МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ХІМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

# КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ
ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЗА СПЕЦІАЛЬНІСТЮ
133 «ГАЛУЗЕВЕ МАШИНОБУДУВАННЯ»
ГАЛУЗЬ ЗНАНЬ 13 «МЕХАНІЧНА ІНЖЕНЕРІЯ»

## ЧАСТИНА 5. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА. АНАЛІТИЧНА МЕХАНІКА

Затверджено на засіданні
кафедри матеріалознавства
протокол №10 від 23.06.16

Дніпро ДВНЗ УДХТУ 2016

Конспект лекцій з теоретичної механіки для студентів за спеціальністю 133 «Галузеве машинобудування» галузь знань 13 «Механічна інженерія». Частина 5. Принцип Даламбера. Аналітична механіка / укл. Виноградов Б.В. – Д.: ДВНЗ УДХТУ, 2016. – 28 с.

Укладач Б.В. Виноградов, д-р техн. наук

Відповідальний за випуск Б.В. Виноградов, д-р техн. наук

Навчальне видання

Конспект лекцій з теоретичної механіки для студентів за спеціальністю 133 «Галузеве машинобудування» галузь знань 13 «Механічна інженерія». Частина 5. Принцип Даламбера. Аналітична механіка

Укладач ВИНОГРАДОВ Борис Володимирович

Технічний редактор В.П. Синицька
Комп'ютерна верстка В.П. Синицька

Підписано до друку 16.12.16. Формат 60×84/16. Папір ксерокс. Друк різограф. Умов. друк. арк. 1,27. Обл.-вид. арк. 1,32. Тираж 100 прим. Зам. № 249. Свідоцтво ДК № 5026 від 16.12.2015

ДВНЗ УДХТУ, просп. Гагаріна, 8, м. Дніпро, 49005

Редакційно-видавничий відділ

**ЗМІСТ**

# ЛЕКЦІЯ 25
# 22 ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА.
# ТИСК НА ВІСЬ ТІЛА, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ

## 22.1. Принцип Даламбера

Розглянемо систему, яка складається з $n$ матеріальних точок. Для будь-якої точки системи масою $m_k$ основний закон динаміки можна записати:

$$m_k \overline{a}_k = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i. \qquad (22.1)$$

Перенесемо член $m_k \overline{a}_k$ з лівої частини до правої :

$$\overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i - m_k \overline{a}_k = 0. \qquad (22.2)$$

Добуток маси точки на вектор прискорення, взятий зі знаком мінус, назвемо силою інерції $\overline{F}_k^I$:

$$\overline{F}_k^I = -m_k \overline{a}_k.$$

Тоді виявляється, що рух точки має такі властивості: при русі матеріальної точки сума зовнішніх і внутрішніх сил разом з силою інерції створюють зрівноважену систему сил, тобто:

$$\overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i + \overline{F}_k^I = 0. \qquad (22.3)$$

Рівняння (22.3) виражає принцип Даламбера. З нього випливає: *якщо в будь-який момент часу до зовнішніх та внутрішніх сил додати силу інерції, то геометрична сума зовнішніх, внутрішніх і сил інерції для кожної матеріальної точки механічної системи дорівнює нулю.*

Складемо всі $n$ рівнянь (22.3):

$$\sum \overline{F}_k^e + \sum \overline{F}_k^i + \sum \overline{F}_k^I = 0. \qquad (22.4)$$

Тут $\sum \overline{F}_k^e = \overline{R}^e$ – головний вектор зовнішніх сил;

$\sum \overline{F}_k^I = \overline{R}^I$ – головний вектор сил інерції;

$\sum \overline{F}_k^i = 0$.

Проведемо з довільного нерухомого центра О до кожної точки системи радіуси – вектори $\overline{r}_k$.

Помножимо векторно радіус-вектор $\overline{r}_k$ кожної точки системи на суму векторів рівності (22.3):

$$\overline{r}_k \times \overline{F}_k^e + \overline{r}_k \times \overline{F}_k^i + \overline{r}_k \times \overline{F}_k^I = 0.$$

Складемо всі $n$ отриманих рівнянь:

$$\sum \overline{r}_k \times \overline{F}_k^e + \sum \overline{r}_k \times \overline{F}^i_k + \sum \overline{r}_k \times \overline{F}_k^I = 0 . \qquad (22.5)$$

Тут $\sum \overline{r}_k \times \overline{F}_k^e = \sum \overline{M}_0(\overline{F}_k^e) = \overline{M}_0^e$ – головний момент зовнішніх сил відносно центра О;

$\sum \overline{r}_k \times \overline{F}_k^I = \sum \overline{M}_0(\overline{F}_k^I) = \overline{M}_0^I$ – головний момент сил інерції відносно центра О.

Відповідно до властивостей внутрішніх сил системи $\sum r_k \times F_k^i = M_0\left(\overline{F}_k^i\right) = 0$.

Підставляючи значення головних векторів і головних моментів у рівняння (22.4) і (22.5), отримаємо:

$$\begin{aligned} &\overline{R}^e + \overline{R}^I = 0, \\ &\overline{M}_0^e + \overline{M}_0^I = 0, \end{aligned} \qquad (22.6)$$

де $\overline{M}_0^I = \sum M_0\left(\overline{F}_k^I\right)$.

Із статики відомо, що система сил знаходиться у рівновазі, якщо головний вектор сил і головний момент цих сил відносно будь-якого центра дорівнює нулю.

Таким чином, *якщо в будь – який момент часу до кожної точки системи, окрім зовнішніх сил, прикласти відповідні сили інерції, то отримана система сил буде знаходитися у рівновазі і до неї можна буде застосувати всі рівняння статики*.

В проекціях на осі координат рівняння (22.6) у загальному випадку дають шість рівнянь, аналогічних відповідним рівнянням статики.

Для того, щоб користуватися цими рівняннями при розв'язанні задач, необхідно знати, як визначити головний вектор і головний момент сил інерції.

## 22.2 Головний вектор і головний момент сил інерції

Із статики відомо, що довільну систему сил можна привести до будь-якого центра. В загальному випадку цю систему можна замінити головним вектором, лінія дії якого проходить через центр приведення та головним моментом, відносно цього центру. Отже, довільну просторову систему сил інерції при приведені до будь-якої точки $A$ можна замінити головним вектором сил інерції $\overline{R}^I = \sum \overline{F}_k^I$ та головним моментом сил інерції $\overline{M}_A^I = \sum \overline{M}_A\left(\overline{F}_k^I\right)$ (рис. 22.2,а).

Величина головного вектора сил інерції не залежить від центра приведення.

З (17.3) маємо, що $\sum m_k \overline{a}_k = M\overline{a}_c$. Тоді головний вектор сил інерції можна визначити за формулою:

$$\overline{R}^I = -\sum m_k \overline{a}_k = -M\overline{a}_c \; . \tag{22.7}$$

Таким чином, *головний вектор сил інерції тіла, яке здійснює будь-який рух, дорівнює добутку маси тіла на прискорення його центра мас і спрямований протилежно цьому прискоренню*.

Головний момент сил інерції буде залежати від центра приведення сил інерції. Розглянемо окремі випадки визначення головного моменту сил інерції.

**1. Поступальний рух**. При поступальному русі прискорення всіх точок однакові. Сили інерції цих точок є система паралельних сил, спрямованих в один бік. Ця система має рівнодійну, яка дорівнює головному вектору, тобто:

$$\overline{R}^I = -M\overline{a}_c . \tag{22.8}$$

Лінія дії цієї рівнодійної проходить через центр ваги, і головний момент сил інерції відносно центра мас дорівнює нулю :

$$M_c^I = \sum \overline{M}_c(\overline{F}_k^I) = 0 \, .$$

Отже*, при поступальному русі сили інерції твердого тіла зводяться до однієї рівнодійної, що дорівнює головному вектору сил інерції* $\overline{R}^I$*, лінія дії якого проходить через центр мас тіла*.

**2. Обертання тіла навколо осі.** При обертальному русі всі точки тіла обертаються в площинах перпендикулярних осі обертання, отже їх повні прискорення також лежать в цих площинах. Як відомо вектори сил інерції, що діють на точки системи, спрямовані в бік протилежний прискоренню точок і тому вони будуть створювати систему, що лежить в площинах перпендикулярних до осі обертання.

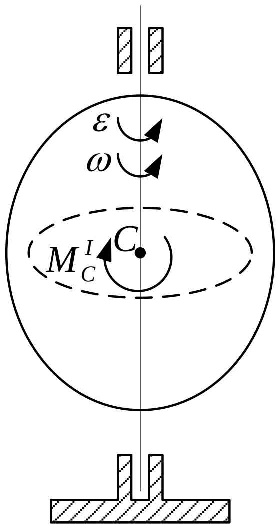


Рис. 22.1

При приведені цих сил інерції до будь-якого центру $O$ їх можна замінити головним вектором і головним моментом сил інерції:

$$\overline{R}^I = -M\overline{a}_C \, , \; \overline{M}_O^I = \sum \overline{M}_O\left(\overline{F}^I\right),$$

що також будуть розташовані в площині, перпендикулярній осі обертання.

Розглянемо найбільш поширений випадок, коли тіло має площину симетрії, а вісь обертання перпендикулярна до цієї площини і проходить через центр мас (рис. 22.1).

За умови симетрії головний вектор і головний момент інерції будуть лежати в площині симетрії. Якщо за центр приведення взяти центр мас, то в цьому випадку $\bar{a}_C = 0$ і $R^I = 0$. Отже, сили інерції приводяться до головного моменту інерції $M_C^I$ (рис. 22.1) відповідно до (22.6) $M_C^I = -M_C\left(\bar{F}_k^e\right)$. Так як $M_C\left(\bar{F}_k^e\right) = I_C\varepsilon$, то $M_C^I = -I_C\varepsilon$. Таким чином, у даному випадку система сил інерції зводиться до однієї пари, що лежить в площині симетрії і має момент:

$$M_C^I = -I_C\varepsilon. \tag{22.9}$$

У випадку, коли тіло є плоским, то сили інерції, що діють на кожну точку тіла, яке обертається навколо осі, утворюють систему паралельних сил. Відповідно до (4.1) систему паралельних сил можна замінити рівнодійною, модуль якої дорівнює алгебраїчної сумі цих сил. Отже, в цьому випадку сили інерції можна звести до головного вектора сил інерції, що дорівнює:

$$R^I = \sum \bar{F}_k^I = -\sum m_k a_k = -Ma_C \tag{22.10}$$

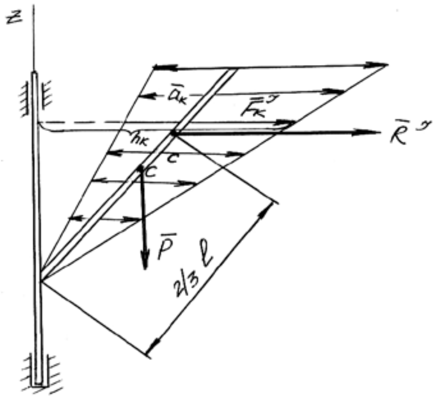


Рис. 22.2

Лінія дії головного вектора сил інерції буде паралельна силам інерції, що діють на кожну точку тіла і проходить через точку, що залежить від закону розподілу сил інерції. Наприклад, на кожну частину масою $m_k$ однорідного стрижня вагою $P$, що обертається навколо осі $z$ з кутовою швидкістю $\omega$ діє сила інерції:

$$\bar{F}_k^I = -m_k a_k = -a_k\omega^2 h_k,$$

де $a_k$ – вектор прискорення $k$-ої частини стрижня, $h_k$ – відстань $k$-ої частинки від осі обертання (рис. 22.2). Отже, прискорення сили інерції уздовж стрижня розподілені за лінійним законом, створюючи трикутник. Відомо, що паралельні сили, які створюють трикутник, мають рівнодійну силу, лінія дії якої відстоїть від основи трикутника на відстані $1/3l$ по стрижню і $2/3l$ від вершини трикутника (рис. 22.2). За теоремою про паралельний перенос сили головний вектор сил інерції можна перенести паралельно в будь-яку іншу точку, додаючи при цьому пару сил, момент якої дорівнює моменту головного вектора сил інерції відносно точки приведення.

**3. Плоскопаралельний рух.** Розглянемо тіло, яке має площину симетрії і рухається паралельно їй. Тоді головний вектор і рівнодійна пара сил, як центр мас С, будуть знаходитися у площині симетрії.

Візьмемо за полюс і центр приведення центр мас $C$. Як відомо, плоскопаралельний рух можна розглядати як суму поступального руху, при якому всі точки тіла рухаються так, як полюс $C$ і обертального руху навколо цього полюса, приходимо до висновку, що при плоскопаралельному русі, система сил інерції зводиться до *головного вектора сил інерції* $\overline{R}^I$*, який прикладений у центрі мас С, і головного моменту сил інерції, що діє в площині симетрії і визначається за формулою (22.9).*

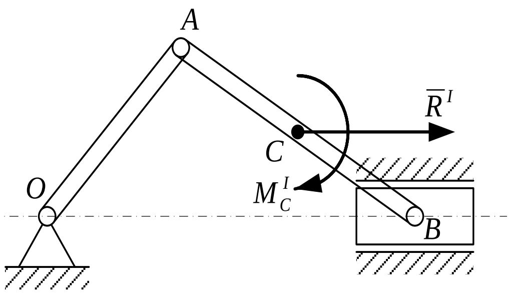


Рис. 22.3

Наприклад, шатун $AB$ кривошипно-шатунного механізму (рис. 22.3) здійснює плоскопаралельний рух.

Сили інерції можна привести до головного вектора $\overline{R}$, що прикладений в центрі мас $C$, і головного моменту сил інерції $\overline{M}_C^I$ відносно центра мас (рис. 22.3).

## 22.3. Динамічні реакції, що діють на вісь тіла, яке обертається

Розглянемо яке-небудь тверде тіло, яке рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω навколо осі і закріплене у підшипниках (рис. 22.4).

Нехай на тіло діють сили $\overline{P}_1^e, \overline{P}_2^e, ..., \overline{P}_n^e$. Визначимо динамічні реакції $\overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{Z}_A, \overline{X}_B, \overline{Y}_B$ підшипників, що діють на вісь при обертанні тіла.

Позначимо проекції головного вектора цих сил на координатні осі Axyz , що обертаються разом з тілом, через $R_x^e, R_y^e, R_z^e$ ($R_x^e = \sum P_{kx}^e$, $R_y^e = \sum P_{ky}^e$, $R_z^e = \sum P_{kz}^e$), а їх головний момент відносно цих же осей – через $M_x^e$, $M_y^e$, $M_z^e$, де $M_x^e = \sum M_x(\overline{P}_k^e)$, $M_y^e = \sum M_y(\overline{P}_k^e)$, $M_z^e = \sum M_z(\overline{P}_k^e)$. Так як тіло обертається рівномірно, то $M_z^e = 0$.

Для визначення реакцій скористуємося принципом Даламбера – до діючих зовнішніх сил приєднаємо сили інерції і складемо рівняння умов рівноваги в проекціях на осі Axyz:

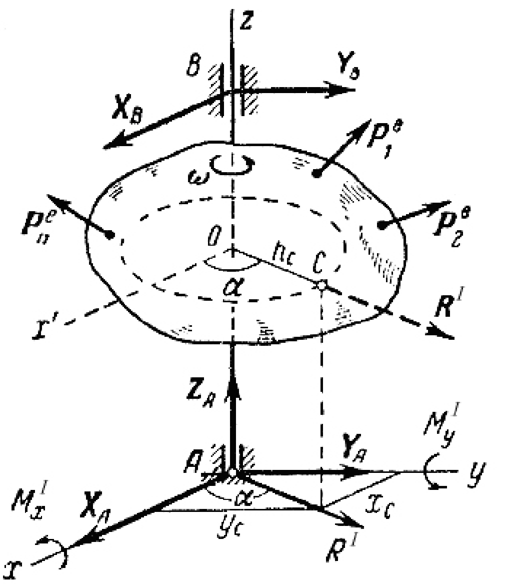


Рис. 22.4

$$\left.\begin{aligned} & X_A + X_B + R_x^e + R_x^I = 0, \\ & Y_A + Y_B + R_y^e + R_y^I = 0, \\ & Z_A + R_z^e + R_z^I = 0, \\ & -Y_B \cdot AB + M_x^e + M_x^I = 0, \\ & X_B \cdot AB + M_y^e + M_y^I = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (22.11)$$

Останнє рівняння $M_z^e + M_z^I = 0$ задовольняється тотожно (так як ε = 0).

Головний вектор сил інерції $\overline{R}^I = M\overline{a}_c$. При ω=const, $a_c = a_c^n = \omega^2 h_c$, де $h_c$ – відстань точки С від осі обертання. Отже, напрямленість $\overline{R}^I$ співпадає з ОС. Пунктиром на рис. 22.4 показана тільки напрямленість головного вектора сил інерції. Величина головного моменту інерції буде залежить від точки приведення $\overline{R}^I$. Наприклад, якщо $\overline{R}^I$ привести до центра А, то додатково треба прикласти головний момент сил інерції, який складається з $M_x^I$ та $M_y^I$ Обчислимо проекції $\overline{R}^I$ на осі координат :

$$R_x^I = R \cdot cos\,\alpha = Ma_c^n \cdot cos\,\alpha = M\omega^2 h_c \cdot cos\,\alpha\,,$$
$$R_y^I = R \cdot sin\,\alpha = Ma_c^n \cdot sin\,\alpha = M\omega^2 h_c \cdot sin\,\alpha\,,$$
$$R_z^I = 0\,.$$

Враховуючи, що $h_c \cdot \cos\alpha = x_c$, $h_c \cdot \sin\alpha = y_c$, отримаємо

$$R_x^I = M\omega^2 x_c\,,$$
$$R_y^I = M\omega^2 y_c\,, \qquad (22.12)$$
$$R_z^I = 0\,.$$

Для того, щоб знайти $M_x^I$ і $M_y^I$ розглянемо яку-небудь частину тіла з масою $m_k$, що лежить від осі на відстані $h_k$. Силу інерції, що діє на неї, визначимо аналогічно:

$$F_{kx}^I = m_k\omega^2 x_k\,,\; F_{ky}^I = m_k\omega^2 y_k\,,\; F_{kz}^I = 0\,.$$

Тоді, використовуючи аналітичні вирази для моментів сили відносно осей координат, отримаємо:

$$M_x(\overline{F}_k^I) = -z_k F_{ky}^I = -m_k\omega^2 y_k z_k\,,$$
$$M_y(\overline{F}_k^I) = z_k F_{kx}^I = m_k\omega^2 x_k z_k\,.$$

Запишемо такі рівняння для всіх точок системи і складемо їх, тоді будемо мати:

$$M_x^I = \sum M_x(\overline{F}_k^I) = -\omega^2 \sum m_k y_k z_k\,,$$
$$M_y^I = \sum M_y(\overline{F}_k^I) = \omega^2 \sum m_k x_k z_k\,.$$

Враховуючи, що $\sum m_k y_k z_k = I_{yz}$, а $\sum m_k x_k z_k = I_{xz}$, остаточно головні моменти інерції визначимо формулами:

$$M_x^I = -I_{yz}\omega^2\,,\; M_y^I = I_{xz}\omega^2\,, \qquad (22.13)$$

де $I_{xz}$ і $I_{xy}$ – відцентрові моменти інерції.

Підставимо значення (22.12) і (22.13) в рівняння (22.11). тоді отримаємо :

$$\left.\begin{aligned} &X_A + X_B = -R_x^e - Mx_c\omega^2, \\ &Y_A + Y_B = -R_y^e - My_c\omega^2, \\ &Z_A = -R_z^e, \\ &Y_B \cdot AB = M_x^e - J_{yz}\omega^2, \\ &X_B \cdot AB = -M_y^e - J_{xz}\omega^2. \end{aligned}\right\} \tag{22.14}$$

Рівняння (22.14) визначають динамічні реакції, що діють на вісь Oz тіла, яке рівномірно обертається навколо неї.

Якщо в рівняннях (22.14) прийняти ω = 0, то вони будуть визначати статичні реакції, тобто для тіла, яке знаходиться у спокої.

З рівнянь (22.14) бачимо, що обертання тіла (ω ≠ 0) не буде впливати на величини реакцій підшипників A і B, якщо

$$\begin{aligned} &x_c = 0,\ y_c = 0, \\ &I_{yz} = 0,\ I_{xz} = 0. \end{aligned} \tag{22.15}$$

Рівності (25.15) виражають умови динамічної зрівноваженості мас: *динамічні реакції, що діють на вісь тіла, яке обертається навколо неї будуть дорівнювати статичним, якщо вісь обертання є однією із головних центральних осей інерції тіла*.

Динамічне зрівноваження мас полягає в створенні умов, при яких вісь обертання буде центральною і головною, тобто $x_c=y_c=0$ $I_{xz}=I_{yz}=0$. На практиці це можливо досягти додаванням до тіла двох точкових мас, вибираючи їх величин і місце розташування так, щоб виконувались умови (22.15).

## Питання для самоконтролю (Лекція 25)

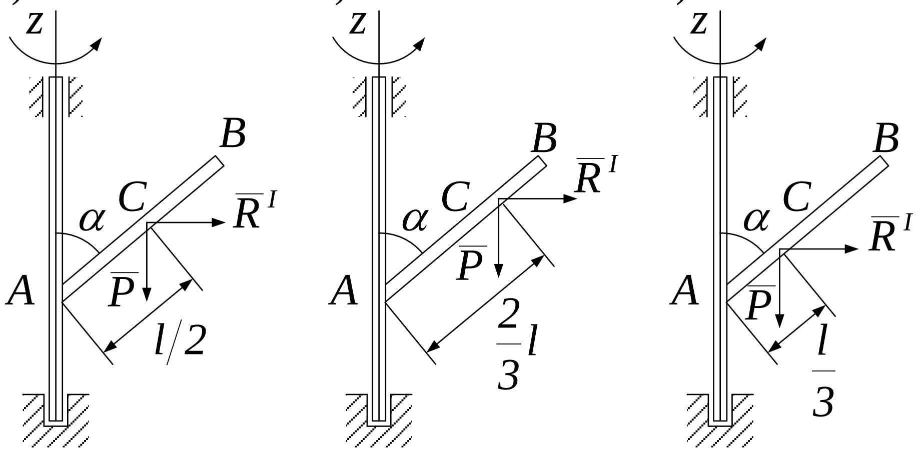
1. В чому полягає принцип Даламбера?
2. Що називається силою інерції?
3. Що називають головним моментом сил інерції?
4. До чого зводяться сили інерції при поступальному русі при приведенні до центра мас та довільної точки $B$?
5. За якою формулою обчислюється головний вектор сил інерції?
6. До чого зводяться сили інерції при поступальному, плоскопаралельному русі?
7. До чого зводяться сили інерції при обертальному русі, якщо вісь обертання проходить через центр мас тіла?
8. При яких умовах динамічні реакції, що діють на вісь тіла, яке обертається навколо неї, будуть дорівнювати статичним?
9. В чому полягає динамічне зрівноваження мас?

**Тести до теми 22 «Принцип Даламбера. Тиск на вісь тіла, що обертається»**

Таблиця 22.1

| № | Питання |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 1 | Яка формула визначає силу інерції, що діє на точку?<br>1. $\overline{F}^J = m\overline{a}$;<br>2. $\overline{F}^J = -m\overline{a}$;<br>3. $\overline{F}^J = -m\overline{a}_e$ |
| 2 | Якщо в будь-який момент часу до кожної точки системи, окрім зовнішніх сил, прикласти відповідні сили інерції, то:<br>1. до отриманої системи можна застосувати всі рівняння статики;<br>2. всі точки системи будуть знаходитися у спокої;<br>3. сума проекцій всіх зовнішніх сил на осі координат будуть дорівнювати нулю |
| 3 | В загальному випадку сили інерції можна привести до:<br>1. головного вектора сил інерції;<br>2. головного моменту сил інерції;<br>3. головного вектора і головного моменту сил інерції |
| 4 | Головний вектор сил інерції дорівнює:<br>1. $\overline{R}^J = -M\overline{a}_c$;<br>2. $\overline{R}^J = -m_k\overline{a}_k$;<br>3. $\overline{R}^J = M\overline{a}_c$ |
| 5 | Якщо при поступальному русі твердого тіла сили інерції привести до центра мас, то:<br>1. $R^J = 0$, $M^J \neq 0$;<br>2. $R^J \neq 0$, $M^J = 0$;<br>3. $R^J = 0$, $M^J = 0$ |
| 6 | Чому дорівнює головний вектор сил інерції при обертанні тіла навколо осі, що проходить через центр мас тіла?<br>1. $M^J = J_{Cz}\varepsilon$;<br>2. $M^J = -J_{Cz}\omega$;<br>3. $M^J = -J_{Cz}\varepsilon$ |
| 7 | Якщо тіло має площину симетрії, обертається навколо осі, що проходить через центр мас перпендикулярно до цієї осі, то при приведені сил інерції до центра мас вони зводяться до:<br>1. головного вектора і головного моменту сил інерції;<br>2. головного моменту сил інерції;<br>3. головного вектора сил інерції |

Продовження таблиці 22.1

| 1 | 2 |
|---|---|
| 8 | Динамічні реакції, що діють на вісь $z$ тіла, що обертається навколо неї, будуть дорівнювати статичним коли:<br>1. $x_c = y_c = 0$, $J_x = J_y = 0$;<br>2. $z_c = 0$, $J_{xy} = J_{yz} = 0$;<br>3. $x_c = y_c = 0$, $J_{xy} = J_{yz} = 0$ |
| 9 | На якому рисунку правильно показаний головний вектор сил інерції однорідного стрижня АВ, вагою $P$ і довжиною $l$, що обертається зі сталою кутовою швидкістю навколо осі $z$?<br>1) 2) 3)<br><br> |

## ЛЕКЦІЯ 26

# 23 ПРИНЦИП МОЖЛИВИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ ТА ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ

### 23.1 Можливі переміщення. Число степенів вільності

Принцип можливих переміщень є ефективним при розгляді рівноваги системи тіл. При його застосуванні ефект дії в'язів враховується не введенням наперед невідомих реакцій, а шляхом розглядання можливих переміщень.

*Можливими переміщеннями називається будь-яка сукупність нескінченно малих переміщень точок системи які дозволяють в даний момент усі накладені на систему в'язі.* Можливе переміщення будь-якої точки системи будемо зображати елементарним вектором $\delta\overline{s}$ спрямованим у бік переміщення.

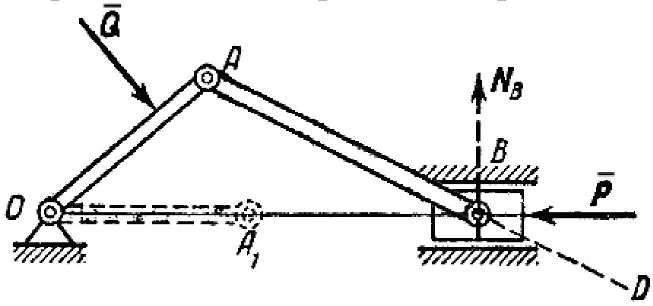



Рис. 23.1

Наприклад, для кривошипно-шатунного механізму (рис. 23.1) можливим переміщенням не можна вважати переміщення OA, у положення $OA_1$, так як у випадку кінцевого переміщення умови рівноваги під дією сил $\overline{Q}$ і $\overline{P}$ будуть вже іншими. Отже, можливі переміщення повинні бути нескінченно малими. Крім того, не можна вважати можливим навіть нескінченно мале переміщення уздовж лінії BD, так як це переміщення не дозволяють в'язі, накладені на точку B.

У загальному випадку для точок і тіл системи може існувати безліч різних можливих переміщень. Але для кожної системи залежно від характеру накладених на неї в'язів, можна вказати певну кількість таких незалежних між собою переміщень, що будь-яке інше можливе переміщення буде визначатися як їх геометрична сума. Наприклад, кульку, що лежить на якій-небудь площині, можна переміщувати по цій площині в безлічі напрямків. Але будь-яке її можливе переміщення $\delta\overline{s}$ можна отримати як суму двох переміщень $\delta\overline{s}_1$ і $\delta\overline{s}_2$ уздовж взаємно перпендикулярних осей, що лежать у цій площині, тобто $\delta\overline{s} = \delta\overline{s}_1 + \delta\overline{s}_2$.

*Число незалежних між собою можливих переміщень системи називається числом степенів вільності цієї системи.*

Так матеріальна точка (кулька) на поверхні має два степеня вільності. У вільної матеріальної точки три ступеня вільності. Вільне тверде тіло має шість ступенів вільності (незалежними переміщеннями будуть: три поступальні переміщення уздовж осей координат і три обертальні навколо цих осей). У кривошипно-шатунного механізму (рис. 23.1) буде один ступінь вільності.

## 23.2. Принцип можливих переміщень

***Можливою (або віртуальною) роботою*** називається елементарна робота яку може здійснити сила, що діє на матеріальну точку, на переміщенні, що співпадає з можливим переміщенням цієї точки.

Як відомо, накладені на систему в’язі є ідеальними, якщо сума елементарних робіт реакцій цих в’язів на будь-яких можливих переміщеннях системи дорівнює нулю, тобто:

$$\sum \delta A^r = 0, \tag{23.1}$$

де $\delta A^r$ – можлива робота реакції в’язі.

Розглянемо систему матеріальних точок, яка під дією всіх прикладених до неї сил і накладених на неї в’язей знаходиться в рівновазі. Візьмемо довільну точку $B_k$ системи і позначимо рівнодійну всіх прикладених до неї активних сил (зовнішніх і внутрішніх) через $\overline{F}_k^a$, а рівнодійну всіх реакцій в’язів – через $\overline{N}_k$. Так як точка $B_k$ разом з усією системою знаходиться у рівновазі, то $\overline{F}_k^a + \overline{N}_k = 0$, або $\overline{N}_k = -\overline{F}_k^a$. Отже, при будь-якому можливому переміщені точки $B_k$ можливі роботи активних сил $\delta A_k^a$ і реакцій в’язів $\delta A_k^r$ будуть рівними за модулем і протилежними за знаком, а в сумі будуть дорівнювати нулю, тобто:

$$\delta A_k^a + \delta A_k^r = 0.$$

Складаючи такі рівняння для кожної точки системи, отримаємо:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^r = 0.$$

Якщо в’язі, що накладені на систему, є ідеальними, то $\sum \delta A_k^r = 0$. Тоді остаточно отримаємо:

$$\sum \delta A_k^a = 0. \tag{23.2}$$

Рівняння (23.2) виражає принцип можливих переміщень для системи з ідеальними в’язами*: для рівноваги механічної системи з ідеальними в’язями необхідно і достатньо, щоб сума елементарних робіт всіх діючих на неї активних сил при будь-якому можливому переміщенні системи дорівнювала нулю*.

В аналітичній формі принцип можливих переміщень має вигляд:

$$\sum (F_{kx}^a \delta x_k + F_{ky}^a \delta y_k + F_{kz}^a \delta z_k) = 0, \tag{23.3}$$

де $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$ – проекції можливого переміщення $\delta \overline{s}_k$ точки $B_k$ на осі координат. Вони дорівнюють елементарним приростам координат цієї точки і обчислюються як диференціали координат.

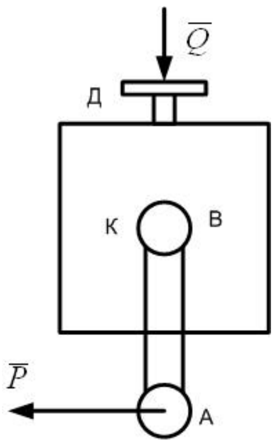


Рис. 23.2

***Приклад***: Знайти залежність між силами P і Q у підйомному механізмі, деталі якого сховані у коробці К (рис. 23.2). Відомо, що при кожному обертанні рукояті АВ (АВ=$l$) гвинт D висувається на величину h.

***Розв'язання***. Відповідно до (23.2) запишемо умови рівноваги:

$$Pl\delta\varphi_{AB} - Q\delta s_D = 0,$$

де $\delta\varphi_{AB}$ – можливе кутове переміщення рукояті АВ, якому відповідає $\delta s_D$ – можливе переміщення точки прикладання сили Q.

Між $\delta\varphi_{AB}$ і $\delta s_D$ можна встановити таку залежність:

$$\frac{\delta\varphi_{AB}}{2\pi} = \frac{\delta s_D}{h}, \text{ або } \delta\varphi_{AB} = \frac{2\pi}{h}\delta s_D.$$

Підставимо це значення $\delta\varphi_{AB}$ в попереднє рівняння, тоді отримаємо:

$$Q = \frac{2\pi}{h} lP.$$

При $l$=0.25м,h=5мм,Q=314 P.

Відзначимо, що методами геометричної статики цю задачу взагалі не можна розв'язати, так як деталі механізму невідомі.

Значення принципу можливих переміщень полягає в тому, що він дає в загальній формі умови рівноваги для будь-якої механічної системи і не вимагає розглядання рівноваги кожного з тіл системи на відміну від геометричної статики.

## 23.3 Загальне рівняння динаміки

Принцип можливих переміщень дає загальний метод розв'язання задач статики. З іншого боку, принцип Даламбера дозволяє використовувати методи статики для розв'язання задач динаміки. Отже, застосовуючи ці два принципи одночасно, ми можемо отримати загальний метод розв'язання задач динаміки.

Якщо до всіх точок системи, окрім діючих на них активних сил $\overline{F}_k^a$ і реакцій в'язів $\overline{N}_k$, додати відповідні сили інерції $\overline{F}_k^J = -m_k\overline{a}_k$, то відповідно до принципу Даламбера отримана система сил буде знаходитися у рівновазі. Тоді, застосовуючи до цих сил принцип можливих переміщень, отримаємо:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^J + \sum \delta A_k^r = 0.$$

Для системи матеріальних точок, на які накладені ідеальні в'язі, $\sum \delta A_k^r = 0$ і загальне рівняння динаміки на вигляд:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^I = 0 . \qquad (23.4)$$

З рівняння (23.4) маємо: *при русі системи з ідеальними в'язями в даний момент часу сума елементарних робіт всіх прикладених активних сил і всіх сил інерції на будь-якому можливому переміщенні системи буде дорівнювати нулю.*

В аналітичній формі рівняння (23.4) має вигляд:

$$\sum [(F_{kx}^a + F_{kx}^I)\delta x_k + (F_{ky}^a + F_{ky}^I)\delta y_k + (F_{kz}^a + F_{kz}^I)\delta z_k] = 0$$

# 24 УМОВИ РІВНОВАГИ І РІВНЯННЯ РУХУ СИСТЕМИ В УЗАГАЛЬНЕНИХ КООРДИНАТАХ

## 24.1 Узагальнені координати

Кількість координат (параметрів), що визначають положення механічної системи, залежить від кількості точок (або тіл), які утворюють систему, і від кількості і характеру накладених в'язів. Надалі будемо розглядати тільки системи з геометричними в'язями, тобто з в'язями, що накладають обмеження на положення точок системи у просторі, але не на їх швидкості.

*Узагальненими координатами заданої механічної системи називаються такі незалежні один від одного параметри, за допомогою яких можна в будь-який момент визначити положення цієї системи і, отже, виразити Декартові координати всіх точок через ці узагальнені координати.*

Узагальнені координати позначають буквою $q_i$.

Відповідно до визначення, декартову координату будь-якої точки системи можна виразити через узагальнені координати:

$$x_k = x_k(q_1, q_2, ..., q_s)$$

де s– кількість незалежних узагальнених координат.

Аналогічно можливим переміщенням, для кожної системи, залежно від характеру накладених на неї в'язів, можна вказати певну кількість таких незалежних між собою координат (параметрів), що всяка інша координата може бути визначена через узагальнені координати.

*Кількість незалежних між собою узагальнених координат дорівнює числу степенів вільності системи.*

Розглянемо питання про узагальнені координати на прикладі кривошипно-шатунного механізму (рис. 24.1).

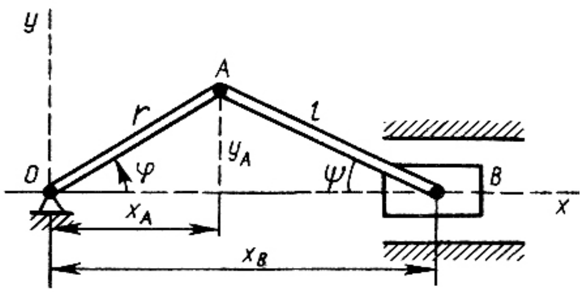


Рис. 24.1

У даному випадку положення цього механізму можна визначити однією узагальненою координатою, наприклад, q=φ. Отже, ця система має один степінь свободи. Дійсно, решта координат $x_A$, $y_A$ і $y_B$ механізму може бути визначена через цю узагальнену координату.

Враховуючи, що OA=r, а AB=l, запишемо: $x_A = r\cos\varphi$, $y_A = r\sin\varphi$, або $y_A = l\sin\psi$. З останніх двох рівнянь отримаємо:

$$\sin\psi = \frac{r}{l}\sin\varphi .$$

Тоді

$$x_B = r\,cos\,\varphi + l\,cos\,\varphi = r\,cos\,\varphi + l\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}sin^2\,\varphi}\,,$$

$$y_B = 0.$$

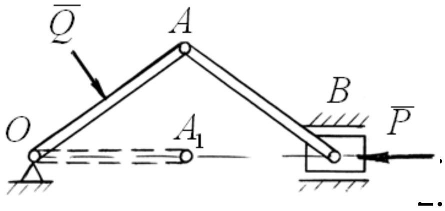
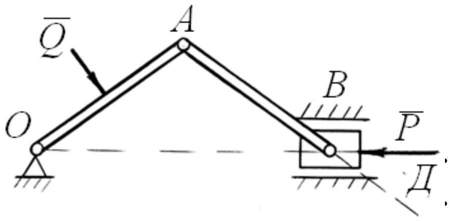
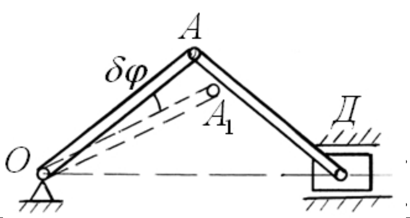
Таким чином, декартові координати точок А і В можна визначити через узагальнену координату φ.

**Питання для самоконтролю (Лекція 26)**

1. Що називається можливими переміщеннями?
2. Чому можливі переміщення повинні бути нескінченно малими?
3. Що називається степенем вільності системи?
4. Скільки степенів вільності і чому має точка, що рухається по горизонтальній поверхні?
5. В чому полягає принцип можливих переміщень?
6. В чому полягає загальне рівняння динаміки?
7. Що називається узагальненими координатами механічної системи?
8. Як пов'язані узагальнені координати з числом степенів вільності?

## Тести до теми 26 «Принцип можливих переміщень та загальне рівняння динаміки»

Таблиця 24.1

| № | Питання |
|---|---|
| 1 |  Чи можна вважати можливим переміщенням переміщення з положення ОА у положення $OA_1$ (див. рис.)?<br>1. так;<br>2. ні |
| 2 |  Чи можна вважати нескінченно мале переміщення уздовж лінії ВД можливим переміщенням (див. рис.)?<br>1. так;<br>2. ні |
| 3 |  Чи можна вважати нескінченно мале переміщення $\delta\varphi$ можливим переміщенням (див. рис.)?<br>1. так;<br>2. ні |
| 4 | Число незалежних між собою можливих переміщень системи називають:<br>1. числом ступенів вільності;<br>2. числом узагальнених переміщень;<br>3. числом узагальненої сили |
| 5 | Для рівноваги системи з ідеальними в'язями необхідно і достатньо, щоб:<br>1. $\sum \delta A^r = 0$;<br>2. $\sum \delta A^a = 0$;<br>3. $\sum \delta A^a + \sum \delta A^r = 0$ |
| 6 | Які два принципи об'єднують загальне рівняння динаміки?<br>1. незалежності дії та можливих переміщень;<br>2. Даламбера та можливих переміщень;<br>3. незалежності дії та Даламбера |
| 7 | Яке рівняння виражає загальне рівняння динаміки для системи матеріальних точок, на які накладені ідеальні в'язі?<br>1. $\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^J = 0$;<br>2. $\sum \delta A_k^e + \sum \delta A_k^i = 0$;<br>3. $\sum \delta A^r + \sum \delta A^J = 0$ |

## ЛЕКЦІЯ 27

### 24.2 Узагальнені сили

Розглянемо окремий випадок. Вантаж *A* вагою $P_1$ переміщується під дією сили F по гладкій поверхні, вантаж *B* вагою $P_2$ – по шорсткій горизонтальній площині, коефіцієнт якої дорівнює *f*. Вантажі, *A* і *B* сполучені нерозтяжною ниткою, що перекинута через блок *O* (рис. 24.2). За допомогою загального рівняння динаміки визначити рівняння руху ватажу *A* і *B*, масою блоку та нитки нехтуємо.

Розв’язок

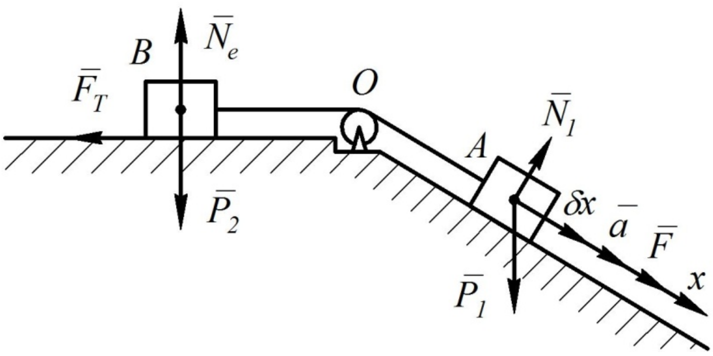



Рис. 24.2

Система має один степінь вільності. Віднесемо силу тертя $F_T$ до зовнішніх сил. Тоді можна вважати, що система має ідеальні в’язі і робота реакцій $N_1$ і $N_2$ дорівнюють нулю і загальне рівняння динаміки для даної системи має вигляд:

$$\sum_{k=1}^{n}\delta A_k^a + \sum_{k=1}^{n}\delta A_k^{ін} = 0. \qquad (a)$$

Приймемо за узагальнену координату q = x, що співпадає з напрямком нитки. Сума робіт всіх активних сил на можливому переміщені $\delta x$ дорівнює:

$$\sum_{k=1}^{n}\delta A_k^a = (F + P_1\sin\alpha - F_T)\delta x, \qquad (б)$$

де $F_T = f\,P$.

Оскільки тіла A і B здійснюють поступальний рух, то сили інерції. що діють на них, обчислюються за формулами:

$$F_1^{ін} = \frac{P_1}{g}a, \quad F_1^{ін} = \frac{P_2}{g}a$$

і спрямовані в бік протилежний прискоренню.

Сума робіт сил інерції на можливому переміщені $\delta x$ дорівнює

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^{ін} = ( P_1 + P_2 ) \frac{a}{g} \delta x . \qquad (в)$$

Враховуючи (а) і (в),загальне рівняння динаміки (а) перепишемо у вигляді:

$$\frac{P_1 + P_2}{g} a = ( F + P_1 \sin \alpha - F_T ) . \qquad (г)$$

З рівняння (г) маємо, що рух системи, що складається з декілька тіл, і має одну ступінь вільності можна описати одним рівнянням, яке за формою відповідає основному рівнянню динаміки $m_{зв.} = Q$, де всі маси системи замінені однією зведеною масою $m_{зв.}$, всі сили, що діють на систему зведені до узагальненої сили $Q$. В даному випадку зведена маса і узагальнена сила дорівнюють:

$$m_{зв.} \frac{P_1 + P_2}{g} a ,$$

$$Q = ( F + P_1 \sin \alpha - F_T ) . \qquad (д)$$

Порівнюючи вирази (б) і (д), можна заключити: *узагальненою силою називається величина, що дорівнює коефіцієнту при прирощенні узагальненої координати у формулі елементарної роботи всіх сил, що діють на систему.*

Розглянемо загальний випадок, коли механічна система складається з $n$, на які діють сили $F_1, F_2,\quad F_n$ і має $s$ степенів вільності. Тоді положення системи визначається узагальненими координатами $q_1, q_2,\quad q_s$. Надамо системі можливе переміщення, змінюючи тільки одну координату $q_1$. Тоді кожний з радіусів-векторів $r_k$ точок системи отримає елементарне прирощення $( \delta r_k )_1$. Оскільки, $r_k = ( q_1, q_2, .... q_s )$ змінюється тільки одна координата $q_1$, при переміщенні, що розглядається, а решта координат зберігає постійне значення, то $( \delta r_k )_1$ обчислюється як частковий диференціал:

$$( \delta r_k )_1 = \frac{\partial r_k}{\partial q_1} \partial q_1 . \qquad (24.1)$$

На підставі формули $dA = \overline{r} \times \overline{F}$ і рівності (24.1) обчислимо суму елементарних робіт всіх діючих сил на переміщенні $( \delta r_k )_1$, яку позначимо $\delta A_1$:

$$\delta A_1 = \bar{F}_1(\delta\bar{r}_1)_1 + \bar{F}_2(\delta\bar{r}_2)_1 + ...\bar{F}_n(\delta\bar{r}_n)_1 =$$
$$= \bar{F}_1 \frac{\partial\bar{r}_1}{\partial q_1}\delta q_1 + \bar{F}_2 \frac{\partial\bar{r}_2}{\partial q_1}\delta q_1 + ... + \bar{F}_n \frac{\partial r_n}{\partial q_1}\delta q_1$$

Винесемо загальний множник $\partial q_1$ за дужки і остаточно будемо мати:

$$\partial A_1 = Q_1 \partial q_1, \tag{24.2}$$

де

$$Q_1 = \Sigma \bar{F}_k \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1}. \tag{24.3}$$

.

За аналогією з рівністю $dA = F_\tau \delta s$ елементарну роботу сили $\bar{F}$, величину $Q_1$ називають *узагальненою силою,* що відповідає відповідної координаті $q_1$.

Надамо системі друге незалежне можливе переміщення, при якому змінюється тільки координата $q_2$ і отримаємо для елементарної роботи всіх сил, що діють на цьому переміщені, вираз:

$$\partial A_2 = Q_2 \partial q_2, \tag{24.4}$$

де

$$Q_2 = \Sigma \bar{F}_k \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_2}. \tag{24.5}$$

Величина $Q_2$ представляє собою узагальнену силу, що відповідає координаті $q_2$ та ін.

Очевидно, якщо надати системі таке можливе переміщення, при якому змінюється всі її узагальнені координати $q_i$ (i=1,2,...,s), то елементарна робота всіх діючих сил на цьому переміщенні визначиться рівністю

$$\Sigma\delta A = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \ldots + Q_s\delta q_s. \tag{24.6}$$

Отже, кожній узагальненій координаті відповідає *узагальнена сила, яку визначають як величину, що дорівнює коефіцієнту при прирощені відповідної узагальненої координаті у формулі елементарної роботи всіх сил, що діють на систему*.

Розмірність узагальненої сили залежить від розмірності відповідної узагальненої координати:

$$[Q] = \frac{[A]}{[q]}.$$

Якщо q лінійна величина (м), то Q має розмірність звичайної сили, Н. Якщо q – кут (величина безмірна), то Q буде вимірюватися в Нм.

***Обчислювання узагальнених сил*** здійснюється за формулою аналогічній (24.8) $\delta A_i = Q_i \delta q_i$, де $Q_i$ – узагальнена сила яка відповідає узагальненій координаті $q_i$.

Для обчислювання узагальнених сил необхідно:

1. Визначити число степенів вільності.
2. Вибрати узагальнені координати.
3. Прикласти всі сили, діючи на систему.
4. Надати системі таке можливе переміщення, при якому змінюється тільки одна узагальнена координата $q_i$, і обчислити на цьому переміщенні суму елементарних робіт всіх діючих сил. Узагальнена сила $Q_i$ буде дорівнювати коефіцієнту в формулі роботи при $\delta q_i$.

***Випадок потенціальних сил.*** Якщо сили, що діють на систему потенціальні, то існує функція U. При цьому, сума елементарних робіт діючих сил дорівнює повному диференціалу цієї функції:

$$\delta A = \delta U .$$

Так як $U = U(q_1, q_2, ..., q_s)$, то

$$\delta A = \frac{\partial U}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2}\delta q_2 + ... + \frac{\partial U}{\partial q_s}\delta q_s . \qquad (24.7)$$

Порівнюючи це рівняння з рівнянням (24.9) приходимо до висновку, що

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1}, Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2}, ..., Q_s = \frac{\partial U}{\partial q_s}.$$

Враховуючи, що П= –U, отримаємо:

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}, Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}, ..., Q_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_s}.$$

Таким чином, *якщо всі діючи на систему сили потенціальні, то узагальнені сили дорівнюють частковим похідним від силової функції або взятим зі знаком мінус частковим похідним від потенціальної енергії за відповідними узагальненими координатам.*

## 24.3 Умови рівноваги системи в узагальнених координатах

Відповідно до принципу можливих переміщень необхідно і достатньою умовою рівноваги механічної системи є рівність нулю сума елементарних робіт сил на будь-якому можливому переміщенні системи, тобто $\sum \delta A_k = 0$. В узагальнених координатах відповідно рівності (24.9) ця умова дає:

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + ... + Q_s \delta q_s = 0. \quad (24.8)$$

Рівність (24.11) може виконуватися лише тоді, коли:

$$Q_1 = 0, Q_2 = 0, ..., Q_s = 0. \quad (24.9)$$

Таким чином, *для рівноваги механічної системи необхідно і достатньо, щоб всі узагальнені сили, що відповідні вибраним для даної системи узагальненим координатам, були рівними нулю*.

Порівняння метода обчислювання узагальнених сил і метода розв’язання завдань за допомогою принципу можливих переміщень бачимо, що в останньому випадку по суті ми визначили узагальнені сили і прирівнювали їх до нуля.

## § 4 Рівняння Лагранжа (рівняння руху механічної системи)

Для того щоб знайти рівняння руху механічної системи з геометричними в’язями в узагальнених координатах, звернемося до загального рівняння динаміки (23.4):

$$\sum \delta A_k + \sum \delta A^I = 0, \quad (24.13)$$

де відповідно до (24.8), (24.9):

$$\sum \delta A_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + ... + Q_s \delta q_s, \quad (24.14)$$

$$\sum \delta A_k^I = Q_1^I \delta q_1 + Q_2^I \delta q_2 + ... + Q_s^I \delta q_s,$$

$$Q_1 = \sum \overline{F}_k \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_1}, Q_2 = \sum \overline{F}_k \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_2}, ..., Q_s = \sum \overline{F}_k \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_s}, \quad (24.15)$$

$$Q_1^I = \sum \overline{F}_k^I \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_1}, Q_2^I = \sum \overline{F}_k^I \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_2}, ..., Q_s^I = \sum \overline{F}_k^I \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_s}. \quad (24.16)$$

Підставимо (24.14) в (23.13) і отримаємо:

$$(Q_1 + Q_1^I)\delta q_1 + (Q_2 + Q_2^I)\delta q_2 + ... + (Q_s + Q_s^I)\delta q_s = 0\,. \tag{24.17}$$

Рівняння (24.16) справедливе при виконанні умови:

$$Q_1 + Q_1^I = 0,\; Q_2 + Q_2^I = 0, ... ,\; Q_s + Q_s^I = 0\,. \tag{24.18}$$

Отриманими рівняннями можна безпосередньо користуватися для складання рівняння руху та розв'язання задач динаміки. Але процес складання цих рівнянь значно спрощується, якщо всі узагальнені сили інерції виразити через кінетичну енергію системи.

Спочатку розглянемо узагальнену силу $Q_1^I$. Оскільки сила інерції будь-якої з точок системи $\overline{F}_k^I = -m_k \overline{a}_k = -m_k \dfrac{d\overline{v}_k}{dt}$, то перша формула (24.16) дає:

$$-Q_1^I = \sum m_k \frac{d\overline{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_1}\,. \tag{24.19}$$

Перетворимо праву частину рівності (24.19) так, щоб вона мала тільки швидкості. Для цього, насамперед помітимо, що:

$$\frac{d\overline{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\overline{v}_k \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_1}\right) - \overline{v}_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_1}\right). \tag{24.20}$$

Для похідних від $\overline{r}_k$ що містить рівняння (24.20), правдиві такі висновки:

1. Операція повного диференціювання за часом $t$ і часткове диференціювання по $q_1$ переміщовальні, що дає:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{d\overline{r}_k}{dt}\right) = \frac{\partial \overline{v}_k}{\partial q_1}. \tag{24.21}$$

2. Відповідно до правила Лопіталя:

$$\frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_1} = \frac{\partial \dot{\overline{r}}_k}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \overline{v}_k}{\partial \dot{q}_1}\,. \tag{24.22}$$

Підставимо (24.21) та (24.22) в (24.20) і отримаємо:

$$\frac{d\overline{v}_k}{dt}\cdot\frac{d\overline{r}_k}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\overline{v}_k\,\frac{\partial\overline{v}_k}{\partial\dot{q}_1}\right)-\overline{v}_k\,\frac{\partial\overline{v}}{\partial q_1}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\overline{v}_k^2}{\partial\dot{q}_1}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial\overline{v}_k^2}{\partial q_1}.$$

Тоді, враховуючи, що $m_k=const$, а сума похідних дорівнює похідній від суми, рівняння (24.19) перепишемо так:

$$-Q_1^I=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_1}\left(\sum\frac{m_k\overline{v}_k^2}{2}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\sum\frac{m_k\overline{v}_k^2}{2}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1},$$

де

$$T=\sum\frac{m_k\overline{v}_k^2}{2}=\sum\frac{m_k\overline{v}_k^2}{2}$$

є кінетична енергія системи.

Оскільки відповідно (24.18) $Q_1=-Q_1^I$, то отримаємо:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=Q_1.$$

Складемо такі рівняння для всіх точок системи:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=Q_1,\\&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_2}=Q_2,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s.\end{aligned}\right\}\qquad(24.23)$$

*Рівняння* (24.23) *є диференціальними рівняннями руху системи в загальних координатах або рівняння Лагранжа*.

***Приклад***. Для системи, наведеної на рис. 24.2, визначити прискорення тіла А.

***Розв'язання***. Система має один степінь вільності. Виберемо за узагальнену координату переміщення вантажу А, яка дорівнює x, і складемо рівняння Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_1.$$

Кінетична енергія системи складається з кінетичних енергій мас А та В. Так як швидкість цих мас дорівнює $v=\dot{x}$, то:

$$T=\frac{P_1\dot{x}^2}{2g}+\frac{P_2\dot{x}^2}{2g}=\frac{\left(P_1+P_2\dot{x}^2\right)}{2g}.$$

Обчислимо

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=\frac{\left(P_1+P_2\right)\dot{x}}{g},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)=\frac{P_1+P_2}{g}\ddot{x},$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0.$$

Підставимо ці значення, а також величину узагальненої сили $Q_1$ в рівняння Лагранжа:

$$\frac{P_1+P_2}{g}\ddot{x}=P_1 \sin\alpha - fP_2.$$

Відкіля

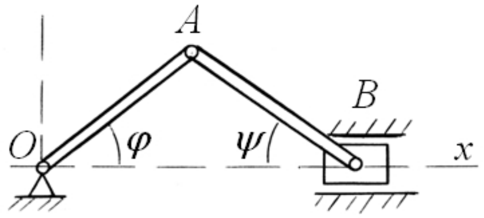
$$\ddot{x}=a=\frac{g\left(P_1 \sin\alpha - fP_2\right)}{P_1+P_2}.$$

**Питання для самоконтролю (Лекція 27)**

1. Що називається узагальненою силою?
2. Які операції необхідно здійснити, щоб визначити узагальнену силу?
3. Як визначається узагальнена сила, якщо на систему діють потенціальні сили?
4. Умови рівноваги системи в узагальнених координатах?
5. Який вигляд мають диференціальні рівняння руху системи в загальних координатах?
6. Скільки рівнянь Лагранжа треба записати для системи?

**Тести до теми 23 «Умови рівноваги і рівняння руху системи в узагальнених координатах»**

Таблиця 27.1

| № | Питання |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 1 |  Які координати для механізму, наведеному на рис., можна вважати узагальненими?<br>1. $\varphi$ і $\psi$;<br>2. $\varphi$ або $\psi$ |
| 2 | Узагальненою силою називається величина, що дорівнює:<br>1. сумі всіх сил, що діють на систему;<br>2. коефіцієнту у формулі елементарної роботи всіх сил при збільшені узагальненої координати;<br>3. коефіцієнту у формулі роботи всіх сил на переміщені із даного в початкове положення |
| 3 | $Q_i = 0$. Якщо всі діючи на систему сили потенціальні, то узагальнені сили дорівнюють:<br>1. $Q_i = \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$;<br>2. $Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$;<br>3. $Q_i = 0$ |
| 4 | Які рівняння виражають умови рівноваги системи в узагальнених координатах?<br>1. $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$, ..., $\Pi_s = 0$;<br>2. $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, ..., $T_s = 0$;<br>3. $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$, ..., $Q_s = 0$ |
| 5 | Яке диференціальне рівняння у формі рівняння Лагранжа для системи з одним степенем вільності наведено правильно?<br>1. $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q$;<br>2. $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dT}{d\dot{q}}\right) - \frac{dT}{dq} = 0$;<br>3. $\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{dq}\right) - \frac{dT}{d\dot{q}} = Q$ |

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. Павловський М.А. Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Бондаренко А.А., Дубінін О.О., Переяславцев О.М. Теоретична механіка: Підручник: У 2 ч. – Ч.1: Статика. Кінематика. – К.: Знання, 2004. – 599 с.
3. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: Учебник. – М., 2010. – 720 с.
4. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теоретической механики. – М., 2009 – 256 с.
5. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики: В 2 т. – М.: Наука, 1976-1979. – Т. 1. – 240 с.; Т. 2. – 461 с.
6. Гернет М.М. Курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1981. – 303 с.
7. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики: В 2 т. – М.: Наука, 1972-1977. – Т. 1. – 456 с.; Т. 2. – 462 с.
8. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике. – М., 2008. − 448 с.
9. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник. – М.: Высшая школа, 1995. – 416 с.
10. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебн. пособие для техн. вузов / Яблонский А.А., Норейко С.С., Вольфсон С.А. и др.: Под ред. А.А. Яблонского. – М.: Высш. шк., 1985. – 367 с.
11. Бать М.М., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 1. Статика и кинематика. Том 2. Динамика. – М., 2009.
12. Новожилов И.В., Зацепин М.Ф. Типовые расчеты по теоретической механике на базе ЭВМ: Учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 1986. – 136 с.
13. Сборник коротких задач по теоретической механике: Учеб. пособие для втузов / Кепе О.Э., Виба Я.А., Грапис О.П. и др.; Под ред. О.Э. Кепе. – М.: Высш. шк., 1989. – 368 с.
14. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов. – М.: Высш. шк., 1986. – 416 с.
15. Теоретична механіка: Збірник задач О.С. Апостолюк, В.М. Воробйов, Д.І. Ільчишина та ін.; За ред. М.А. Павловського. – К.: Техніка, 2007. – 400 с.
16. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: В 2 т. – М.: Высш. шк., 1977. – Т. I. – 431 с.; Т. 2. – 532 с.
17. Базилевский Н.Е., Креймер Ю.Г. Методические указания и задания к выполнению курсовых работ по теоретической механике (Статика). – Днепропетровск: ДИСИ, 1983. – 72 с.
18. Виноградов Б.В. Теоретична механіка. Практичні заняття. Електронне тестування. Ч.1 / С.В. Немчинов. – Дніпропетровськ, УДХТУ. – 2014. − 398 с.
19. Виноградов Б.В Теоретична механіка. Практичні заняття. Електронне тестування. Ч.2 / С.В. Немчинов. – Дніпропетровськ, УДХТУ. – 2016. − 332 с.
20. Виноградов Б.В. Тренажер з теоретичної механіки. Навчальний посібник Ч.1 / В.О. Федін, Б.В. Виноградов. – Д.: ДВНЗ УДХТУ. – 2016. − 164 с.