моменти часу t_1 і $t_2 = t_1 + \Delta t$ (рис. 10.3).

Легко бачити, що переріз S , а з ним і все тіло, можна привести з положення I у положення II таким чином. Перемістимо спочатку тіло поступально, так, щоб полюс A рухаючись уздовж своєї траєкторії, прийшов у положення A_2 (при цьому відрізок A_1B_1 займе положення $A_2B'_1$), а потім повернемо переріз навколо полюсу A_2 на кут $\Delta\varphi_1$. Таким же чином тіло можна перемістити із положення II у наступне його положення III та ін. Звідки можна

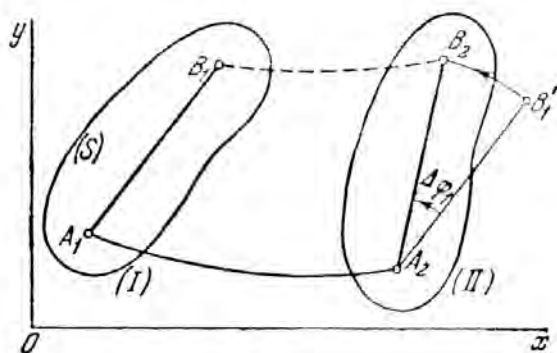


Рис. 10.3

вивести, що плоскопаралельний рух твердого тіла складається з поступального руху, при якому всі точки тіла рухаються так же, як полюс A , і з обертального руху навколо цього полюса.

Поступальна частина плоскопаралельного руху описується першими двома з рівнянь (10.1), а обертання навколо полюса – третім з цих рівнянь.

Основними кінематичними характеристиками плоскопаралельного руху є швидкість і прискорення полюса ($\bar{v}_A$ і $\bar{a}_A$), а також кутова швидкість ω і кутове прискорення ε обертального руху навколо полюса.

10.2 Визначення швидкостей точок тіла

Плоскопаралельний рух твердого тіла складається із поступального руху, при якому всі точки тіла рухаються зі швидкістю $\bar{v}_A$, і з обертального руху навколо цього полюса. Покажемо, що швидкість будь-якої точки M тіла складається геометрично з швидкостей, які вона отримує у кожному з цих рухів.

Дійсно, положення будь-якої точки M , що лежить у перерізі S тіла, визначається відносно до осей Oxy радіус-вектором $\bar{r} = \bar{r}_A + \bar{r}'$ (рис. 10.4), де $\bar{r}_A$ – вектор, визначаючий положення точки A ; $\bar{r}' = \overline{AM}$ – вектор, що визначає положення точки M відносно осей $Ax'y'$. Тоді

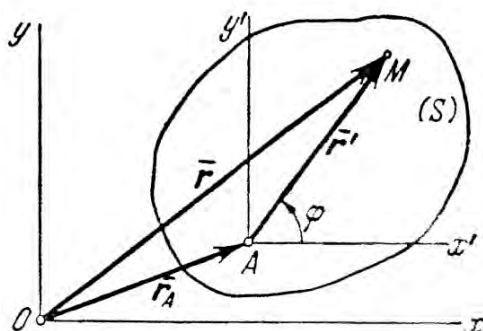


Рис. 10.4

$$\bar{v}_M = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{r}'}{dt}.$$

В отриманому рівнянні величина $\frac{d\bar{r}_A}{dt} = \bar{v}_A$ – швидкість полюса A ; $\bar{r}' = \overline{AM}$ і змінюється тільки по напрямку при обертанні $\overline{AM}$ (перерізу S) навколо полюса A , $\frac{d\bar{r}'}{dt} = \bar{v}_{MA}$ –

швидкість, яку точка M отримує при обертанні тіла навколо полюса A . Таким чином, з попередньої рівності дійсно витікає, що

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA}, \quad (10.2)$$

де швидкість $\bar{v}_{MA}$ за модулем буде дорівнювати

$$v_{MA} = \omega \cdot MA \quad (\bar{v}_{MA} \perp \overline{MA}); \quad (10.3)$$

ω – кутова швидкість обертання тіла.

Таким чином, швидкість будь-якої точки M тіла геометрично складається з швидкості якої-небудь іншої точки A , прийнятої за полюс, і швидкості точки M у її обертанні разом з тілом навколо цього полюса. Модуль і напрямок швидкості знаходяться побудовою відповідного паралелограма (рис. 10.5). Наприклад, необхідно знайти швидкість точки M обода колеса радіусу R , що котиться по прямолінійній рейці (рис. 10.6), причому швидкість центра колеса дорівнює $\bar{v}_C$, а кутова швидкість обертання колеса навколо цього центру дорівнює ω , кут DCM дорівнює β . Тоді швидкість точки M буде дорівнювати $\bar{v}_M = \bar{v}_C + \bar{v}_{MC}$.

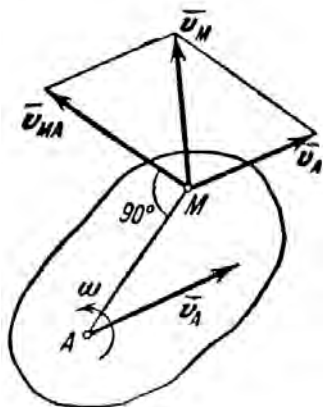


Рис. 10.5

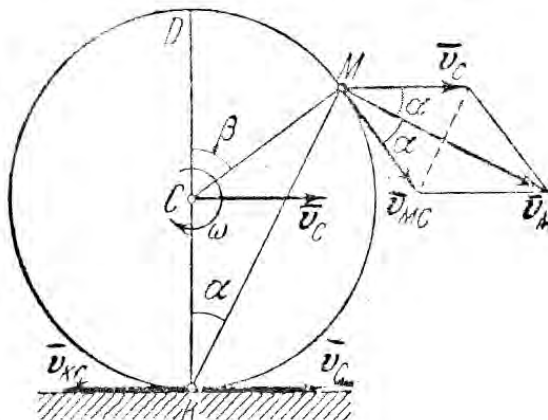


Рис. 10.6

Модуль $\bar{v}_C$ нам заданий, $\bar{v}_{MC} = \omega \cdot R$. Для знаходження $\bar{v}_M$ і $\bar{v}_{MC}$ побудуємо паралелограм на векторах $\bar{v}_M$ і $\bar{v}_{MC}$ (рис. 10.6). Неважко показати, що у даному випадку $v_M = \sqrt{v_C^2 + v_{MC}^2 + 2v_C v_{MC} \cos \beta}$. Можна також показати, що при відсутності прослизання колеса $v_M = 2v_C \cos \alpha$. Найпростіше це зробити за допомогою миттєвого центра швидкостей (дивись § 4).

10.3 Теорема про проекції швидкості двох точок тіла

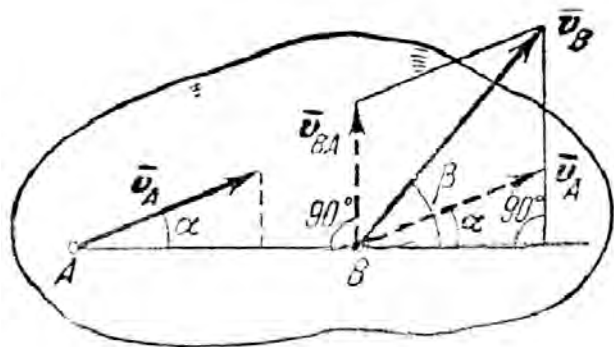


Рис. 10.7

Визначення швидкостей точок тіла за допомогою формули (10.2) пов'язано зі складними розрахунками. Проте, використовуючи цю формулу можна отримати ряд інших, більш зручних і простих методів визначення швидкостей точок тіла.

Один з таких методів дає теорема: *проекції швидкостей двох точок твердого тіла на пряму, що з'єднує ці точки, рівні між собою*. Розглянемо будь-які дві точки A і B . Візьмемо точку A за полюс (рис. 10.7)., тоді $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$. Враховуючи, що вектор $\bar{v}_{BA}$ перпендикулярний до прямої AB , знаходимо: $v_B \cos \beta = v_A \cos \beta$ і теорема доведена.

Цей результат дозволяє легко знаходити швидкість заданої точки, якщо відомі напрямки швидкості цієї точки і швидкість будь-якої іншої точки того ж тіла.

10.4 Визначення швидкості точок тіла за допомогою миттєвого центру швидкостей

Другий простий і наочний метод визначення швидкостей точок тіла при плоскопаралельному русі побудований на понятті про миттєвий центр швидкостей.

Миттєвим центром швидкостей називається точка перерізу S тіла, швидкість якої у даний момент часу дорівнює нулю

Легко переконатися, що якщо рух не є плоскопаралельний, то така точка у кожний момент часу t існує і при цьому єдина. Нехай у момент часу t точки A і B тіла, що лежать у перерізі S , мають швидкості $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_B$, не паралельні одна одній (рис. 10.8).

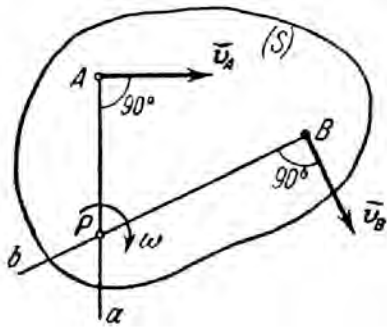


Рис. 10.8

Тоді, точка P , що лежить на перетині перпендикулярів Aa до вектора $\vec{v}_A$ і Bb до вектора $\vec{v}_B$ і буде миттєвим центром швидкостей, так як $v_P = 0$. Дійсно, якщо припустити, що $v_P \neq 0$, то за теоремою про проєкції швидкостей точок тіла вектор $\vec{v}_P$ повинен бути одночасно перпендикулярним і до AP (так як $\vec{v}_A \perp AP$) і до BP (так як $\vec{v}_B \perp BP$), що неможливо.

Якщо тепер у момент часу t узяти точку P за полюс, то за формулою (10.2) швидкість точки A буде дорівнювати:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}_{AP} = \vec{v}_{AP},$$

так як $\vec{v}_P = 0$. Аналогічний результат ми одержимо для будь-якої іншої точки тіла. Отож, *швидкість будь-якої точки тіла, що лежить у перерізі S , дорівнює її обертальній швидкості навколо миттєвого центру швидкостей..* При цьому відповідно рівнянню (10.3) отримаємо:

$$\begin{aligned} v_A &= \omega \cdot PA \quad (\vec{v}_A \perp \overline{PA}) \\ v_B &= \omega \cdot PB \quad (\vec{v}_B \perp \overline{PB}) \end{aligned} \quad (10.3,a)$$

З рівності (10.3,a) витікає, що

$$\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}, \quad (10.4)$$

тобто, швидкості точок тіла пропорційні їх відстаням до миттєвого центру швидкостей.

Отримані результати приводять до наступних висновків:

1. Для визначення миттєвого центру швидкостей необхідно знайти тільки напрямки швидкостей $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_B$ будь-яких двох точок A і B перерізу тіла (або траєкторії цих точок); миттєвий центр швидкостей знаходиться у точці перетину перпендикулярів, що встановлені з точок A і B до швидкостей цих точок (або до дотичних к траєкторіям).

2. Для визначення швидкості деякої точки тіла необхідно знати модуль і напрямки швидкості однієї точки і напрямки швидкості іншої її точки B . Тоді, миттєвий центр швидкостей буде знаходитися на перехрещенні перпендикулярів проведених з точок A і B до векторів $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_B$. Після цього, знаючи $\vec{v}_A$, знайдемо за формулою (10.4) швидкість $\vec{v}_M$ будь-якої точки M тіла.

Спрямований вектор $\vec{v}_M$ перпендикулярно $\overline{PM}$ у бік обертання тіла.

3. Кутова швидкість тіла, як видно з формул (10.3) дорівнює у кожний момент часу відношенню швидкості будь-якої точки перерізу S до її відстані від миттєвого центру ρ :

$$\omega = \frac{v_B}{PB}. \quad (10.5)$$

Знайдемо ще інший вираз для ω . Із рівнянь (10.2), (10.3,а) витікає, що $v_{BA} = |\vec{v}_B - \vec{v}_A|$ і $v_{BA} = \omega \cdot AB$. Звідки

$$\omega = \frac{|\vec{v}_B - \vec{v}_A|}{AB} = \frac{|\vec{v}_B + (-\vec{v}_A)|}{AB}. \quad (10.6)$$

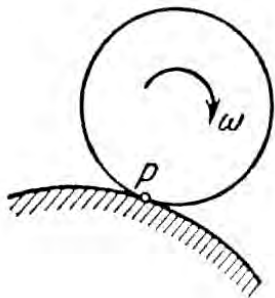


Рис. 10.9

Розглянемо деякі окремі випадки визначення миттєвих центрів швидкостей.

1) Якщо плоскопаралельний рух здійснюється шляхом кочення без ковзання одного циліндричного тіла по поверхні іншого, причому друге тіло нерухоме (рис. 10.9), то точка дотику P має в даний момент часу швидкість, що дорівнює нулю і тому є миттєвим центром швидкостей ($v_P=0$, так як точка дотику обох тіл при відсутності ковзання повинна мати однакову швидкість, але інше тіло нерухоме). Прикладом може бути кочення колеса по рейці.

2) Якщо швидкості точок A і B тіла паралельні одна одній, причому лінія AB не перпендикулярна $\vec{v}_A$ (рис. 10.10,а), то миттєвий центр швидкостей лежить у нескінченності і швидкості усіх точок паралельні $\vec{v}_A$. При цьому з теореми про проекції швидкостей витікає, що $v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta$, тобто $v_B = v_A$ (так як $\alpha=\beta$); аналогічний результат отримуємо для усіх інших точок тіла). Отже, у даному випадку швидкості всіх точок тіла в заданий момент часу рівні між собою за модулем і за напрямком, тобто мають *миттєве поступальне розподілення швидкостей*. Такий стан руху тіла ще називають *миттєво поступальним*. Кутова швидкість ω тіла в цей момент часу, як видно з формул (10.6) дорівнює нулю.

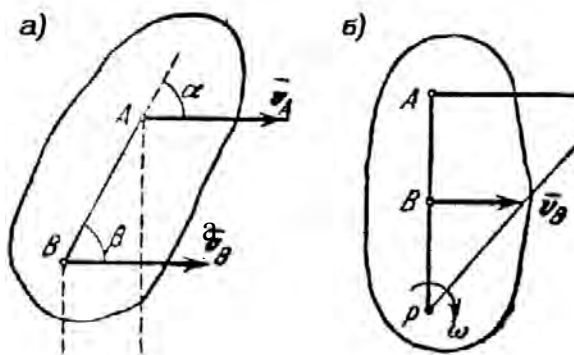


Рис. 10.10

3) Якщо швидкості точок A і B тіла паралельні одна одній і при цьому лінія AB перпендикулярна до $\vec{v}_A$, тоді миттєвий центр швидкостей P визначається побудовою, яка показана на рис. 10.10,б. Справедливість побудови витікає з пропорції (10.4). Цей випадок відрізняється від попередніх тим, що для знаходження миттєвого

центру швидкостей, крім напрямку треба знати також модулі швидкостей $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_B$.

4) Якщо відомі вектор швидкості $\vec{v}_B$ будь-якої точки перерізу S і кутова швидкість ω , то положення миттєвого центру швидкостей P , що лежить на перпендикулярі до $\vec{v}_B$ (рис. 10.8), можна знайти із залежності (10.5), яка дає $BP = v_B / \omega$.

Приклад. Розв'яжемо попередню задачу (рис. 10.6) за допомогою миттєвого центра швидкостей, для випадку, коли кочення колеса по рейці відбувається без ковзання. Тут точка торкання K колеса є миттєвим центром швидкостей. Тоді швидкість точки M і v_c визначимо як швидкість обертального руху навколо цього центра $v_M = \omega \cdot MK$, $v_c = \omega \cdot CK$. Тобто

$$\frac{v_M}{MK} = \frac{v_c}{CK}.$$

Враховуючи, що $CK=R$, а $MK = 2R \cos \alpha$, знаходимо:

$$v_M = 2v_c \cos \alpha.$$

Відмітимо, що у випадку коли кочення відбувається без ковзання кутова швидкість колеса не може бути довільною величиною, а дорівнює $\omega = v_c / R$.

10.5 Визначення прискорення точок тіла

Як витікає з рис. 10.4 положення точки M визначається радіус-вектором $\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{r}'$, де $\vec{r}' = \overline{AM}$. Тоді

$$\vec{a}_M = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}_A}{dt^2} + \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2}.$$

В отриманій рівності величина $\frac{d^2 \vec{r}_A}{dt^2} = \vec{a}_A$ є прискоренням полюса A , а

величина $\frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} = \vec{a}_{MA}$ визначає прискорення, яке точка M отримує разом з тілом при обертальному русі навколо полюса A . Отже,

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}. \quad (10.7)$$

При цьому для прискорення $\vec{a}_{MA}$ точки M в обертальному русі навколо полюса A за формулами (9.12), (9.13) буде:

$$a_{MA} = MA \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}, \quad (10.8)$$

де ω і ε – відповідно, кутова швидкість і кутове прискорення тіла; μ – кут між напрямленнями $\vec{a}_{MA}$ і відрізком MA .

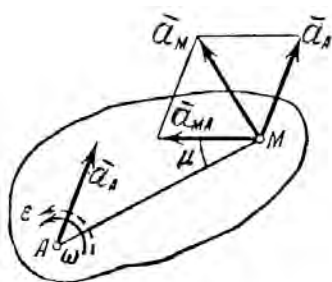


Рис. 10.11

Таким чином, прискорення будь-якої точки M тіла геометрично складається з прискорення будь-якої іншої точки, прийнятої за полюс, і прискорення точки M у її обертальному русі разом з тілом навколо цього полюса.

Модуль і напрямок прискорення $\vec{a}_M$ знаходяться побудовою відповідного паралелограма (рис. 10.11). Проте, обчислювання величини $\vec{a}_M$ за допомогою цього паралелограма ускладнює розрахунок, так як попередньо треба буде визначити кут μ , а потім кут між векторами $\vec{a}_{MA}$ і $\vec{a}_A$. Тому, при розв'язанні задач більш зручно вектор $\vec{a}_{MA}$ замінити його дотичною (a_{MA}^{τ}) і нормальною (a_{MA}^n) складовими, де

$$a_{MA}^{\tau} = AM \cdot \varepsilon, \quad a_{MA}^n = AM \omega^2. \quad (10.9)$$

Вектор $\vec{a}_{MA}^{\tau}$ направлений перпендикулярно AM у бік обертання, якщо рух прискорений, і проти обертання, якщо він сповільнений; вектор $\vec{a}_{MA}^n$ завжди направлений від точки M до полюса A (рис. 10.12).

Тоді, замість (10.7) отримуємо:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}^{\tau} + \vec{a}_{MA}^n \quad (10.10)$$

Якщо полюс A рухається не прямолінійно, то його прискорення буде також складатися з дотичного і нормального.

Тоді:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{MA}^{\tau} + \vec{a}_{MA}^n. \quad (10.11)$$

При розв'язуванні задач за полюс вибирають точку, прискорення якої відоме, а модулі двох останніх складових $\vec{a}_{MA}^{\tau}$ і $\vec{a}_{MA}^n$ обчислюють за формулами (10.9).

10.6 Миттєвий центр прискорень

У кожний момент руху плоскої фігури в своїй площині, якщо ω і ε не дорівнюють нулю, є єдина точка цієї фігури, прискорення якої дорівнює нулю. Цю точку називають миттєвим центром прискорень.

Позначимо миттєвий центр прискорення літерою Q , тоді (рис. 10.13):

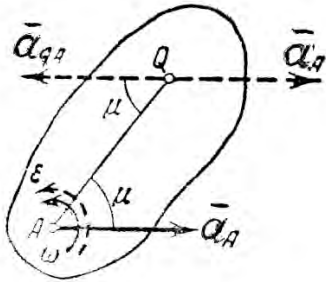


Рис. 10.13

$$\begin{aligned}\bar{a}_Q &= \bar{a}_A + \bar{a}_{QA} = 0 \\ \bar{a}_A &= -\bar{a}_{QA}\end{aligned}\quad (10.12)$$

Тобто, миттєвий центр прискорення – це та точка Q , в якій прискорення її обертального руху за модулем дорівнює прискоренню полюса A і спрямоване у протилежний бік. Але

$$a_{QA} = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = a_A;$$

звідси

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \quad (10.13)$$

Як відомо, $\bar{a}_{QA}$ нахилена до AQ під кутом μ , при цьому $\operatorname{tg} \mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$.

Тоді, як видно з рис. 10.13, для визначення положення миттєвого центра прискорень (точки Q) необхідно від вектора $\bar{a}_A$ відкласти кут μ в напрямку кутового прискорення і під цим кутом відкласти відрізок AQ .

Якщо точку Q взяти за полюс, то відповідно формулі (10.12), прискорення будь-якої точки M тіла буде дорівнювати:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_Q + \bar{a}_{MQ}, \quad a_M = QM\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad (10.14)$$

так як $a_Q = 0$.

Отже, прискорення будь-якої точки тіла дорівнює її прискоренню в обертальному русі навколо миттєвого центра прискорень Q . При цьому, як витікає з (10.14)

$$\frac{a_M}{QM} = \frac{a_A}{QA} \dots \text{та ін.}, \quad (10.15)$$

тобто прискорення точок тіла пропорційні їх відстані від миттєвого центра прискорень Q (рис. 10.4).

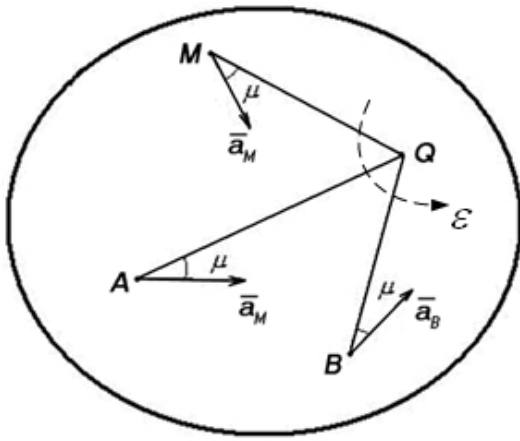


Рис. 10.14

Приклад 1. У кривошипно-шатунному механізмі кривошип довжиною $OA = l$ обертається рівномірно з кутовою швидкістю ω_{OA} . Визначити швидкість повзуна в заданому положенні механізму (рис. 10.15).

Розв'язок. Повзун В рухається вздовж осі циліндра поступально. Тому швидкість точки В спрямована вздовж осі циліндра (рис. 10.16).

Ланка ОА здійснює обертальний рух навколо осі, яка проходить крізь центр О.

Вектор $\vec{v}_A$ спрямований перпендикулярно до ланки ОА, а модуль швидкості $v_A = \omega_{OA} \cdot OA$.

Ланка АВ здійснює плоский рух. Скористаємось теоремою про проекції швидкостей двох точок тіла при плоскому русі на пряму, яка їх з'єднує, і спроектуємо вектори $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_B$ на пряму АВ. Отримаємо

$$v_B \cos(18^\circ) = v_A \cos(35^\circ),$$

звідки

$$v_B = \frac{v_A \cos(35^\circ)}{\cos(18^\circ)}$$

або

$$v_B = \frac{\omega_{OA} OA \cos(35^\circ)}{\cos(18^\circ)}.$$

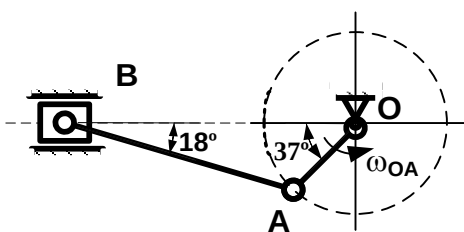


Рис. 10.15

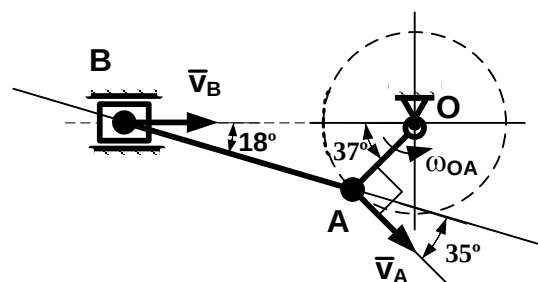
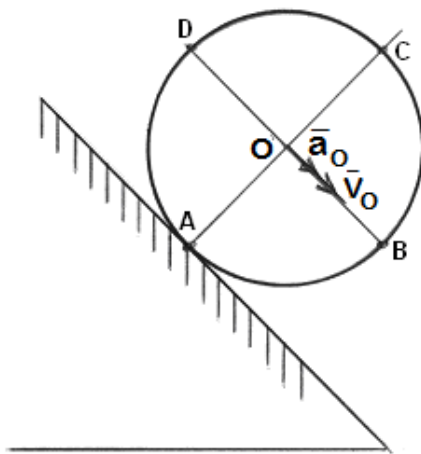
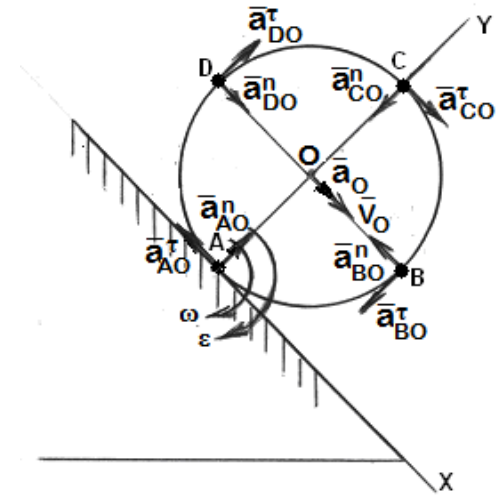


Рис. 10.16

Приклад 2. Колесо котиться без ковзання у вертикальній площині по похилій прямолінійній поверхні (рис. 10.17,а). Знайти прискорення кінців двох взаємно перпендикулярних діаметрів колеса, із яких один паралельний поверхні, якщо в цей момент швидкість центра колеса $v_0 = 1$ м/с, прискорення центра колеса $a_0 = 3$ м/с², радіус колеса $R = 0,5$ м.



а



б

Рис. 10.17

Розв'язок

Визначення прискорення точки А.

Колесо здійснює плоский рух у вертикальній площині. За умовою задачі відомі швидкість і прискорення точки О, яку приймемо за полюс.

Тоді за формулою (10.10)

$$\bar{a}_A = \bar{a}_O + \bar{a}_{AO}, \quad (a)$$

де

$$\bar{a}_O = \bar{a}_O^n + \bar{a}_O^\tau; \quad \bar{a}_{AO} = \bar{a}_{AO}^n + \bar{a}_{AO}^\tau. \quad (б)$$

З урахуванням (б) формула (а) набуває вигляду:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_O^n + \bar{a}_O^\tau + \bar{a}_{AO}^n + \bar{a}_{AO}^\tau. \quad (в)$$

Оскільки траєкторією точки О є пряма лінія, то $\rho = \infty$, а $a_O^n = \frac{v_O^2}{\rho} = 0$.

Отже, $\bar{a}_O = \bar{a}_O^\tau$, а формула (в) матиме вигляд:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_O + \bar{a}_{AO}^n + \bar{a}_{AO}^\tau. \quad (г)$$

Обчислимо складові прискорення точки А.

Передусім обчислимо кутову швидкість колеса. Відомо, що точка дотику колеса А з поверхнею є миттєвим центром швидкостей. Тоді кутова швидкість колеса:

$$\omega = \frac{v_0}{AO} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ с}^{-1}.$$

Напрямок ω визначається напрямком $\vec{v}_O$, що показано на рис. 10.17,б.

Модуль прискорення $\bar{a}_{AO}^n$ визначаємо за формулою

$$a_{AO}^n = \omega^2 \cdot AO.$$

$$a_{AO}^n = 2^2 \cdot 0,5 = 2 \text{ м/с}^2.$$

Модуль дотичного прискорення $\bar{a}_{AO}^\tau$ визначається за формулою

$$a_{AO}^\tau = \varepsilon \cdot AO.$$

Для визначення ε застосуємо рівність

$$\omega = \frac{v_O}{AO}.$$

Тут величина $AO = R$ і залишається постійною при будь-якому положенні колеса. Тоді кутове прискорення буде дорівнювати отримаємо:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R} \cdot \frac{dv_O}{dt},$$

де

$$\frac{dv_O}{dt} = a_O^\tau = a_O, \quad \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon.$$

Отже:

$$\varepsilon = \frac{a_O}{R}.$$

Підставляємо значення a_O , R і знаходимо ε :

$$\varepsilon = \frac{3}{0,5} = 6 \text{ с}^{-2}.$$

Так як знаки ω і ε співпадають, то обертання колеса прискорене і ε буде напрямлене у той бік, що й ω (рис. 10.17, б).

Враховуючи значення ε і OA , знаходимо:

$$a_{AO}^\tau = 6 \cdot 0,5 = 3 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\bar{a}_{AO}^\tau$ напрямляємо за ε , вектор $\bar{a}_{AO}^n$ від точки A до полюса O .

Проведемо вісі Ax і Ay і спроектуємо векторне рівняння (г) на ці вісі.

Вектор $\bar{a}_A$ в рівнянні (г) невідомий за модулем і напрямком. Тому цей вектор замінимо складовими $\bar{a}_{Ax}$ і $\bar{a}_{Ay}$, які напрямляємо уздовж проведених осей:

$$a_{Ax} = a_O - a_{AO}^{\tau} = 0;$$

$$a_{Ay} = a_{AO}^n = 2 \text{ м/с}^2.$$

Модуль прискорення точки A :

$$a_A = \sqrt{a_{Ax}^2 + a_{Ay}^2}.$$

$$a_A = \sqrt{2^2} = 2 \text{ м/с}^2.$$

За таким самим алгоритмом визначаємо прискорення інших точок.

Прискорення точки B

$$\bar{a}_B = \bar{a}_O + \bar{a}_{BO}^n + \bar{a}_{BO}^{\tau}. \quad (\text{д})$$

Модуль прискорення $\bar{a}_{BO}^n$:

$$a_{BO}^n = \omega^2 \cdot BO = 2^2 \cdot 0,5 = 2 \text{ м/с}^2.$$

Вектор прискорення $\bar{a}_{BO}^n$ напрямляємо від точки B до точки O (рис 10.17,б).

Модуль прискорення $\bar{a}_{BO}^{\tau}$:

$$a_{BO}^{\tau} = \varepsilon \cdot BO = 6 \cdot 0,5 = 3 \text{ м/с}^2.$$

Проектуємо векторне рівняння (д) на вісі Ax і Ay :

$$a_{Bx} = a_O - a_{BO}^n;$$

$$a_{Bx} = 3 - 2 = 1 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{By} = -a_{BO}^{\tau} = -3 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{By} = -3 \text{ м/с}^2.$$

Модуль прискорення $\bar{a}_B$:

$$a_B = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = 3,16 \text{ м/с}^2.$$

Прискорення точки С

Із алгоритму визначення прискорень точок А і В видно, що нормальні і тангенціальні складові обертального руху навколо полюса однакові за модулем, але різні за напрямком. Отже надалі розрахунки нормальних і тангенціальних складових прискорень точок не будемо проводити, а їх напрямки вкажемо на рис. 10.17,б і зразу будемо проектувати відповідні векторні рівняння з визначення прискорень точок С і D на вибрані вісі координат.

$$\bar{a}_C = \bar{a}_O + \bar{a}_{CO}^n + \bar{a}_{CO}^\tau. \quad (\text{е})$$

Проекції векторного рівняння (е) на вісі:

$$\begin{aligned} a_{Cx} &= a_O + a_{CO}^\tau, \\ a_{Cx} &= 3 + 3 = 6 \text{ м/с}^2, \\ a_{Cy} &= -a_{CO}^n = -2 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Модуль прискорення точки С:

$$\begin{aligned} a_C &= \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2}, \\ a_C &= \sqrt{6^2 + (-2)^2} = 6,32 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Прискорення точки D

Векторне рівняння:

$$\bar{a}_D = \bar{a}_O + \bar{a}_{DO}^n + \bar{a}_{DO}^\tau. \quad (\text{ж})$$

Проекції векторного рівняння (ж) на вісі

$$\begin{aligned} a_{Dx} &= a_O + a_{DO}^n, \\ a_{Dx} &= 3 + 2 = 5 \text{ м/с}^2, \\ a_{Dy} &= a_{DO}^\tau, \\ a_{Dy} &= 3 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Модуль прискорення точки D:

$$\begin{aligned} a_D &= \sqrt{a_{Dx}^2 + a_{Dy}^2}, \\ a_D &= \sqrt{5^2 + 3^2} = 5,83 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Відповідь: прискорення точок А, В, С, D дорівнюють:

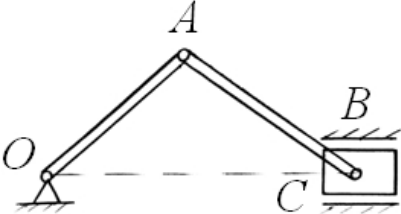
$$a_A = 2 \text{ м/с}^2; \quad a_B = 3,16 \text{ м/с}^2; \quad a_C = 6,32 \text{ м/с}^2; \quad a_D = 5,83 \text{ м/с}^2.$$

Питання для самоконтролю (Лекція 11)

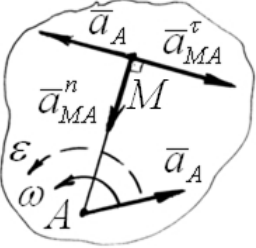
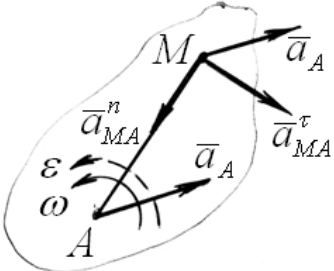
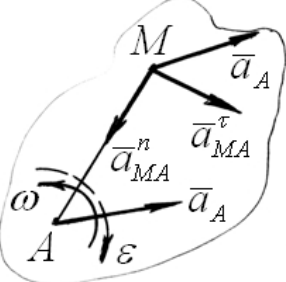
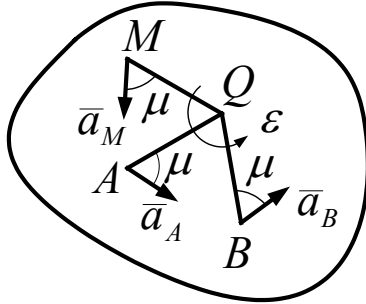
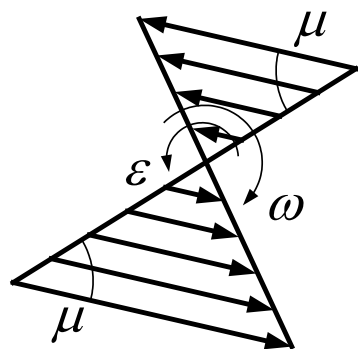
1. Який рух називається плоскопаралельним?
2. Чому при вивченні плоскопаралельного руху, замість всього тіла розглядають тільки його переріз?
3. Із яких двох рухів складається плоскопаралельний рух тіла?
4. В чому полягає теорема про проекції швидкостей двох точок твердого тіла на пряму, що з'єднує ці точки?
5. Чому дорівнює швидкість у миттєвому центрі швидкостей?
6. Як визначити швидкість будь-якої точки тіла з використанням миттєвого центру швидкостей?
7. Що треба знати для визначення миттєвого центру швидкостей і швидкості точки тіла?
8. В якому випадку при коченні одного циліндричного тіла по поверхні іншого нерухомого тіла точка дотику тіл є миттєвим центром швидкостей?
9. Як визначити миттєвий центр швидкостей коли швидкості двох точок тіла паралельні одна одній?
10. Чому дорівнює прискорення будь-якої точки тіла при плоско-паралельному русі?

Тести до теми 11 «Плоскопаралельний рух твердого тіла»

Таблиця 11.1

№	Питання
1	2
1	Плоскопаралельним називається рух тіла, при якому точки переміщуються: 1. в одній площині; 2. по однаковим траєкторіям; 3. паралельно деякій площині.
2	 Для механізму, що наведений на рисунку, плоскопаралельний рух здійснює ланка: 1. ОА; 2. АВ; 3. СД.
3	При вивченні плоскопаралельного руху замість всього тіла зручно зображати тільки переріз тому, що: 1. точки, які лежать на перпендикулярі до цього перерізу рухаються тотожно; 2. всі точки перерізу рухаються тотожно; 3. будь-яка лінія, що проведена в цьому перерізі залишається паралельній сама собі.

1	2
4	Плоскопаралельний рух твердого тіла складається із: 1. поступальних рухів окремих точок; 2. обертального руху навколо довільного полюса A; 3. з поступального руху полюса A та обертального руху навколо цього полюса.
5	Швидкість будь-якої точки M тіла при плоскопаралельному русі геометрично складається з: 1. проєкцій швидкостей двох точок на пряму, що з'єднує ці точки; 2. швидкості будь-якої точки A, прийнятої за полюс, і швидкості точки M у її обертанні разом з тілом навколо цього полюса; 3. Обертального руху навколо довільного полюса A.
6	Проекції швидкостей двох точок тіла при плоскопаралельному русі на пряму, що з'єднує ці точки: 1. рівні між собою; 2. дорівнюють швидкості обертального руху; 3. дорівнюють нулю.
7	Миттєвим центром швидкостей називається точка перерізу S тіла, швидкість якої в даний момент часу дорівнює: 1. максимальному значенню; 2. нулю; 3. добутку кутової швидкості на радіус обертання.
8	Миттєвий центр швидкостей лежить на: 1. перетині перпендикулярів, проведених до швидкостей двох точок тіла; 2. перетині ліній, що співпадають з напрямком швидкостей; 3. на осі обертання, що проходить через центр ваги.
9	За допомогою миттєвого центра швидкостей визначають швидкість точок тіла, що рухається плоскопаралельно як швидкість руху: 1. поступального; 2. обертального; 3. обертально-поступального.
10	Якщо плоскопаралельний рух здійснюється шляхом кочення без ковзання одного циліндричного тіла по поверхні іншого нерухомого тіла, то миттєвий центр швидкостей співпадає з: 1. центром симетрії тіла; 2. точкою дотику тіл; 3. будь-якою точкою на поверхні тіла.
11	Якщо швидкості точок A і B тіла паралельні одна одній, причому лінія AB не перпендикулярна AB (див. рисунок), то тіло здійснює рух: 1. миттєво-обертальний; 2. миттєво-поступальний; 3. прямолінійний.

1	2
12	На якому рисунку правильно визначено складові прискорення точки М? а)  б)  в)  1. а; 2. б; 3. в.
13	 На рисунку буквою Q позначено: - миттєвий центр швидкостей; - поліус тіла; - миттєвий центр прискорень.
14	 На рисунку наведена епюра: - прискорень точок тіла; - швидкостей точок тіла; - переміщень точок тіла.

ЛЕКЦІЯ 12

Розділ 11. Рух твердого тіла навколо нерухомої точки і рух вільного твердого тіла

11.1 Рух твердого тіла, що має одну нерухому точку

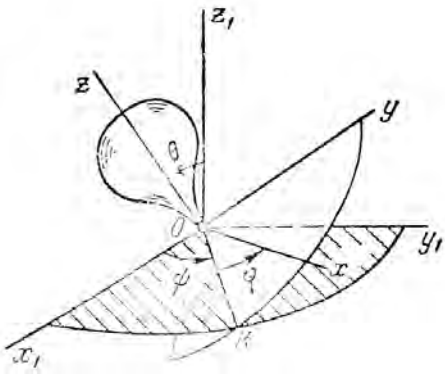


Рис. 11.1

Розглянемо рух твердого тіла, що має одну нерухому точку O відносно до системи відліку $Ox_1y_1z_1$ (рис. 11.1). Для цього зв'яжемо з тілом тригранник $Oxyz$, від положення якого будемо судити про положення тіла. Лінія OK , уздовж якої перетинаються площини Oxy і Ox_1y_1 , називають лінією вузлів. Тоді положення тригранника $Oxyz$ по відношенню до осей $Ox_1y_1z_1$ можна визначити кутами: $\varphi = \angle KOx$, $\psi = \angle x_1OK$, $\theta = \angle z_1Ozx_1$. Ці кути

називають кутами Ейлера і мають такі назви: φ – кут власного обертання, ψ – кут прецесії, θ – кут нутації.

Кути Ейлера широко використовуються в теорії гіроскопів. Рух гіроскопа

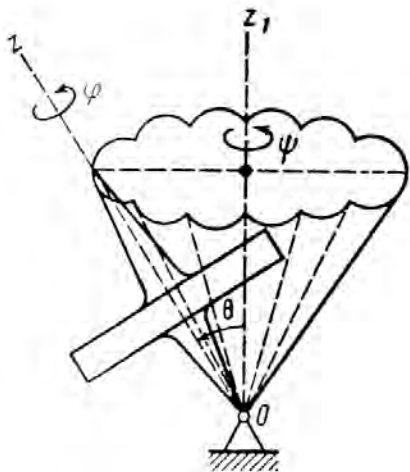


Рис. 11.2

у загальному випадку складається з трьох рухів (рис. 11.2): обертання з великою кутовою швидкістю навколо власної осі, при якому змінюється кут φ ; обертання гіроскопа разом зі своєю віссю симетрії навколо нерухомої осі Oz_1 , при якому змінюється кут прецесії ψ ; коливання власної осі Oz , гіроскопа відносно нерухомої осі Oz_1 , при якому змінюється кут нутації θ . Таким чином, для визначення положення твердого тіла з однією нерухомою точкою в будь-який момент часу необхідно задати кути Ейлера як однозначні функції часу, тобто

$$\varphi=f_1(t), \quad \psi=f_2(t), \quad \theta=f_3(t). \quad (11.1)$$

Рівняння (11.1) є рівняннями обертання твердого тіла навколо нерухомої точки.

За теоремою Ейлера–Даламбера (доведення опускається) витікає: будь-яке елементарне переміщення тіла, що має нерухому точку, є елементарний поворот навколо деякої миттєвої осі обертання, яка проходить через цю точку

Від нерухомої осі обертання миттєва вісь обертання OP відрізняється тим, що її напрямок у просторі весь час змінюється. Рух тіла можливо представити як серію послідовних елементарних обертань навколо нових миттєвих осей обертання (рис. 11.3).

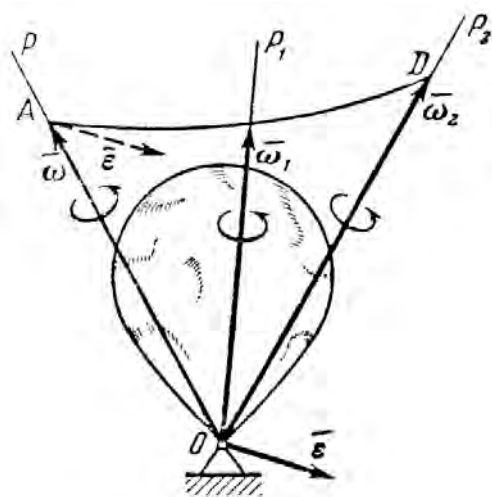


Рис. 11.3

Розглянемо кінематичні характеристики цього руху.

1. Кутова швидкість ω , з якою тіло здійснює елементарний поворот навколо миттєвої осі обертання називається *миттєвою кутовою швидкістю*. Миттєву кутову швидкість можна зобразити вектором (рис. 11.3). Оскільки напрямок осі OP безперервно змінюється, то вектор $\vec{\omega}$ з часом буде змінюватися не тільки за напрямком, але і чисельно, а його кінець буде описувати у просторі деяку криву AD , що є годографом вектора $\vec{\omega}$.

2. Кутове прискорення тіла в даний момент часу, або миттєве кутове прискорення $\vec{\varepsilon}$, яке визначає зміну кутової швидкості $\vec{\omega}$ і за модулем і за напрямком, дорівнює $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$. За аналогією з вектором $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ вектор $\vec{\varepsilon}$ буде направлений по дотичній до кривої AD у відповідній точці (рис. 11.3).

11.2 Швидкість і прискорення точок тіла

Так як при русі навколо нерухомої точки тіло має у кожний момент часу миттєву вісь обертання OP , то швидкість будь-якої його точки M (рис. 11.4) у цей момент руху визначається формулою

$$v = \omega h, \quad (11.2)$$

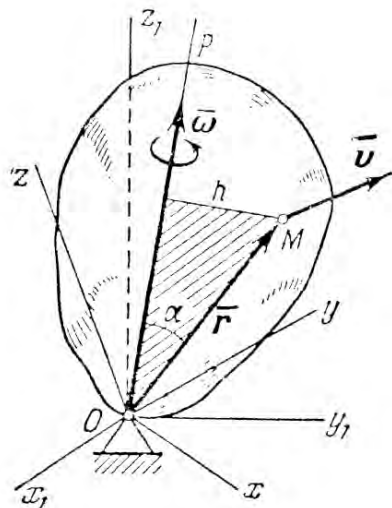


Рис. 11.4

де ω – кутова швидкість тіла; h – відстань від точки M до миттєвої осі обертання.

Вектор швидкості $\vec{v}$ спрямований перпендикулярно площині MOP у бік обертання тіла. Швидкість також можна визначити формулою

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (11.3)$$

Дійсно, цей векторний добуток за модулем і напрямком співпадає з вектором швидкості, так як $|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin(\vec{\omega}, \vec{r}) = \omega h$. Вектор прискорення точки M знайдемо диференціюючи рівність (11.3) за часом:

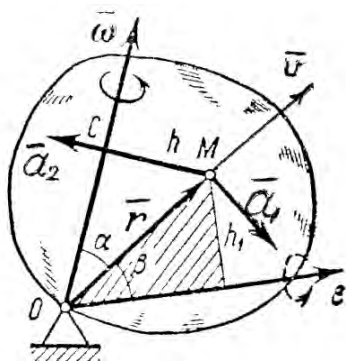


Рис. 11.5

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \left(\frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} \right) + \left(\bar{\omega} \times \bar{r} \right).$$

Так як $\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\varepsilon}$, а $\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}$, то остаточно маємо

$$\bar{a} = (\bar{\varepsilon} \times \bar{r}) + (\bar{\omega} \times \bar{v}). \quad (11.4)$$

Прискорення $\bar{a}_1 = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}$ називають обертальним, а прискорення $\bar{a}_2 = \bar{\omega} \times \bar{v}$ – доосьовим. Напрямок векторів $\bar{a}_1$ і $\bar{a}_2$ визначаємо відповідно до правил векторної алгебри (рис. 11.5).

Приклад. Визначити швидкість точки C катка (рис. 11.6), якщо задана швидкість центра катка $\bar{v}_A$. Каток при русі котиться без ковзання по нерухомій конічній поверхні K.

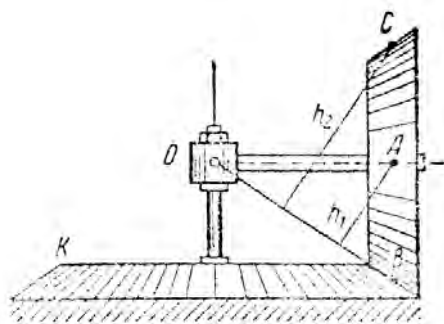


Рис. 11.6

Розв'язок Каток рухається навколо нерухомої точки O. Точка B також має швидкість, що дорівнює швидкості точки O, тобто дорівнює нулеві. Тому лінія OB є миттєвою віссю обертання. Тоді $v_A = \omega h_1$, де ω – кутова швидкість катка при його обертанні навколо осі OB, а h_1 – відстань точки A від цієї вісі. Звідси $\omega = v_A / h_1$. Швидкість точки C буде дорівнювати $v_C = \omega h_2$, де h_2 – відстань точки C від осі OB. Так як у даному випадку $h_2 = 2h_1$, то $v_C = 2v_A$.

11.3 Похідні від одиничних векторів рухомих осей

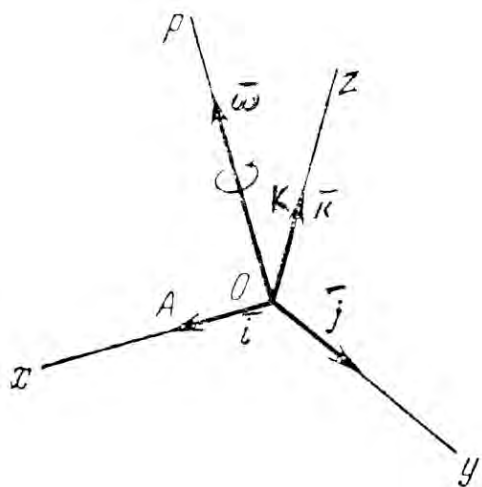


Рис. 11.7

Якщо осі рухаються поступально, то їх орти $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ залишаються сталими. Але якщо осі (рис. 11.7) здійснюють обертальний рух навколо будь-якої осі OP, то орти осей вже не будуть величинами сталими, так як їх напрямки з часом будуть змінюватися. Розглянемо орт $\bar{i}$ як радіус-вектор $\bar{r}_A = \bar{i}$ точки A, що лежить на осі Ox. Тоді

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} = \bar{v}_A.$$

Але за формулою (11.3) $v_A = \bar{\omega} \times \bar{r}_A = \bar{\omega} \times \bar{i}$, де ω – кутова швидкість обертання навколо осі OP . Аналогічні співвідношення отримуємо і для похідних від $\bar{j}$ і $\bar{k}$. В результаті маємо:

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{i} \quad \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{j}, \quad \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{k}. \quad (11.5)$$

Рівності (11.5) називаються формулами Пуассона.

11.4 Загальний випадок руху вільного твердого тіла

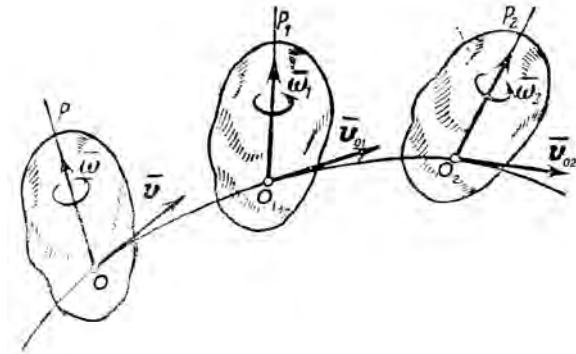


Рис. 11.8

Аналогічно тому, як це було зроблено при розгляді плоскопаралельного руху можна показати, що рух вільного твердого тіла складається у загальному випадку з поступального руху, при якому всі точки тіла рухаються як вільно вибраний полюс O зі швидкістю $\bar{v}_O$ і з серії елементарних поворотів з кутовою швидкістю ω навколо миттєвих осей обертання, що

проходять через полюс O (рис. 11.8).

Рівняння руху по відношенню до системи координат Ox_1y_1 будуть мати вигляд:

$$\left. \begin{aligned} x_O &= f_1(t), & y_O &= f_1(t), & z_O &= f_3(t); \\ \varphi &= f_4(t), & \psi &= f_3(t), & \theta &= f_4(t). \end{aligned} \right\} \quad (11.6)$$

Швидкість $\bar{v}$ будь-якої точки M складається зі швидкості $\bar{v}_O$ полюса O і швидкості $\bar{v}_{MO}$, яку точка M отримує при русі разом з тілом навколо полюса O , тобто

$$\bar{v} = \bar{v}_O + \bar{v}_{MO}.$$

Відповідно до формули (11.3) $\bar{v}_{MO} = \bar{\omega} \times \bar{r}$, де $\overline{OM} = \bar{r}$. Тоді, остаточно:

$$\bar{v} = \bar{v}_O + (\bar{\omega} \times \bar{r}). \quad (11.7)$$

Аналогічно, для прискорення будь-якої точки маємо:

$$\bar{a} = \bar{a}_O + \bar{a}_{MO}. \quad (11.8)$$

При цьому прискорення точки $\bar{a}_{MO}$ визначається рівністю (11.4) у якій : $\bar{v} = \bar{v}_{MO} = \bar{\omega} \times \bar{r}$. Тоді отримуємо:

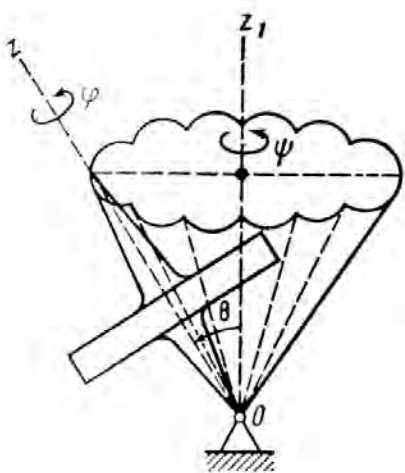
$$\bar{a} = \bar{a}_O + (\bar{\varepsilon} \times \bar{r}) + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}). \quad (11.9)$$

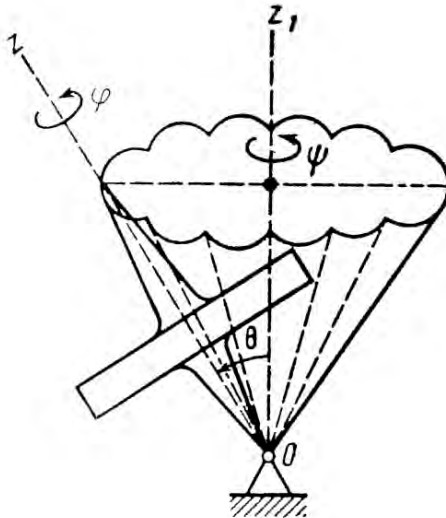
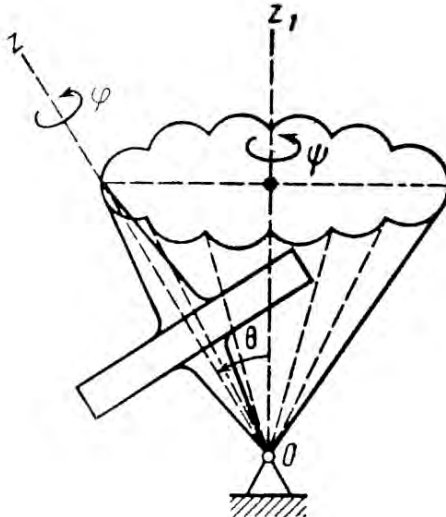
Питання для самоконтролю (Лекція 12)

1. Із яких рухів складається обертання тіла навколо нерухомої точки? Які кути визначають рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої точки?
2. В чому полягає теорема Ейлера-Даламбера.
3. Що називається миттєвою кутовою швидкістю при обертанні твердого навколо нерухомої точки?
4. Як можна розглядати рух тіла використовуючи теорему Ейлера-Даламбера?
5. Чому дорівнює і що визначає кутове прискорення тіла в даній момент часу?
6. Якою формулою виражається модуль і вектор швидкості будь-якої точки М тіла при його обертанні навколо нерухомої точки?
7. Якою формулою визначається прискорення будь-якої точки М тіла при його обертанні навколо нерухомої точки?
8. Чому дорівнюють похідні від одиничних векторів осей, які здійснюють обертальний рух навколо будь-якої осі ОР?
9. Із яких рухів складається рух вільного твердого тіла?
10. Якими формулами визначається вектор швидкості і вектор прискорення будь-якої точки тіла при вільному русі твердого тіла?

Тести до теми 12 «Рух твердого тіла навколо нерухомої точки і рух вільного твердого тіла»

Таблиця 12.1

№	Питання
1	2
1	Положення тіла, що рухається навколо нерухомої точки визначається кутами: 1. Лагранжа; 2. Ейлера; 3. Бернуллі.
2	Скільки кутів визначають рух твердого тіла навколо нерухомої точки? 1. три; 2. два; 3. чотири.
3	 Яку назву має кут ψ, який змінюється при обертанні гіроскопа разом зі своєю віссю симетрії Oz (см. рис.)? 1. кут власного обертання; 2. кут прецесії; 3. кут нутації.

1	2
4	 Кут θ, при змінюванні якого відбувається коливальний рух власної осі гіроскопа Oz відносно нерухомої осі Oz_1 називається кутом: 1. власного обертання; 2. прецесії; 3. нутації.
5	 Кут φ, який змінюється при обертанні гіроскопа навколо власної осі, називається: 1. прецесії; 2. нутації; 3. власного обертання.
6	За теоремою Ейлера-Даламбера витікає: будь-яке елементарне переміщення тіла, що має нерухому точку є елементарний поворот: 1. навколо миттєвого центра швидкостей; 2. навколо деякої миттєвої осі обертання, яка проходить через цю точку; 3. навколо власної осі обертання.
7	Миттєвою кутовою швидкістю тіла, що рухаються навколо точки, називається швидкість, з якою тіло здійснює елементарний поворот навколо: 1. миттєвої осі обертання; 2. миттєвого центра обертання; 3. власної осі обертання.
8	Кутове прискорення тіла, що має нерухому точку, визначає зміну кутової швидкості за: 1. модулем; 2. напрямком; 3. модулем і напрямком.

1	2
9	При русі тіла навколо нерухомої точки векторний добуток кутової швидкості на радіус-вектор точки, тобто $\vec{\omega} \times \vec{r}$, визначає вектор: 1. швидкості цієї точки; 2. прискорення цієї точки; 3. вектор кутового прискорення.
10	При русі тіла навколо нерухомої точки формула $(\vec{\varepsilon} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \vec{v})$ визначає вектор: 1. прискорення точки тіла $\vec{a}$; 2. швидкості точки $\vec{v}$; 3. прискорення точки тіла при обертанні навколо власної осі.
11	Формула $\vec{v} = \vec{v}_0 + (\vec{\omega} \times \vec{r})$ визначає вектор швидкості точки тіла при: 1. русі тіла навколо нерухомої точки; 2. вільному русі тіла; 3. русі тіла навколо власної осі обертання.
12	Формула $\vec{a} = \vec{a}_0 + (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ визначає вектор прискорення точки тіла при русі: 1. тіла навколо нерухомої осі; 2. тіла навколо власної осі обертання; 3. вільного твердого тіла

ЛЕКЦІЯ 13

Розділ 12. Складний рух точки

12.1 Відносний, переносний та абсолютний рух

У ряді випадків при розв'язуванні задач теоретичної механіки є доцільним (а іноді і необхідним) розглядати рух точки (або тіла) одночасно по відношенню до двох систем відліку, з яких одна вважається умовно нерухомою, а інша рухається по відношенню до першої. Рух, що здійснює при цьому точка (або тіло) можна розглядати як складений або складний.

Наприклад, рух кулі, що котиться по палубі теплохода, який рухається, можна розглядати як складний. Цей складний рух складається з кочення кулі по відношенню до палуби (до рухомої системи відліку) і руху разом з палубою по відношенню до берега (до нерухомої системи відліку). Таким чином, складний рух кулі розкладається на два більш простих рухи.

Розглянемо складний рух точки M , що рухається по відношенню до рухомої системи відліку $Oxyz$, яка рухається по відношенню до другої нерухомої системи відліку $O_1x_1y_1z_1$ (її рух по відношенню до інших систем не розглядається) (рис. 12.1). Кожна з цих систем, звичайно, зв'язана з певним тілом, на рис. 12.1 не показаним.

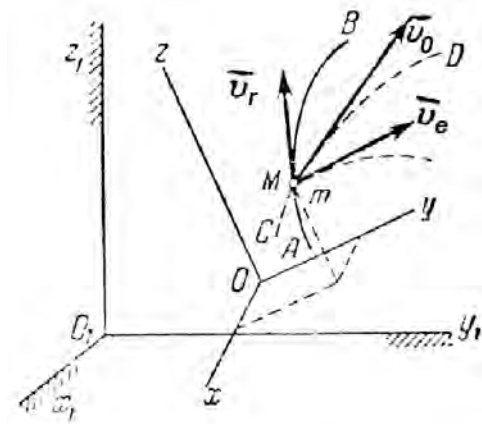


Рис. 12.1

Введемо наступні визначення:

1. Рух, що здійснює точка M по відношенню до рухомої системи відліку називається *відносним рухом*. Такий рух буде бачити спостерігач, зв'язаний з рухомими осями $Oxyz$, рухаючись разом з ними. У наведеному прикладі це рух кулі відносно палуби. Відповідно, траєкторія, швидкість і прискорення точки відносно рухомої системи відліку будуть називатися відносною траєкторією (AB на рис. 12.1), відносною швидкістю $\bar{v}_r$ і відносним прискоренням $\bar{a}_r$.

2. Рух, що здійснює рухома система відліку $Oxyz$ разом з точкою M (незмінно зв'язаною з рухомою системою відліку) по відношенню до нерухомої системи $O_1x_1y_1z_1$, є для точки M *переносним рухом*. Швидкість точки m незмінно зв'язаної з рухомими осями $Oxyz$ і з якою в даний момент співпадає точка M , що рухається, називається переносною швидкістю точки M у цей момент (позначається $\bar{v}_e$), а прискорення цієї точки $\bar{a}_r$ – переносним прискоренням точки M . У наведеному прикладі це рух теплохода разом з кулькою, який буде бачити спостерігач, що стоїть на березі.

3. Рух, що здійснює точка M по відношенню до нерухомої системи відліку $O_1x_1y_1z_1$ називається *абсолютним*. Траєкторія CD цього руху називається абсолютною траєкторією, швидкість – абсолютною швидкістю $\bar{v}_a$ і

прискорення – абсолютним прискоренням $\bar{a}_a$. У розглянутому прикладі абсолютний рух кулі буде бачити спостерігач, що стоїть на березі.

12.2 Абсолютна та відносна похідні від вектора. Формула Бура

При вивченні складного руху точки необхідно розглядати векторні величини при їх змінюванні відносно різних систем відліку, які рухаються одна відносно іншої. Для будь-якого вектора $\bar{b}(t)$ його похідну за часом по відношенню до нерухомої системи відліку називають *повною* (або *абсолютною*) похідною і позначають $\frac{d\bar{b}}{dt}$. Похідну за часом при врахуванні змінювання вектора $\bar{b}$ відносно рухомої системи відліку називають *відносною* (або *локальною*) похідною і позначають $\left(\frac{d\bar{b}}{dt}\right)_r$.

Виявимо залежність між повною і відносною похідними за часом вектора $\bar{b}$ і величинами, що характеризують рух рухомої системи відліку відносно до нерухомої.

Для цього розкладемо вектор $\bar{b}$ на складові, паралельні осям рухомої системи координат. Маємо:

$$\bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}. \quad (12.1)$$

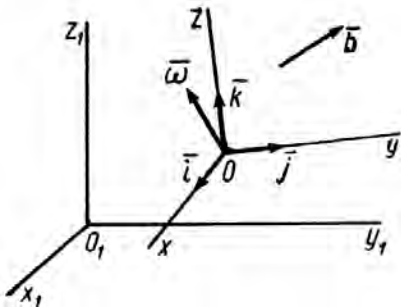


Рис. 12.2

Змінювання вектора $\bar{b}$ відносно нерухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$ залежно від часу полягає у змінюванні його проекцій b_x, b_y, b_z на рухомі осі координат та зміни одиничних векторів $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Змінювання вектора $\bar{b}$ відносно рухомих осей координат $Oxyz$ залежно від часу полягає у змінюванні b_x, b_y, b_z при незмінних значеннях векторів $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Обчислимо повну похідну за часом від вектора $\bar{b}$, використовуючи формулу (12.1):

$$\frac{d\bar{b}}{dt} = \frac{db_x}{dt} \bar{i} + \frac{db_y}{dt} \bar{j} + \frac{db_z}{dt} \bar{k} + b_x \frac{d\bar{i}}{dt} + b_y \frac{d\bar{j}}{dt} + b_z \frac{d\bar{k}}{dt}. \quad (12.2)$$

Перші три складових враховують змінювання вектора $\bar{b}$ при незмінних $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ а тому складають відносну похідну, тобто:

$$\left(\frac{d\bar{b}}{dt}\right)_r = \frac{db_x}{dt} \bar{i} + \frac{db_y}{dt} \bar{j} + \frac{db_z}{dt} \bar{k}. \quad (12.3)$$

Розглянемо решту три складові рівняння (12.2). Похідні за часом від одиничних векторів визначаємо за формулою Пуассона:

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{i}, \quad \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{j}, \quad \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{k},$$

де ω – кутова швидкість обертальної частини руху навколо О (поступальна швидкість $\bar{v}_o$ разом з рухомою системою відліку не змінює одиничні вектори). Підставляючи ці значення похідних від одиничних векторів у рівняння (12.2) винесемо $\bar{\omega}$ за дужки і отримаємо:

$$\frac{d\bar{b}}{dt} = \left(\frac{d\bar{b}}{dt} \right)_r + \bar{\omega} \times (b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k})$$

або, враховуючи (12.1):

$$\frac{d\bar{b}}{dt} = \left(\frac{d\bar{b}}{dt} \right)_r + \bar{\omega} \times \bar{b} \quad (12.4)$$

Формула (12.4), яка встановлює залежність між похідними за часом від векторів відносно нерухомої і рухомої системи відліку, називається *формулою Бура*.

12.3 Додавання швидкостей

Розглянемо рух точки М по відношенню до нерухомої системи відліку $O_1x_1y_1z_1$ як складний, що складається з руху відносно рухомої системи відліку $Oxyz$ та руху точки разом з рухомою системою відліку відносно нерухомої осі (рис. 12.3). Рух рухомої системи осей координат відносно нерухомої можна охарактеризувати швидкістю її поступального руху $\bar{v}_o$ разом з точкою О та кутовою швидкістю $\bar{\omega}$ навколо точки О.

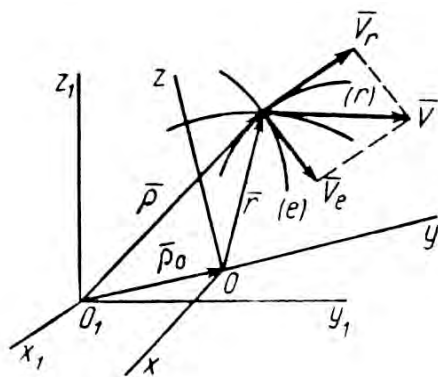


Рис. 12.3

Проведемо радіус-вектори $\bar{\rho}$ і $\bar{r}$, що характеризують положення точки М відносно нерухомої та рухомої систем відліку і вектор $\bar{\rho}_o$ точки О. Для будь-якого моменту часу $\bar{\rho} = \bar{\rho}_o + \bar{r}$.

Абсолютна швидкість точки М дорівнює

$$\bar{v} = \frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_o}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt}. \quad (12.5)$$

За визначенням $\frac{d\bar{\rho}_o}{dt} = \bar{v}_o$ – абсолютна швидкість точки О. Для

обчислювання $\frac{d\vec{r}}{dt}$ використаємо формулу Бура: $\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_r + \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Відносна похідна $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_r$ є відносною швидкістю точки М по відношенню до рухомої системи відліку, а $\vec{\omega}$ – кутова швидкість обертання рухомої системи відліку. Таким чином, з формули (12.5) отримуємо:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_r \quad (12.6)$$

Порівнюючи (12.6) з (11.7), бачимо що швидкість $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$ є швидкість точки вільного твердого тіла, скріпленого з рухомою системою координат, відносно нерухомої системи координат.

Таким чином:

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r \quad (12.7)$$

тобто швидкість абсолютного руху точки дорівнює векторній сумі переносної та відносної швидкостей.

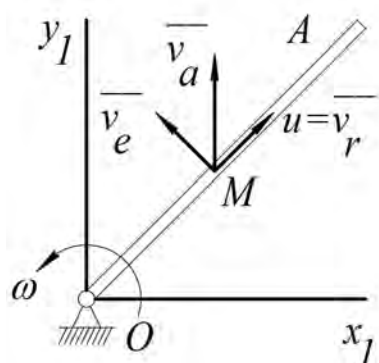


Рис. 12.4

Приклад. Точка М рухається уздовж прямої ОА зі швидкістю $\vec{u}$, а сама пряма обертається в площині Ox_1y_1 навколо центра О з кутовою швидкістю ω (рис. 12.4). Визначити швидкість точки М відносно осей Ox_1y_1 в залежності від відстані $OM = r$.

Розв'язок. Точка М здійснює складний рух. Вона переміщується відносно рухомої системи відліку (прямої ОА) з відносною швидкістю $\vec{v}_r = \vec{u}$ і разом обертається навколо точки О з кутовою швидкістю ω . Отже, переносна швидкість точки М дорівнює $v_e = \omega \cdot OM$ і спрямована перпендикулярно до радіуса обертання ОМ (рис. 12.4) Абсолютна швидкість точки М $\vec{v}_a$ відносно до формули (12.7) дорівнює геометричній сумі векторів відносної $\vec{u}$ і переносної швидкості $\vec{v}_r$. З іншого боку, абсолютну швидкість точки М $\vec{v}_a$ знайдемо, будуючи паралелограм на векторах $\vec{u}$ і $\vec{v}_r$ (рис. 12.4). Так як $\vec{u}$ і $\vec{v}_r$ взаємно перпендикулярні, то модуль $\vec{v}_a$ визначимо за формулою

$$v_a = \sqrt{u^2 + \omega^2 r^2}.$$

12.4 Додавання прискорень точки

Абсолютне прискорення точки визначаємо обчисленням повної похідної за часом від абсолютної швидкості (12.6):

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt} [\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} + \bar{v}_r] = \frac{d\bar{v}_0}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} + \frac{d\bar{v}_r}{dt}.$$

Для повних похідних від $\bar{r}$ і $\bar{v}_r$ застосуємо формулу Бура:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \right)_r + \bar{\omega} \times \bar{r}, \quad \frac{d\bar{v}_r}{dt} = \left(\frac{d\bar{v}_r}{dt} \right)_r + \bar{\omega} \times \bar{v}_r.$$

Враховуючи, що:

$$\frac{d\bar{v}_0}{dt} = \bar{a}_0; \quad \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\varepsilon}; \quad \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \right)_r = \bar{v}_r; \quad \frac{d\bar{v}_r}{dt} = \bar{a}_r,$$

отримуємо:

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + (\bar{\varepsilon} \times \bar{r}) + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + \bar{a}_r + 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_r). \quad (12.8)$$

Порівнюючи (12.8) з (11.9) бачимо, що перші три складові (12.8) дорівнюють прискоренню точки вільного тіла яке рухається разом з рухомою системою осей координат відносно нерухомої, тобто переносному прискоренню точки $\bar{a}_e$.

Таким чином, у загальному випадку повне прискорення точки дорівнює:

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k, \quad (12.9)$$

де

$$\bar{a}_k = 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_r), \quad (12.10)$$

$\bar{\omega}$ – кутова швидкість переносного руху. Прискорення $\bar{a}_k$ називається коріолісовим прискоренням.

Формула (12.9) дає правило складання прискорень при складному русі: *абсолютне прискорення точки є векторною сумою трьох прискорень – переносного, відносного і Коріоліса.*

12.4.1 Обчислювання відносного, переносного та Коріолісового прискорення

При обчислюванні відносного прискорення рух рухомих осей враховувати не треба, а тому $\bar{a}_r$ обчислюється звичайними методами кінематики. При обчислюванні переносного прискорення точки $\bar{a}_e$ не треба враховувати відносного руху точки; отже $\bar{a}_e$ обчислюється як прискорення

деякої точки твердого тіла, незмінно – зв'язаного з рухомими осями Охуз, разом з якими воно рухається. Тому переносне прискорення обчислюється методами кінематики твердого тіла. Коріолісове прискорення обчислюється за формулою (12.10), тобто, *коріолісове прискорення точки дорівнює подвоєному векторному добутку кутової швидкості переносного руху на відносну швидкість точки.*

Якщо кут проміж векторами $\vec{\omega}$ і $\vec{v}_r$ позначити α , то модуль прискорення Коріоліса дорівнює:

$$a_k = 2\omega_e v_r \sin \alpha. \quad (12.11)$$

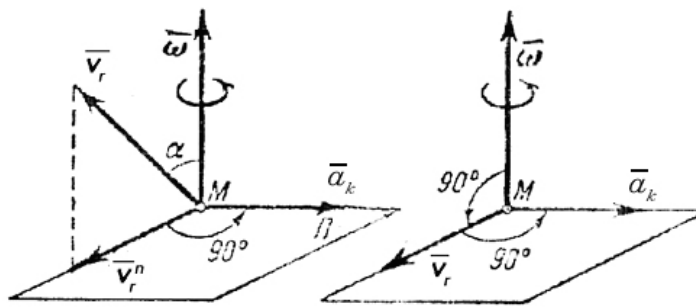


Рис. 12.5

Спрямований вектор $\vec{a}_k$ так само, як вектор $\vec{\omega} \times \vec{v}_r$, тобто перпендикулярно площині, що проходить через вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{v}_r$ у той бік, з якого видно, що найкоротше суміщення $\vec{\omega}$ з $\vec{v}_r$ відбувається проти ходу стрілки годинника (рис. 12.5).

З рис. 12.5 бачимо, що напрямок вектора $\vec{a}_k$, крім того, можна отримати, якщо спроектувати $\vec{v}_r$ на площину перпендикулярну $\vec{\omega}$ і повернути цю проекцію $\vec{v}_r^n$ на 90° у бік переносного обертання.

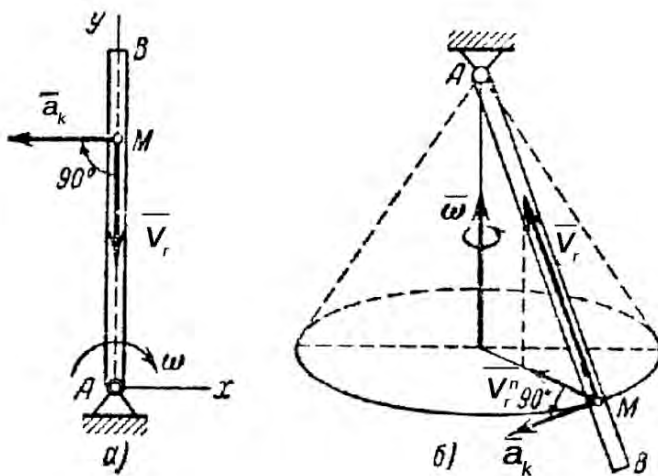


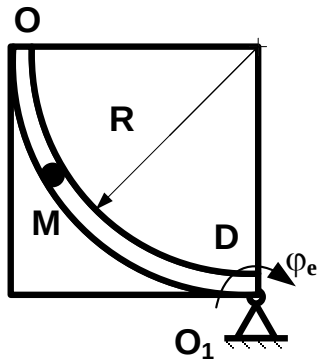
Рис. 12.6

На рис. 12.6 показані приклади визначення напрямку $\vec{a}_k$ кульки М, що рухається уздовж трубки АВ для двох випадків: коли трубка обертається у площині креслення (рис. 12.6,а) і коли вона при обертанні описує конус (рис. 12.6,б).

З формули (12.11) видно, що Коріолісове прискорення дорівнює нулю у наступних випадках:

1. Якщо $\omega=0$, тобто коли переносний рух є поступальним, або якщо кутова швидкість у даний момент часу дорівнює нулю.
2. Якщо $\vec{v}_r = 0$, тобто коли відносна швидкість у даний момент часу дорівнює нулю.
3. Якщо $\alpha=0$ або $\alpha=180^\circ$, тобто коли відносний рух відбувається в напрямку, паралельному осі переносного обертального руху, або коли в даний момент часу вектор $\vec{v}_r$ паралельний цій осі.

Приклад. Рух точки М відносно тіла D визначається рівнянням $s_r = OM = f_1(t)$, а переносний рух тіла D визначається рівнянням $\varphi_e = f_2(t)$.

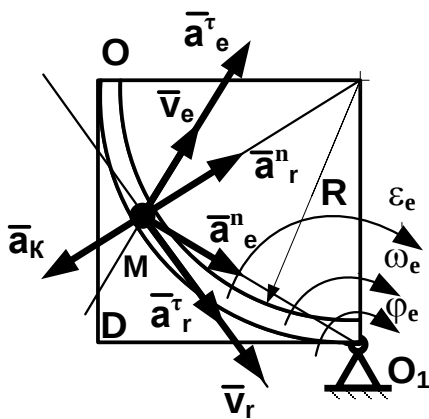


Для заданого положення тіла D і точки M показати можливий напрям векторів $\bar{v}_r$, $\bar{v}_e$, $\bar{a}_r^\tau$, $\bar{a}_r^n$, $\bar{a}_e^\tau$, $\bar{a}_e^n$ та $\bar{a}_K$.

Розв'язок. Траєкторію точки M у відносному русі є дуга кола радіусом R. Для заданого положення точки M вектори відносної швидкості $\bar{v}_r$ та дотичного прискорення $\bar{a}_r^\tau$ точки M у відносному русі спрямовані вздовж дотичної до траєкторії точки у відносному русі, а вектор нормального прискорення $\bar{a}_r^n$ точки M у відносному русі

спрямований перпендикулярно до вектора $\bar{a}_r^\tau$ у бік угнутості траєкторії.

Траєкторією точки M у переносному русі є дуга кола радіуса O_1M .



Напрямок повороту тіла, кутову швидкість ω_e та його кутове прискорення ϵ_e будемо вважати додатними. Для заданого положення точки M вектори $\bar{v}_e$ та $\bar{a}_e^\tau$ спрямовані вздовж дотичної до траєкторії точки M у переносному русі, а вектор $\bar{a}_e^n$ спрямований перпендикулярно до вектора $\bar{a}_e^\tau$ у бік угнутості траєкторії точки M у переносному русі.

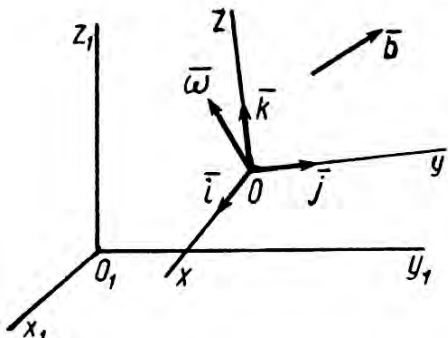
Напрямок прискорення Коріоліса $\bar{a}_K$

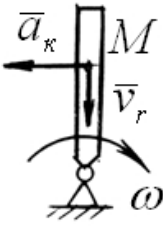
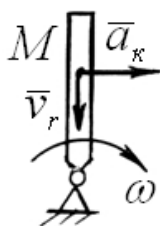
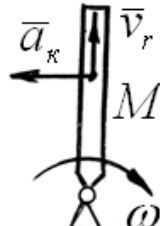
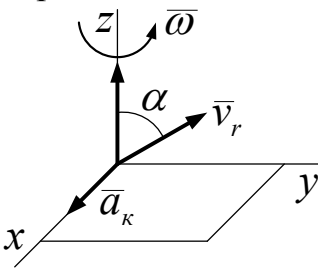
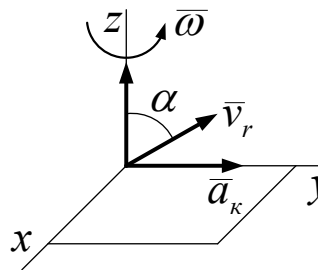
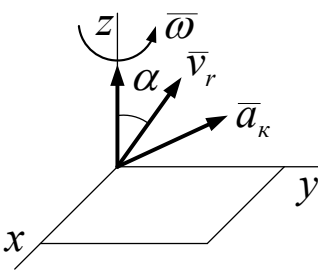
визначимо, користуючись правилом Жуковського.

Вектор $\bar{v}_r$ повернемо навколо точки M на кут 90° у напрямку ω_e . Це і буде напрям вектора прискорення Коріоліса $\bar{a}_K$.

Питання для самоконтролю (Лекція 13)

1. Який рух називається відносним, переносним і абсолютним? Наведіть приклад складного руху.
2. Як називаються похідні по часу для будь-якого вектора $\bar{b}(t)$ по відношенню до нерухомої та рухомої систем відліку?
3. Чому дорівнює повна похідна по часу від вектора $\bar{b}(t)$?
8. Чому дорівнює швидкість абсолютного руху точки?
9. Чому дорівнює повне прискорення точки?
10. Як визначити модуль і напрямлення Коріолісова прискорення?
11. В яких випадках Коріолісово прискорення дорівнює нулю?

№	Питання
1	2
1	Рух, що здійснює точка по відношенню до рухомої системи відліку називається: - абсолютним; - переносним; - відносним.
2	Рух, що здійснює рухома система відліку разом з точкою по відношенню до нерухомої системи називається: - абсолютним; - переносним; - відносним.
3	Рух, що здійснює точка по відношенню до нерухомої системи відліку називається: - абсолютним; - переносним; - відносним.
4	 Відповідно до рисунку розкладемо вектор $\bar{b}$ на складові, паралельні осям рухомої системи координат: $\bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}$. Похідна від цього вектора за часом $\frac{d\bar{b}}{dt} = \frac{db_x}{dt} \bar{i} + \frac{db_y}{dt} \bar{j} + \frac{db_z}{dt} \bar{k}$ є похідною: - повною; - відносною; - переносною.
5	Формула Бура встановлює залежність між похідними за часом від векторів: - нерухомої і рухомої системи відліку; - нерухомої системи відліку і вектором швидкості; - рухомої системи відліку і вектором швидкості.
6	Абсолютна швидкість точки дорівнює: - векторному добутку кутової швидкості на радіус-вектор; - векторній сумі переносної та відносної швидкості; - векторному добутку переносної та відносної швидкості.

1	2
7	Абсолютне прискорення точки дорівнює: 1. векторній сумі трьох прискорень – переносного, відносного і Коріоліса; 2. векторному добутку трьох прискорень – переносного, відносного і Коріолісова; 3. векторній сумі відносного прискорення і векторного добутку кутової швидкості тіла і переносної швидкості точки.
8	На якому з рисунків, де кулька М рухається уздовж трубки АВ, правильно показаний напрямок Коріолісова прискорення точки М? а)  б)  в)  1. а; 2. б; 3. в.
9	На якому з рисунків правильно показано напрямок Коріолісова прискорення точки М? а)  б)  в)  1. а; 2. б; 3. в.
10	Вектор Коріолісова прискорення обчислюється за формулою: 1. $\bar{a}_K = 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_r)$; 2. $\bar{a}_K = 2(\bar{v}_r \times \bar{\omega})$; 3. $\bar{a}_K = 2v_r \cdot \omega \sin \alpha$.
11	Коріолісове прискорення дорівнює нулю, якщо кут між $\bar{\omega}$ і $\bar{v}_r$ дорівнює: 1. $\pi/2$; 2. π; 3. $\pi/4$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Павловський М.А. Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Бондаренко А.А., Дубінін О.О., Переяславцев О.М. Теоретична механіка: Підручник: У 2 ч. – Ч.1: Статика. Кінематика. – К.: Знання, 2004. – 599 с.
3. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: Учебник. – М., 2010. – 720 с.
4. Яблонский А.А., Норе́йко С.С. Курс теоретической механики. – М., 2009 – 256 с.
5. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики: В 2 т. – М.: Наука, 1976-1979. – Т.1. – 240 с.; Т.2. – 461 с.
6. Гернет М.М. Курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1981. – 303 с.
7. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики: В 2 т. – М.: Наука, 1972-1977. – Т.1. – 456 с.; Т.2. – 462 с.
8. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике. – М., 2008. – 448 с.
9. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник. – М.: Высш. шк., 1995. – 416 с.
10. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебн. пособие для техн. вузов / Яблонский А.А., Норе́йко С.С., Вольфсон С.А. и др.; Под ред. А.А. Яблонского. – М.: Высш. шк., 1985. – 367 с.
11. Бать М.М., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 1. Статика и кинематика. Том 2. Динамика. – М., 2009.
12. Новожилов И.В., Зацепин М.Ф. Типовые расчеты по теоретической механике на базе ЭВМ: Учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 1986. – 136 с.
13. Сборник коротких задач по теоретической механике: Учеб. пособие для втузов / Кепе О.Э., Виба Я.А., Грапис О.П. и др.; Под ред. О.Э. Кепе. – М.: Высш. шк., 1989. – 368 с.
14. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов. – М.: Высш. шк., 1986. – 416 с.
15. Теоретична механіка: Збірник задач / О.С. Апостолук, В.М. Воробйов, Д.І. Ільчишина та ін.; За ред. М.А. Павловського. – К.: Техніка, 2007. – 400 с.
16. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: В 2 т. – М.: Высш. шк., 1977. – Т.1. – 431 с.; Т.2. – 532 с.
17. Бази́левский Н.Е., Кре́ймер Ю.Г. Методические указания и задания к выполнению курсовых работ по теоретической механике (Статика). – Д.: ДИСИ, 1983. – 72 с.