

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ХІМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
ДО ВИКОНАННЯ КОМП'ЮТЕРНИХ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ  
З РОЗДІЛУ «ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА»  
для студентів II курсу спеціальностей  
ХМ, МП, ТМ, ОХВ, ХОМ, ХВ

Затверджено на засіданні  
кафедри матеріалознавства.  
Протокол № 10 від 9.04.2014.

Дніпропетровськ УДХТУ 2014

Методичні вказівки до виконання комп'ютерних лабораторних робіт з розділу «Плоскопаралельний рух твердого тіла» для студентів II курсу спеціальностей ХМ, МП, ТМ, ОХВ, ХОМ, ХВ / Укл.: С. І. Немчинов, Б.В. Виноградов, Д.О. Федін. – Дніпропетровськ: ДВНЗ УДХТУ, 2014. – 42 с.

Укладачі: С.І. Немчинов, канд. техн. наук,  
Б.В. Виноградов, д-р техн. наук,  
Д.О. Федін, канд. техн. наук

Відповідальний за випуск: Б.В. Виноградов, д-р техн. наук

#### Навчальне видання

Методичні вказівки до виконання комп'ютерних лабораторних робіт з розділу «Плоскопаралельний рух твердого тіла» для студентів II курсу спеціальностей ХМ, МП, ТМ, ОХВ, ХОМ, ХВ

Укладачі: НЕМЧИНОВ Сергій Ілліч  
ВИНОГРАДОВ Борис Володимирович  
ФЕДІН Дмитро Олександрович

Редактор Л.М. Тонкошкур  
Коректор Л.Я. Гоцуцова

Підписано до друку 13.05.14. Формат 60×84 1/16. Папір ксерокс. Друк різогр.  
Умов.-друк. арк. 1,87. Облік.-вид. арк. 1.91. Тираж 50 прим. Замов. № 183.  
Свідоцтво ДК № 303 від 27.12.2000.

---

ДВНЗ УДХТУ, 49005, м. Дніпропетровськ-5, просп. Гагаріна, 8.

---

Видавничо-поліграфічний комплекс ІнКомЦентру

# ПЛОСКИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

## 1 Визначення швидкості точок твердого тіла

### 1.1 Загальні відомості. Способи визначення швидкості точок тіла

Плоским (плоскопаралельним) називається рух твердого тіла, при якому всі точки тіла здійснюють рух у площинах, які паралельні деякій нерухомій площині. На рис. 1 зображена кінематична схема механізму, ланка  $AB$  і колесо  $C$  якого здійснюють плоский рух.

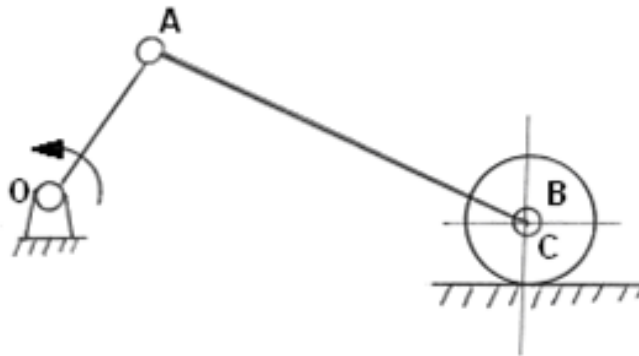


Рис. 1

При плоскому русі швидкість будь-якої точки  $M$  плоскої фігури дорівнює векторній сумі швидкості іншої точки  $A$ , прийнятої за полюс, і швидкості, яку точка  $M$  отримує при обертанні фігури навколо цього полюса (рис. 2).

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA}. \quad (1)$$

При цьому:

$$v_{MA} = \omega \cdot MA, \quad (2)$$

де  $\omega$  – кутова швидкість фігури.

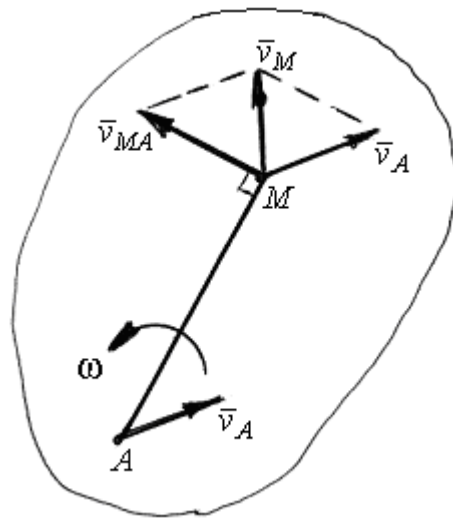


Рис. 2

На практиці для визначення швидкостей точок часто застосовують теорему про проекції швидкостей двох точок тіла (рис. 3): *проекції швидкостей двох точок твердого тіла на вісь, що проходить через ці точки, рівні:*

$$v_A \cdot \cos \alpha = v_B \cdot \cos \beta. \quad (3)$$

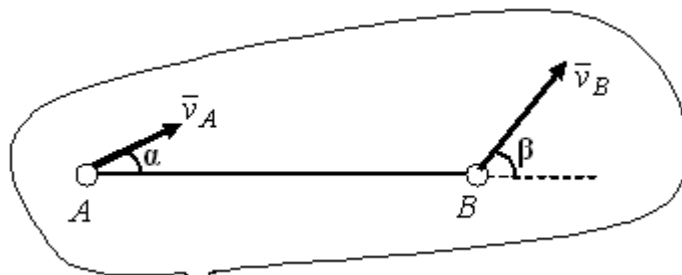


Рис. 3

Цим методом зручно користуватись для визначення швидкостей точок плоского тіла, коли відомі модуль і напрямок швидкості однієї точки та напрямок швидкості будь-якої другої точки.

Інший простий і наочний метод визначення швидкостей точок твердого тіла при плоскому русі базується на понятті миттєвого центра швидкостей (МЦШ).

*Миттєвим центром швидкостей називається точка плоскої фігури, швидкість якої в даний момент дорівнює нулю.*

Для визначення положення миттєвого центра швидкостей необхідно провести перпендикуляри до векторів швидкостей двох точок, наприклад, до векторів  $\vec{v}_A$ ,  $\vec{v}_B$  точок  $A$  і  $B$ . Точка перетинання перпендикулярів і буде миттєвим центром швидкостей (рис. 4).

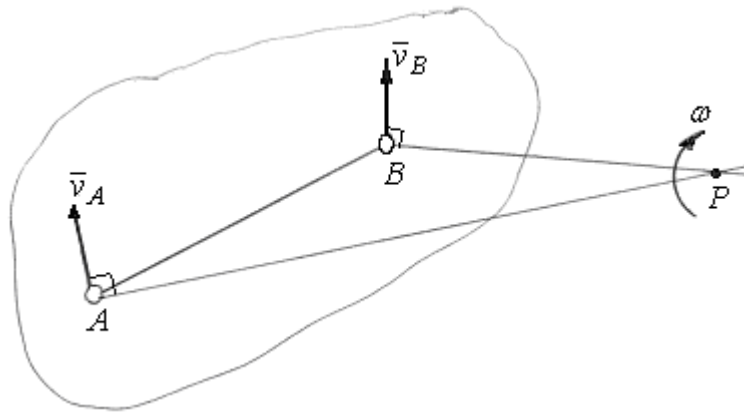


Рис. 4

Кутова швидкість  $\omega$  плоскої фігури в кожний даний момент часу дорівнює відношенню швидкості будь-якої точки фігури до її відстані від миттєвого центра швидкостей (рис. 4)

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP}. \quad (4)$$

Розглянемо окремі випадки положення миттєвого центра швидкостей (рис. 5).

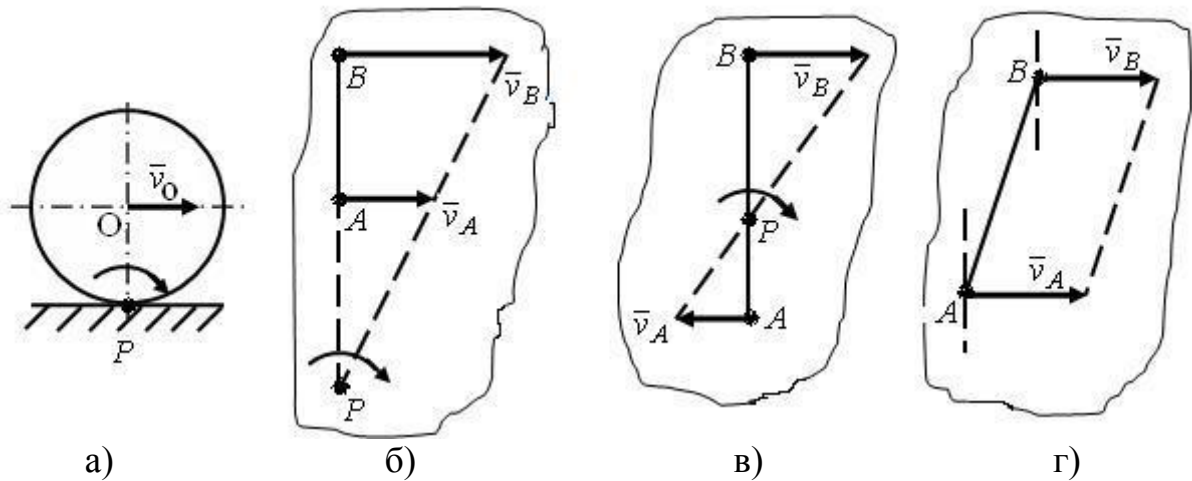


Рис. 5

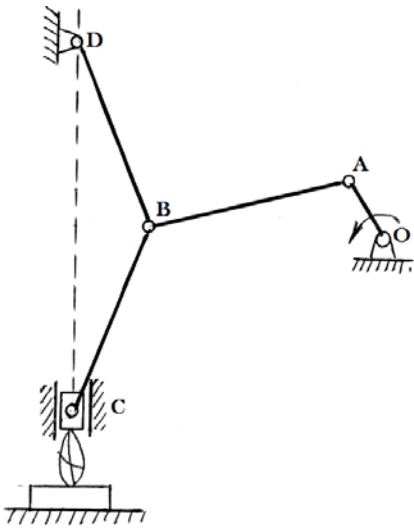
1. Колесо котиться без ковзання по нерухомій поверхні. Миттєвий центр швидкостей в цьому випадку знаходиться в точці дотику  $P$  (рис. 5, а).

2. Якщо  $\bar{v}_A \perp AB$  і  $\bar{v}_B \perp AB$ , то миттєвий центр швидкостей визначається побудовами, що показані на рис. 5, б, в.

3. Якщо  $\bar{v}_A \parallel \bar{v}_B$  і не перпендикулярні до  $AB$ , то миттєвий центр швидкостей лежить у нескінченності (рис. 5, г).

## 1.2 Тестові завдання

1. На рис. 6 наведена кінематична схема преса. Які ланки преса здійснюють плоский рух?



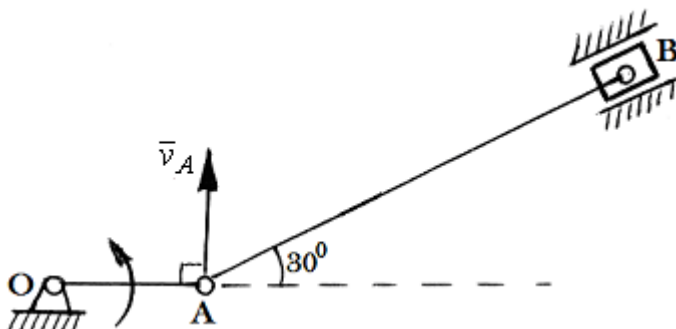
1. OA, AB.
2. AB, BD.
3. AB, CB.
4. BD, OA.

Рис. 6

2. За якою формулою визначається швидкість точки  $M$  при плоскому русі?

1.  $\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_B$ .
2.  $\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_B + \bar{v}_{MA}$ .
3.  $\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA}$ .
4.  $v_M = \omega \cdot MA + v_{AM}$ .

3. Чому дорівнює швидкість точки  $B$  (рис. 7), якщо  $v_A = 2 \text{ м/с}$ ?



1. 0,5 м/с.
2. 2 м/с.
3. 4 м/с.
4. 1 м/с.

Рис. 7

4. На якій схемі (рис. 8) вірно показано побудову миттєвого центра швидкостей ланки  $AB$ ?

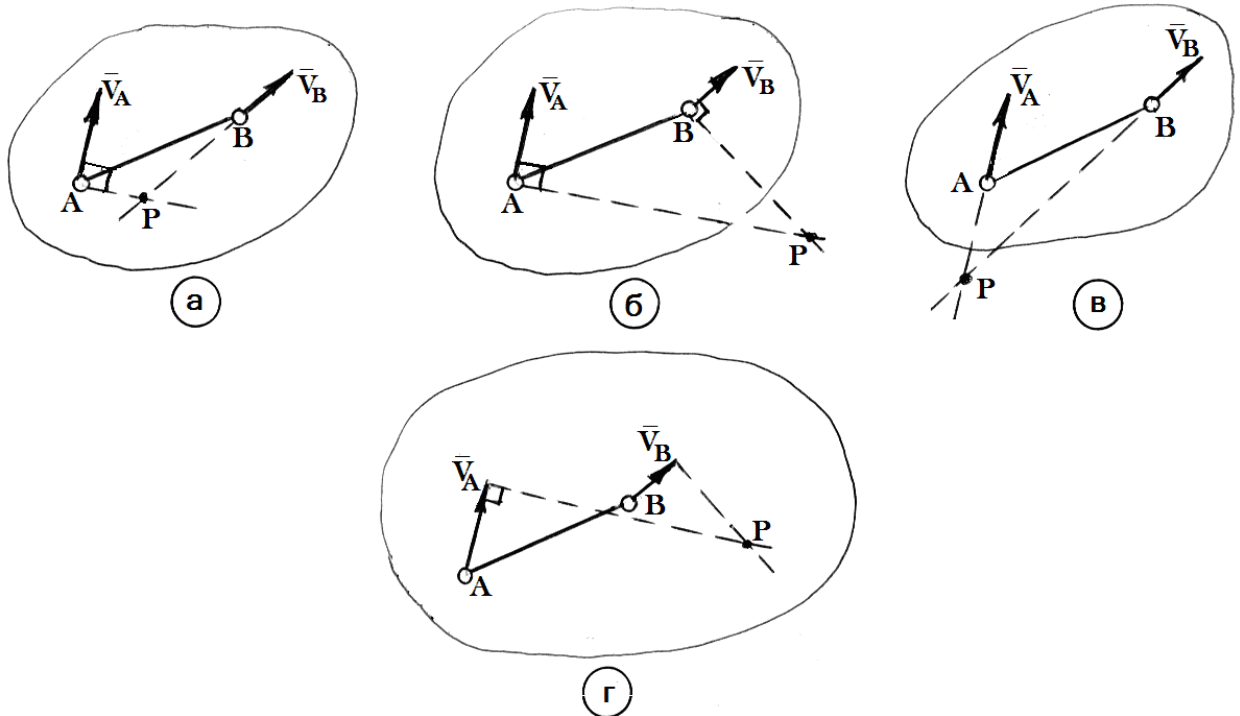


Рис. 8

Варіанти відповіді:

- 1) а;
- 2) б;
- 3) в;
- 4) г.

5. За якою формулою визначається кутова швидкість ланки  $AB$  (рис. 8, б), що здійснює плоский рух?

$$1. \omega_{AB} = v_A \cdot AP.$$

$$2. \omega_{AB} = \frac{v_A}{v_B}.$$

$$3. \omega_{AB} = \frac{v_A}{AP}.$$

$$4. \omega_{AB} = \frac{AP}{v_A}.$$

### 1.3 Методичні вказівки та приклади розв'язання задач

Для розв'язання задач можливо застосовувати аналітичний і графоаналітичний методи визначення швидкостей.

Аналітичний метод доцільно застосовувати у випадку, коли відомі рівняння руху або їх легко скласти.

Графоаналітичний метод доцільно застосовувати у тих випадках, коли необхідно визначити швидкості точок у даний момент часу при певному положенні плоскої фігури.

При графоаналітичному методі пропонується така послідовність розв'язування задач:

- 1) вибрати в якості полюса ту точку плоскої фігури, швидкість якої відома або її можна визначити із умови задачі;
- 2) знайти іншу точку, напрямом швидкості якої відомий;
- 3) обчислити швидкість цієї точки за формулою розподілу швидкостей;
- 4) визначити значення кутової швидкості у даний момент із формули розподілу швидкостей;
- 5) за знайденим значенням кутової швидкості визначити швидкості інших точок.

Якщо задача розв'язується із застосуванням миттєвого центра швидкостей, то необхідно притримуватися такої послідовності:

- 1) визначити положення миттєвого центра швидкостей;
- 2) знайти величину миттєвого радіуса цієї точки плоскої фігури, швидкість якої відома;
- 3) визначити кутову швидкість плоскої фігури, поділив величину швидкості точки на величину миттєвого радіуса;
- 4) знайти шукані величини швидкостей точок плоскої фігури, помножуючи кутову швидкість на миттєвий радіус відповідної точки.

*Примітка.*

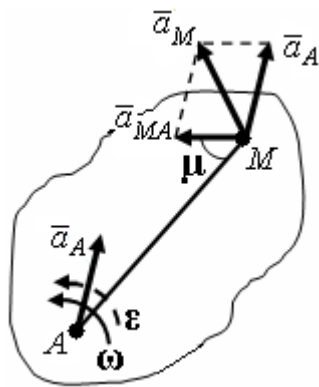
При розв'язанні задач розглядають послідовно рух окремих ланок механізму, починаючи з тієї ланки, рух якої задано, і при переході від однієї ланки до іншої визначають швидкості тих точок, які є спільними для цих двох ланок механізму. Необхідно пам'ятати, що *миттєвий центр швидкостей можна знаходити тільки для однієї ланки окремо*; теж саме відноситься і до кутових швидкостей.

## **2 Визначення прискорення точок тіла при плоскому русі**

### **2.1 Загальні відомості**

*Прискорення будь-якої точки  $M$  плоскої фігури при плоскому русі дорівнює векторній сумі прискорення іншої точки  $A$ , що прийнята за полюс, і прискорення, яке точка  $M$  отримує при обертанні фігури навколо цього полюса (рис. 9).*





$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}. \quad (5)$$

Рис. 9

Якщо прискорення  $\bar{a}_{MA}$  представити у вигляді векторної суми дотичного і нормального прискорень, то векторна формула (5) набуває вигляду:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}^n + \bar{a}_{MA}^\tau. \quad (6)$$

Модулі прискорень  $\bar{a}_{MA}^n$  і  $\bar{a}_{MA}^\tau$  обчислюються за формулами:

$$a_{MA}^n = \omega^2 \cdot MA, \quad (7)$$

$$a_{MA}^\tau = \varepsilon \cdot MA. \quad (8)$$

Вектор  $\bar{a}_{MA}^n$  напрямлений від точки  $M$  до точки  $A$ , а вектор  $\bar{a}_{MA}^\tau$  напрямлений перпендикулярно до  $AM$  у бік обертання, якщо воно прискорено (рис. 10, а), і в протилежний, якщо воно уповільнене (рис. 10, б).

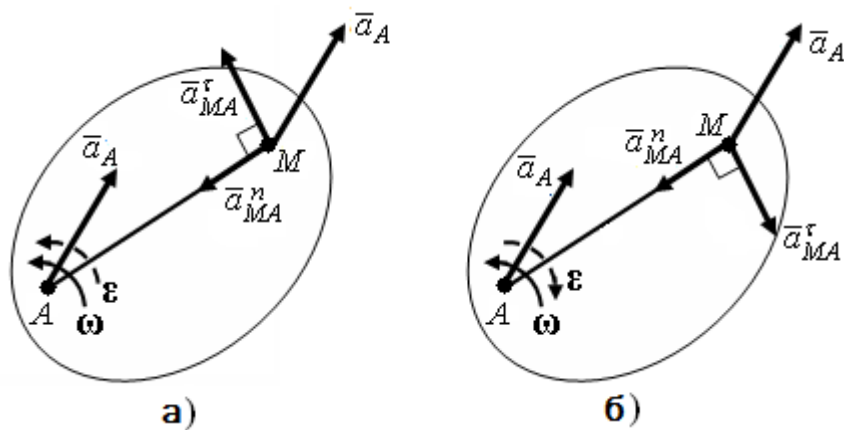


Рис. 10

Якщо полюс  $A$  рухається не прямолінійно, то його прискорення складатиметься із дотичного і нормального прискорень. Тоді:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{MA}^n + \bar{a}_{MA}^\tau. \quad (9)$$

При розв'язанні задач за полюс вибирають точку, прискорення якої відоме, а модулі двох останніх складових  $\bar{a}_{MA}^\tau$  і  $\bar{a}_{MA}^n$  обчислюють за формулами (7),(8).

Значення  $\bar{a}_{MA}$ , як прискорення точки тіла, що обертається, визначається за формулою

$$a_{MA} = MA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (10)$$

При цьому  $\bar{a}_{MA}$  утворює з відрізком  $MA$  кут  $\mu$  (рис. 15), який визначається за формулою

$$tg\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (11)$$

## 2.2 Тестові завдання

1. За якою формулою обчислюється прискорення будь-якої точки  $M$  при плоскому русі?

1.  $\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_B$ .
2.  $\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_B + \bar{a}_{MA}$ .
3.  $\bar{a}'_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}$ .
4.  $\bar{a}_M = \bar{a}_B + \bar{a}_{MA}$ .

2. На якій схемі (рис. 11) вірно показано складові вектора прискорення точки  $B$   $\bar{a}_B$  ланки  $AB$ , яка здійснює плоский рух? Відомо, що ланка  $AB$  обертається уповільнено навколо полюса  $A$  проти руху стрілки годинника, а  $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau$ .

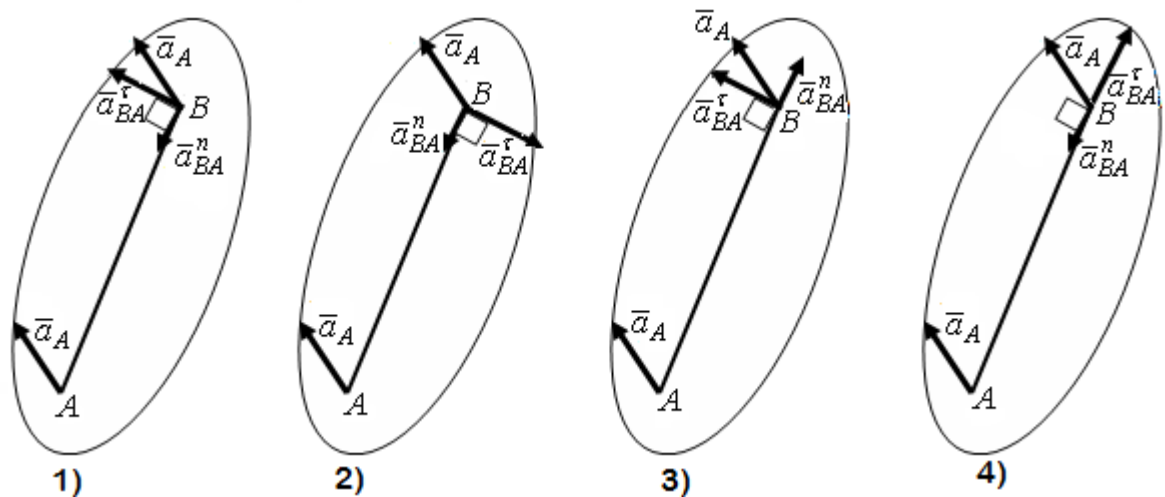


Рис. 11

3. В якому варіанті вірно вказані формули для обчислення модулів прискорень  $\bar{a}_{MA}^n, \bar{a}_{MA}^\tau$ , якщо  $\bar{a}_A = \bar{a}_M + \bar{a}_{MA}^n + \bar{a}_{MA}^\tau$ ?

1.  $a_{MA}^n = \omega_{MA} \cdot MA$   
 $a_{MA}^\tau = \varepsilon_{MA} \cdot MA$

2.  $a_{MA}^n = \omega_{MA} \cdot MA^2$   
 $a_{MA}^\tau = \varepsilon_{MA} \cdot MA$

3.  $a_{MA}^n = \omega_{MA}^2 \cdot MA$   
 $a_{MA}^\tau = \varepsilon_{MA} \cdot MA$

4.  $a_{MA}^n = \omega_{MA}^2 \cdot MA$   
 $a_{MA}^\tau = \varepsilon^2 \cdot MA$

4. За якою формулою визначається кут  $\mu$  між вектором  $\bar{a}_{MA}$  і відрізком  $MA$ ?

1.  $\operatorname{tg} \mu = \frac{\varepsilon^3}{\omega^4}$

2.  $\operatorname{tg} \mu = \frac{\omega^2}{\varepsilon}$

3.  $\operatorname{tg} \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$

4.  $\operatorname{tg} \mu = \frac{\varepsilon}{\omega}$

5. Чому дорівнює величина кутового прискорення колеса, що котиться без ковзання по нерухомій поверхні, якщо швидкість та прискорення центра колеса  $v_0=2$  м/с,  $a_0=1$  м/с<sup>2</sup>, а його радіус  $R=0,5$  м?

1.  $4 \text{ с}^{-2}$

2.  $3 \text{ с}^{-2}$

3.  $2 \text{ с}^{-2}$

4.  $1 \text{ с}^{-2}$

### 2.3. Методичні вказівки та приклади розв'язання задач

Прискорення будь-якої точки плоскої фігури у даний момент часу можна знайти, якщо відомі:

- 1) вектори швидкості і прискорення будь-якої точки у даний момент;
- 2) траєкторія будь-якої іншої точки.

У деяких випадках замість траєкторії іншої точки достатньо знати положення миттєвого центра швидкостей.

Отже для визначення прискорення точки плоскої фігури спочатку зображуємо тіло (або механізм) у положенні, для якого необхідно визначити прискорення відповідної точки.

Потім за даними задачі визначаємо швидкість та прискорення будь-якої точки, яку приймаємо за полюс. Подальший розрахунок залежить від особливостей заданого механізму. Далі надаватимуться необхідні додаткові вказівки до розв'язання типових задач.

### 3 Лабораторна робота «Дослідження кінематики плоского руху колеса»

**Мета роботи.** 1. Опанування методики графоаналітичного дослідження кінематики колеса, що здійснює плоский рух.

2. Провести дослідження кінематичних характеристик руху точок колеса.

**Об'єкт дослідження.** Колесо радіуса  $r$  котиться без ковзання по прямолінійній горизонтальній рейці (рис. 12). Центр колеса  $C$  рухається за законом  $x_C = x_C(t)$ .

Потрібно:

1) визначити швидкості та прискорення точок  $A$  і  $B$  при заданих значеннях кутів  $\alpha$ ,  $\beta$  в момент часу  $t_1$ ;

2) із застосуванням комп'ютерних технологій визначити модулі і напрями швидкостей і прискорень точок  $A$  і  $B$  ( $0 \leq \alpha \leq 2 \cdot \pi$ ;  $0 \leq \beta \leq 2 \cdot \pi$ ) в момент часу  $t_1$ ;

3) побудувати графіки зміни модулів швидкостей і прискорень точок  $A$  і  $B$  у залежності від їх положень.

Необхідні для розрахунку дані надані в табл. 1.

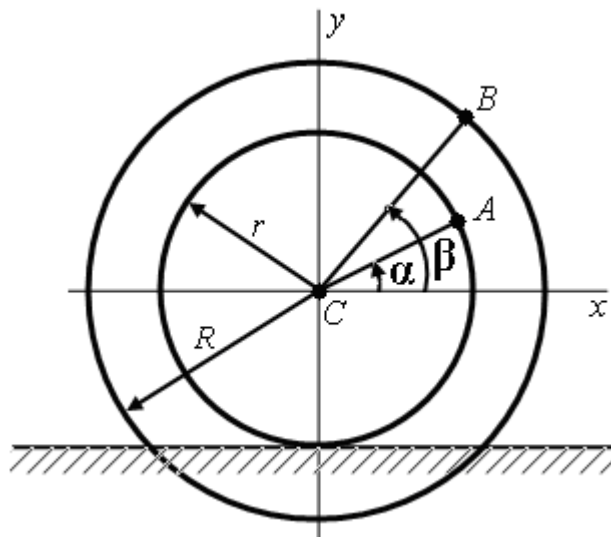


Рис. 12

Таблиця 1

Номер варіан- та	$r$ , м	$R$ , м	$\alpha$ , °	$\beta$ , °	$x_C = x_C(t)$ , м	$t_1$ , с
1	2	3	4	5	6	7
1	0,2	0,25	0	135	$2 \cdot t^2 + 2 \cdot t$	0,6
2	0,22	0,27	15	150	$4 \cdot t - 0,5 \cdot t^3$	0,65
3	0,24	0,29	30	165	$3 \cdot t^2 - 2 \cdot t$	0,7
4	0,26	0,31	45	180	$6 \cdot \sin(\pi/6)$	0,75
5	0,28	0,33	60	195	$4 \cdot \sin(\pi/6)$	0,8
6	0,3	0,35	75	210	$3 \cdot t^2 + 2 \cdot t$	0,85
7	0,32	0,37	90	225	$2 \cdot t^2 + 3 \cdot t$	0,9
8	0,34	0,39	105	240	$6 \cdot t - 2 \cdot t^2$	0,95
9	0,36	0,41	120	255	$4 \cdot t + 2 \cdot t^2$	1,0
10	0,38	0,43	135	270	$3 \cdot \sin(\pi/6)$	1,05
11	0,4	0,45	150	285	$3 \cdot \cos(\pi/6)$	1,1
12	0,42	0,47	165	300	$6 \cdot \sin(\pi/6)$	1,15
13	0,44	0,49	180	315	$2 \cdot t - t^3$	1,2
14	0,46	0,51	195	330	$4 \cdot t + 1,5 \cdot t^2$	1,25
15	0,48	0,53	210	345	$0,5 \cdot t^3 - 2 \cdot t$	1,3
16	0,5	0,55	225	360	$2 \cdot t - 2 \cdot t^2$	1,35
17	0,52	0,57	240	0	$4 \cdot \sin(\pi/3)$	1,4

Продовження табл. 1

1	2	3	4	5	6	7
18	0,54	0,59	255	15	$6 \cdot \cos(\pi/4)$	1,45
19	0,56	0,61	270	30	$8 \cdot \cos(\pi/3)$	1,5
20	0,58	0,63	285	45	$2 \cdot t^2 - 6 \cdot t$	1,55
21	0,6	0,65	300	60	$t^2 - 4 \cdot t$	1,6
22	0,62	0,67	315	75	$-\sin(\pi/4)$	1,65
23	0,64	0,69	330	90	$6 \cdot \cos(\pi/4)$	1,7
24	0,66	0,71	345	105	$3 \cdot t - 4 \cdot t^2$	1,75
25	0,68	0,73	360	120	$4 \cdot t + 1,5 \cdot t^2$	1,80
26	0,7	0,75	0	135	$t - 3 \cdot t^2$	1,85
27	0,72	0,77	15	150	$5 \cdot t^2 - 6 \cdot t$	1,9
28	0,74	0,79	30	165	$7 \cdot \cos(\pi/3)$	1,95
29	0,76	0,81	45	180	$6 \cdot t - 2 \cdot t^2$	2,0
30	0,78	0,83	60	195	$2 \cdot t^2 - 4 \cdot t$	2,05

### Вказівки до виконання лабораторної роботи

Для визначення швидкості і прискорення точок  $A$  і  $B$  спочатку зображаємо колесо у положенні, для якого необхідно визначити кінематичні характеристики відповідних точок (для заданих  $\alpha$ ,  $\beta$ ).

Для розрахунку застосувати алгоритми, які вказані у загальних відомостях. Для визначення швидкостей точок застосувати миттєвий центр швидкостей, а для визначення прискорень точок застосувати графоаналітичний метод.

### Вказівки до розв'язання задачі на ЕОМ

Для дослідження зміни кінематичних характеристик в залежності від кута необхідно застосувати загально математичний пакет прикладних програм МATHCAD. З метою спрощення роботи в МATHCAD на кафедрі розроблено файл-шаблон, за допомогою якого студент виконує розрахунки.

### Приклад виконання лабораторної роботи

**Об'єкт дослідження.** Колесо радіуса  $r$  котиться без ковзання по прямолінійній горизонтальній рейці (рис. 13). Центр колеса  $C$  рухається за законом  $x_C = x_C(t)$ .

Дано:  $r = 0,3$  м,  $R = 0,4$  м,  $x_C = 0,7 \cdot t - 0,15 \cdot t^2$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 120^\circ$ ,  $t_1 = 1$  с.

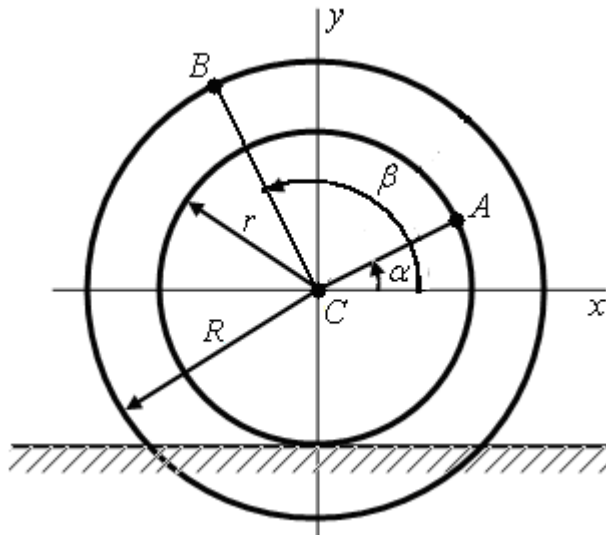


Рис. 13

Необхідно:

- 1) визначити швидкості та прискорення точок  $A$  і  $B$  при заданих значеннях кутів  $\alpha$ ,  $\beta$  в момент часу  $t_1$ ;
- 2) за допомогою загально математичного пакета прикладних програм MATHCAD визначити модулі і напрямок швидкостей і прискорень точок  $A$  і  $B$  в момент часу  $t_1$ ;
- 3) побудувати графіки зміни модулів швидкостей і прискорень точок  $A$  і  $B$  у залежності від їх положень.

### Виконання лабораторної роботи

*Визначення швидкостей точок.*

Визначаємо проекцію швидкості точки  $C$  на вісь  $x$ , яка є центром колеса.

$$v_{Cx} = \frac{dx_C}{dt} = 0,7 - 0,3 \cdot t. \quad (12)$$

При  $t_1 = 1$  с  $v_{Cx} = 0,7 - 0,3 \cdot 1 = 0,4$  м/с. Отже напрям вектора  $\vec{v}_C$  співпадає з додатним напрямом осі  $x$  (рис. 14).

За умови задачі колесо котиться по рейці без ковзання, тому миттєвим центром швидкостей буде точка  $P$  дотику колеса з рейкою (рис. 14). Модулі швидкостей точок колеса пропорційні їх відстаням до миттєвого центра швидкостей:

$$\omega = \frac{v_C}{CP} = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP}. \quad (13)$$

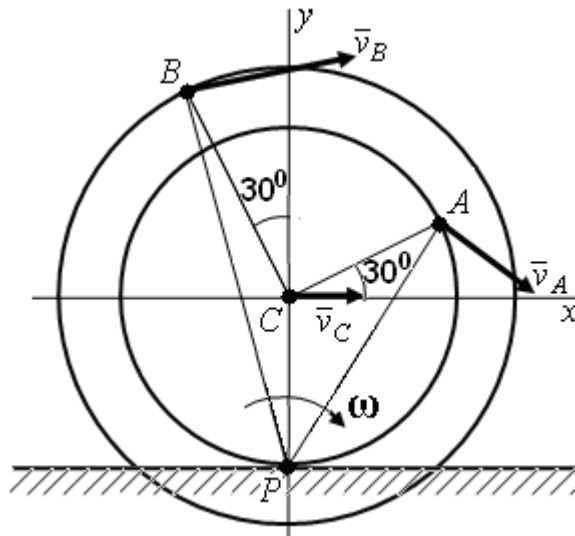


Рис. 14

Із рис. 14 видно, що  $CP = r$ . Отже  $CP = 0,3$  м.  $AP$  і  $BP$  визначаємо за теоремою косинусів:

$$AP = \sqrt{CP^2 + CA^2 - 2 \cdot CP \cdot CA \cdot \cos 120^\circ}, \quad (14)$$

$$BP = \sqrt{CP^2 + CB^2 - 2 \cdot CP \cdot CB \cdot \cos 150^\circ}. \quad (15)$$

Підставляємо значення величин і знаходимо

$$AP = \sqrt{0,3^2 + 0,3^2 - 2 \cdot 0,3 \cdot 0,3 \cdot (-0,5)} = 0,52 \text{ м},$$

$$BP = \sqrt{0,3^2 + 0,4^2 - 2 \cdot 0,3 \cdot 0,4 \cdot (-0,866)} = 0,677 \text{ м}.$$

У відповідності до (13)

$$\omega = \frac{v_C}{CP} = \frac{0,4}{0,3} = 1,333 \text{ с}^{-1}.$$

Тоді

$$v_A = \omega \cdot AP = 1,333 \cdot 0,52 = 0,693 \text{ м/с},$$

$$v_B = \omega \cdot BP = 1,333 \cdot 0,677 = 0,902 \text{ м/с}.$$



Кутова швидкість обертання колеса  $\omega$  навколо миттєвого центра швидкостей  $P$  напрямлена у відповідності з напрямком вектора швидкості точки  $C$ . Вектори швидкостей точок  $A$  і  $B$  відповідно перпендикулярні до прямих  $AP$  і  $BP$  і спрямовані за напрямком  $\omega$ .

*Визначення прискорень точок*

Проекція прискорення точки  $C$  на вісь  $x$

$$a_{Cx} = \frac{dv_{Cx}}{dt} = -0,3 \text{ м/с}^2.$$

Отже вектор прискорення  $\bar{a}_C$  напрямлений у бік протилежний додатному напрямку осі  $x$  (рис. 15).

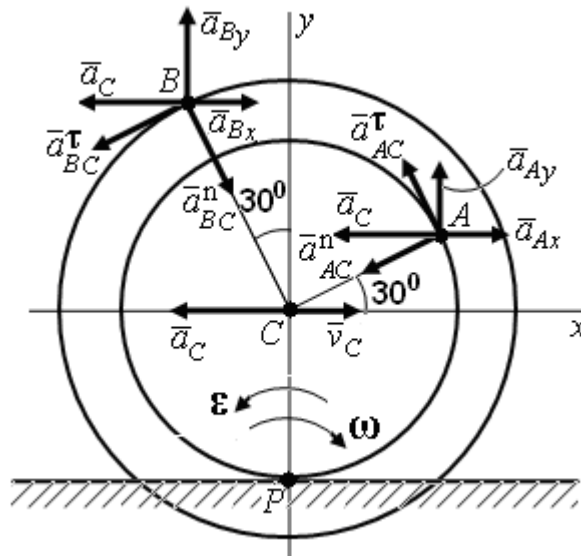


Рис. 15

Для визначення кутового прискорення  $\varepsilon$  застосуємо рівняння (13), в якому величина  $CP = r$  залишається постійною при будь-якому положенні колеса. Продиференціюємо рівність (13) по часу і отримаємо

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{r} \cdot \frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{r} \cdot a_C^\tau.$$

Оскільки траєкторія точки  $C$  пряма, то  $a_C^\tau = a_C$ .

Підставляємо всі значення і знаходимо  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{a_C^\tau}{r} = \frac{a_C}{r} = \frac{0,3}{0,3} = 1 \text{ с}^{-2}.$$

Напрямок  $\varepsilon$  визначається у відповідності з напрямком вектора  $\bar{a}_C$ .

Візьмемо за полюс центр колеса  $C$ , прискорення якого відоме, і запишемо

$$\bar{a}_A = \bar{a}_C^n + \bar{a}_C^\tau + \bar{a}_{AC}^n + \bar{a}_{AC}^\tau. \quad (16)$$

Визначимо модулі і напрями всіх складових рівняння (16).

Модуль нормального прискорення точки  $C$   $a_C^n = 0$  тому, що траєкторією точки  $C$  є пряма.

Дотичне прискорення точки  $C$   $a_C^\tau = a_C$ .

Модуль нормального прискорення

$$a_{AC}^n = \omega^2 \cdot AC = 1,333^2 \cdot 0,3 = 0,533 \text{ м/с}^2.$$

Вектор  $\bar{a}_{AC}^n$  прикладений у точці  $A$  і напрямлений до полюса  $C$  (рис. 15).

Модуль дотичного прискорення

$$a_{AC}^\tau = \varepsilon \cdot AC = 1 \cdot 0,3 = 0,3 \text{ м/с}^2.$$

Вектор  $\bar{a}_{AC}^\tau$  прикладений у точці  $A$ , перпендикулярний до вектора  $\bar{a}_{AC}^n$  і напрямлений у відповідності до напрямку  $\varepsilon$  (рис. 15).

Вектор  $\bar{a}_A$  в рівнянні (16) невідомий за модулем і напрямом, тому його представимо двома складовими  $\bar{a}_{Ax}$  і  $\bar{a}_{Ay}$ , які паралельні осям  $x$ ,  $y$  і спрямовані у додатних напрямках цих осей (рис. 15).

Спроекуємо векторну рівність (16) на вісі  $x$  та  $y$

$$\begin{aligned} a_{Ax} &= -a_C - a_{AC}^n \cdot \cos 30^\circ - a_{AC}^\tau \cdot \cos 60^\circ; \\ a_{Ay} &= -a_{AC}^n \cdot \cos 60^\circ + a_{AC}^\tau \cdot \cos 30^\circ. \end{aligned}$$

Підставляємо значення всіх величин і знаходимо:

$$a_{Ax} = -0,3 - 0,533 \cdot 0,866 - 0,3 \cdot 0,5 = -0,9116 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{Ay} = -0,533 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,866 = -0,0067 \text{ м/с}^2.$$

Модуль прискорення точки  $A$

$$a_A = \sqrt{(a_{Ax})^2 + (a_{Ay})^2} = \sqrt{(-0,9116)^2 + (-0,0067)^2} = 0,91162 \text{ м/с}^2.$$

Визначаємо значення кутів, які утворює вектор  $\bar{a}_A$  з додатними напрямками осей  $x$  та  $y$ .

$$\cos(\bar{a}_A, x) = \frac{a_{Ax}}{a_A} = \frac{-0,9116}{0,91162} = -0,99997; (\bar{a}_A, x) = 179,6^0,$$

$$\cos(\bar{a}_A, y) = \frac{a_{Ay}}{a_A} = \frac{-0,0067}{0,91162} = -0,007349; (\bar{a}_A, y) = 90,4^0.$$

Аналогічно визначаємо прискорення точки  $B$ .

$$\bar{a}_B = \bar{a}_C^n + \bar{a}_C^\tau + \bar{a}_{BC}^n + \bar{a}_{BC}^\tau.$$

$$a_{BC}^n = \omega^2 \cdot BC = 1,333^2 \cdot 0,4 = 0,7108 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BC}^\tau = \varepsilon \cdot BC = 1 \cdot 0,4 = 0,4 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{Bx} = -a_C + a_{BC}^n \cdot \cos 60^0 - a_{BC}^\tau \cdot \cos 30^0;$$

$$a_{By} = -a_{AC}^n \cdot \cos 30^0 - a_{AC}^\tau \cdot \cos 60^0;$$

$$a_{Ax} = -0,3 + 0,7108 \cdot 0,5 - 0,4 \cdot 0,866 = -0,291 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{By} = -0,7108 \cdot 0,866 - 0,4 \cdot 0,5 = -0,8156 \text{ м/с}^2;$$

$$a_B = \sqrt{(a_{Bx})^2 + (a_{By})^2} = \sqrt{(-0,291)^2 + (-0,8156)^2} = 0,866 \text{ м/с}^2.$$

Напрями векторів  $\bar{a}_C$ ,  $\bar{a}_{BC}^n$ ,  $\bar{a}_{BC}^\tau$  показані на рис. 15.

Визначаємо значення кутів, які утворює вектор  $\bar{a}_B$  з додатними напрямками осей  $x$  та  $y$ :

$$\cos(\bar{a}_B, x) = \frac{a_{Bx}}{a_B} = \frac{-0,291}{0,866} = -0,336; (\bar{a}_B, x) = 109,64^0;$$

$$\cos(\bar{a}_B, y) = \frac{a_{By}}{a_B} = \frac{-0,8156}{0,866} = -0,9418; (\bar{a}_B, y) = 160,36^0.$$

Для проведення дослідження зміни кінематичних характеристик руху точок колеса в залежності від кута  $\alpha$  застосуємо програмний комплекс автоматизації обчислень MATHCAD.

Лістинг відповідного файлу (Mathcad document 1) надається далі на сторінках 20 – 23.

В кінці файлу надається тестовий контроль (Test) для перевірки вірності обчислених кінематичних характеристик, які отримав студент без застосування ЕОМ для конкретного значення кута повороту кривошипу.

### Mathcad document 1

$$x(t) := 0.7 \cdot t - 0.15 \cdot t^2 \quad AC(r) := r \quad BC(R) := R$$

$$\frac{d}{dt}x(t) \rightarrow .7 - .30 \cdot t \quad vCx(t) := .7 - .30 \cdot t \quad vCy(t) := 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) \rightarrow -.30 \quad aCx(t) := -.30 \quad aCy(t) := 0$$

$$\omega(t, r) := \frac{vCx(t)}{r}$$

Speed

$$vAC(t, r) := \omega(t, r) \cdot AC(r) \quad vBC(t, r, R) := \omega(t, r) \cdot BC(R)$$

$$vAx(t, \alpha, r) := vCx(t) + vAC(t, r) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad vBx(t, \alpha, r, R) := vCx(t) + vBC(t, r, R) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

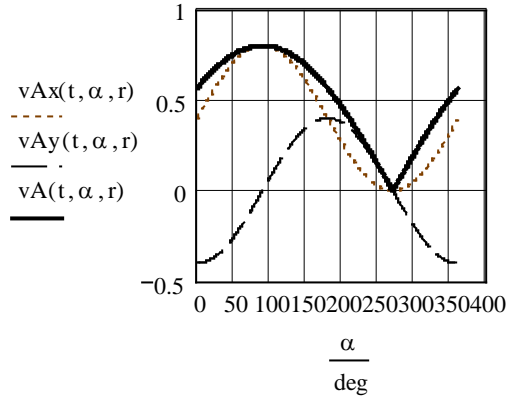
$$vAy(t, \alpha, r) := vCy(t) + vAC(t, r) \cdot \cos(\pi - \alpha) \quad vBy(t, \alpha, r, R) := vCy(t) + vBC(t, r, R) \cdot \cos(\pi - \alpha)$$

$$vA(t, \alpha, r) := \sqrt{(vAx(t, \alpha, r))^2 + (vAy(t, \alpha, r))^2} \quad vB(t, \alpha, r, R) := \sqrt{(vBx(t, \alpha, r, R))^2 + (vBy(t, \alpha, r, R))^2}$$

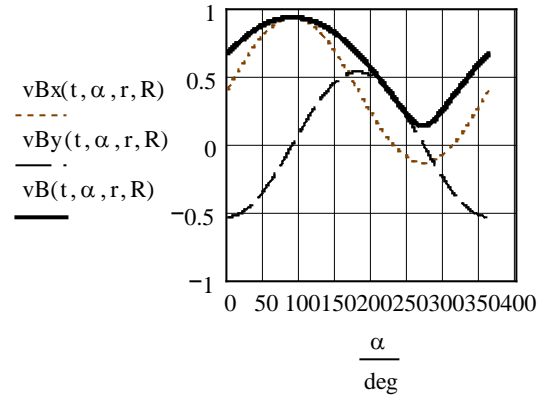
$$\alpha := 0, 0.01.. 2 \cdot \pi \quad t := 1 \quad r := 0.3 \quad R := 0.4$$

$$\gamma1(\alpha) := \operatorname{acos}\left(\frac{vAx(t, \alpha, r)}{vA(t, \alpha, r)}\right) \quad \gamma2(\alpha) := \operatorname{acos}\left(\frac{vAy(t, \alpha, r)}{vA(t, \alpha, r)}\right)$$

$$\gamma1(\alpha) := \operatorname{acos}\left(\frac{vBx(t, \alpha, r, R)}{vB(t, \alpha, r, R)}\right) \quad \gamma2(\alpha) := \operatorname{acos}\left(\frac{vBy(t, \alpha, r, R)}{vB(t, \alpha, r, R)}\right)$$



a)



b)

Рис. 16

Acceleration

$$\varepsilon(t, r) := \frac{aC_x(t)}{r}$$

$$aC_n := 0$$

$$aC_\tau(t) := aC_x(t)$$

$$aAC_n(t, r) := (\omega(t, r))^2 \cdot AC(r)$$

$$aBC_n(t, r) := (\omega(t, r))^2 \cdot BC(R)$$

$$aAC_\tau(t, r) := \varepsilon(t, r) \cdot AC(r)$$

$$aBC_\tau(t, r) := \varepsilon(t, r) \cdot BC(R)$$

$$aA_x(t, \alpha, r) := aC_x(t) + aAC_n(t, r) \cdot \cos(\pi - \alpha) + aAC_\tau(t, r) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$aA_y(t, \alpha, r) := aC_y(t) + aAC_n(t, r) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + aAC_\tau(t, r) \cdot \cos(\pi - \alpha)$$

$$aA(t, \alpha, r) := \sqrt{(aA_x(t, \alpha, r))^2 + (aA_y(t, \alpha, r))^2}$$

$$\theta_1(\alpha) := \arccos\left(\frac{aA_x(t, \alpha, r)}{aA(t, \alpha, r)}\right)$$

$$\theta_2(\alpha) := \arccos\left(\frac{aA_y(t, \alpha, r)}{aA(t, \alpha, r)}\right)$$

$$aB_x(t, \alpha, r, R) := aC_x(t) + aBC_n(t, r) \cdot \cos(\pi - \alpha) + aBC_\tau(t, r) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$aB_y(t, \alpha, r, R) := aC_y(t) + aBC_n(t, r) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + aBC_\tau(t, r) \cdot \cos(\pi - \alpha)$$

$$aB(t, \alpha, r, R) := \sqrt{(aB_x(t, \alpha, r, R))^2 + (aB_y(t, \alpha, r, R))^2}$$

$$\theta_1(\alpha) := \arccos\left(\frac{aB_x(t, \alpha, r)}{aB(t, \alpha, r)}\right)$$

$$\theta_2(\alpha) := \arccos\left(\frac{aB_y(t, \alpha, r)}{aB(t, \alpha, r)}\right)$$

$$\alpha := 0, 0.01.. 2\pi$$

$$\begin{pmatrix} t \\ r \\ R \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

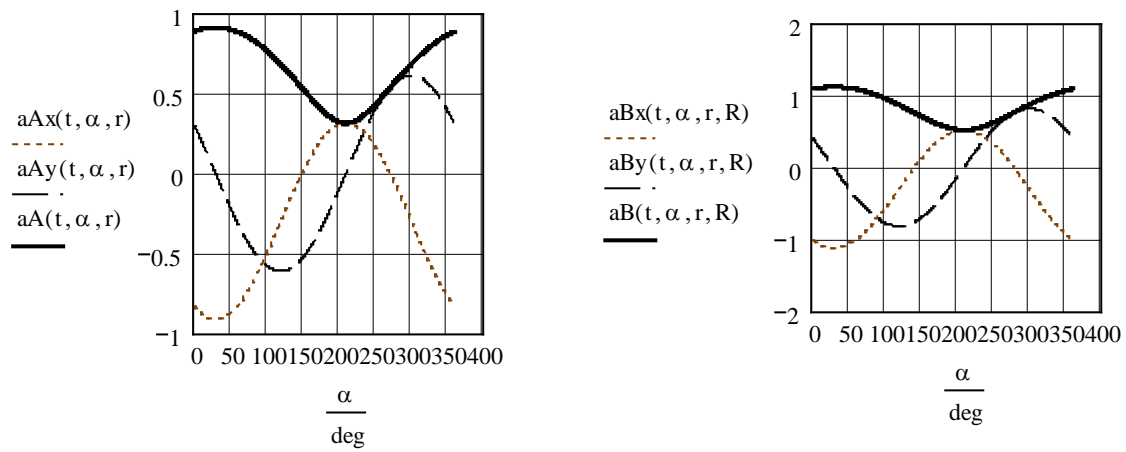


Рис. 17  
Test (p.A)

$$t := 1 \quad r := 0.3 \quad R := 0.4 \quad \alpha := 30 \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$vAx(t, \alpha, r) = 0.6 \quad vAy(t, \alpha, r) = -0.346 \quad vA(t, \alpha, r) = 0.693$$

$$\gamma1(\alpha) := \arccos\left(\frac{vAx(t, \alpha, r)}{vA(t, \alpha, r)}\right) \quad \gamma1(\alpha) \cdot \frac{180}{\pi} = 30$$

$$\gamma2(\alpha) := \arccos\left(\frac{vAy(t, \alpha, r)}{vA(t, \alpha, r)}\right) \quad \gamma2(\alpha) \cdot \frac{180}{\pi} = 120$$

$$\varepsilon(t, r) = -1$$

$$aAx(t, \alpha, r) = -0.912 \quad aAy(t, \alpha, r) = -6.859 \times 10^{-3} \quad aA(t, \alpha, r) = 0.912$$

$$\theta1(\alpha) := \arccos\left(\frac{aAx(t, \alpha, r)}{aA(t, \alpha, r)}\right) \quad \theta1(\alpha) \cdot \frac{180}{\pi} = 179.569$$

$$\theta2(\alpha) := \arccos\left(\frac{aAy(t, \alpha, r)}{aA(t, \alpha, r)}\right) \quad \theta2(\alpha) \cdot \frac{180}{\pi} = 90.431$$

### Test (p.B)

$$t := 1 \quad r := 0.3 \quad R := 0.4 \quad \alpha := 120 \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$vBx(t, \alpha, r, R) = 0.862 \quad vBy(t, \alpha, r, R) = 0.267 \quad \gamma1(\alpha) \cdot \frac{180}{\pi} = 9.92$$

$$\gamma1(\alpha) := \arccos\left(\frac{vBx(t, \alpha, r, R)}{vB(t, \alpha, r, R)}\right)$$

$$\gamma2(\alpha) := \arccos\left(\frac{vBy(t, \alpha, r, R)}{vB(t, \alpha, r, R)}\right) \quad \gamma2(\alpha) \cdot \frac{180}{\pi} = 72.808$$

$$aB(t, \alpha, r, R) := \sqrt{(aBx(t, \alpha, r, R))^2 + (aBy(t, \alpha, r, R))^2}$$

$$aBx(t, \alpha, r, R) = -0.291 \quad aBy(t, \alpha, r, R) = -0.816 \quad aB(t, \alpha, r, R) = 0.866$$

$$\theta_1(\alpha) := \arccos\left(\frac{aBx(t, \alpha, r, R)}{aB(t, \alpha, r, R)}\right)$$

$$\theta_1(\alpha) \cdot \frac{180}{\pi} = 109.622$$

$$\theta_2(\alpha) := \arccos\left(\frac{aBy(t, \alpha, r, R)}{aB(t, \alpha, r, R)}\right)$$

$$\theta_2(\alpha) \cdot \frac{180}{\pi} = 160.378$$

#### 4 Лабораторна робота «Дослідження кінематики кривошипно-шатунного механізму»

**Мета роботи.** 1. Опанування методик аналітичного і графоаналітичного дослідження кінематики плоских механізмів.

2. Провести дослідження кінематичних характеристик руху ланок і точок кривошипно-шатунного механізму.

**Об'єкт дослідження.** Кривошип  $OA$  нецентрального кривошипно-шатунного механізму (рис. 18) починає рухатися із стану спокою з постійним кутовим прискоренням  $\varepsilon_{OA}$ .

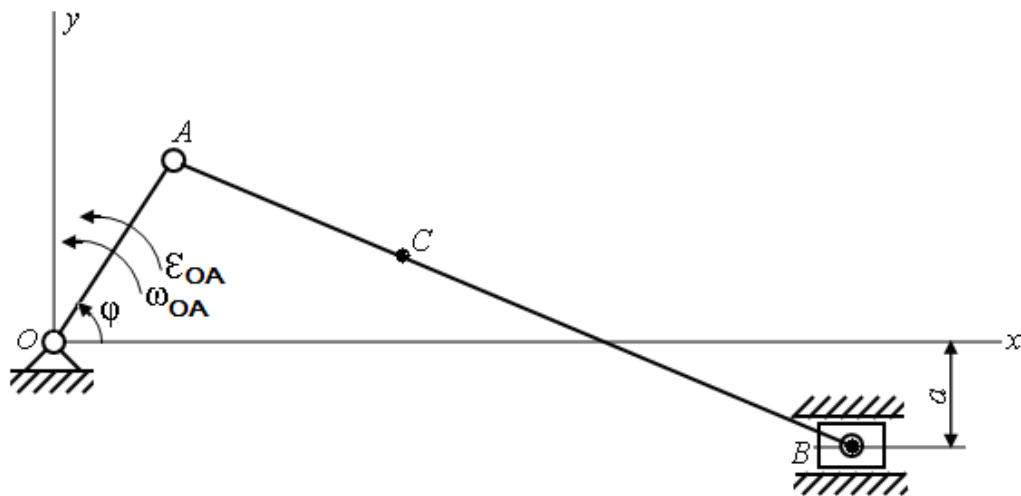


Рис. 18

Вихідні дані взяти із табл. 2.

Потрібно:

- 1) при заданому куті  $\varphi_1$  визначити швидкості та прискорення точок  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і кутову швидкість та кутове прискорення ланки  $AB$ ;
- 2) визначити кутову швидкість та кутове прискорення ланки  $AB$  і побудувати графіки залежностей цих кінематичних характеристик від кута повороту  $\varphi$  кривошипу ( $\varphi = 0 \div 2 \cdot \pi$ );
- 3) визначити проекції та модулі швидкостей і прискорень точок  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і побудувати графіки залежностей цих кінематичних характеристик від кута повороту  $\varphi$  кривошипу ( $\varphi = 0 \div 2 \cdot \pi$ );

4) всі розрахунки пунктів 2 і 3 виконати за допомогою ЕОМ.

Таблиця 2

Варіант	$\varepsilon_{OA}, \text{с}^{-2}$	$OA, \text{м}$	$AB, \text{м}$	$AC, \text{м}$	$a, \text{м}$	$\varphi_1, \dots^0$
1	2,8	0,12	0,36	0,10	0,05	5
2	3,6	0,13	0,40	0,15	0,06	10
3	4,2	0,14	0,44	0,20	0,07	15
4	5,6	0,15	0,48	0,25	0,08	20
5	6,4	0,16	0,52	0,30	0,09	25
6	7,2	0,17	0,56	0,28	0,10	30
7	7,6	0,18	0,60	0,35	0,11	35
8	8,1	0,19	0,65	0,45	0,12	40
9	8,3	0,20	0,70	0,55	0,13	45
10	3,2	0,21	0,75	0,65	0,14	50
11	3,8	0,22	0,80	0,70	0,15	55
12	4,4	0,23	0,85	0,35	0,16	60
13	4,6	0,24	0,90	0,4	0,17	65
14	4,8	0,25	0,95	0,45	0,18	70
15	5,4	0,26	1,00	0,65	0,19	75
16	5,8	0,27	1,10	0,75	0,20	80
17	6,2	0,28	1,15	0,95	0,21	85
18	6,5	0,29	1,20	0,85	0,22	85
19	6,8	0,30	1,25	0,55	0,23	90
20	7,3	0,29	1,10	0,35	0,17	95
21	7,7	0,28	1,05	0,45	0,13	100
22	3,1	0,27	1,00	0,5	0,15	110
23	3,5	0,26	0,95	0,25	0,11	120
24	3,9	0,25	0,90	0,30	0,15	130
25	4,1	0,24	0,85	0,40	0,14	140
26	4,5	0,23	0,80	0,45	0,18	150
27	5,0	0,22	0,75	0,50	0,13	160
28	5,1	0,21	0,70	0,55	0,10	170
29	5,5	0,20	0,65	0,10	0,15	140
30	5,7	0,19	0,60	0,30	0,10	150

#### Вказівки до визначення швидкостей та прискорень точок

Для визначення швидкостей і прискорень точок  $A, B, C$  необхідно зобразити механізм при заданому куті  $\varphi_1$  кривошипу. Для визначення кінематичних характеристик руху застосувати графоаналітичний метод.



## Вказівки до застосування ЕОМ

Всі необхідні розрахунки виконуються у системі MATHCAD. Один із можливих варіантів програми, який базується на аналітичному методі, надається у прикладі. З метою спрощення роботи в MATHCAD на кафедрі розроблено файл-шаблон, за допомогою якого студент виконує розрахунки.

### Приклад виконання лабораторної роботи

**Об'єкт дослідження.** Кривошип  $OA$  нецентрального кривошипно-шатунного механізму (рис. 19) починає обертатися із стану спокою з постійним прискоренням  $\varepsilon_{OA}$ .

Дано:  $OA = 0,2$  м,  $AB = 0,72$  м,  $AC = 0,24$  м,  $\varepsilon_{OA} = 2,6$  с<sup>-2</sup>,  $a = 0,12$  м,  $\varphi_1 = 60^\circ$ .

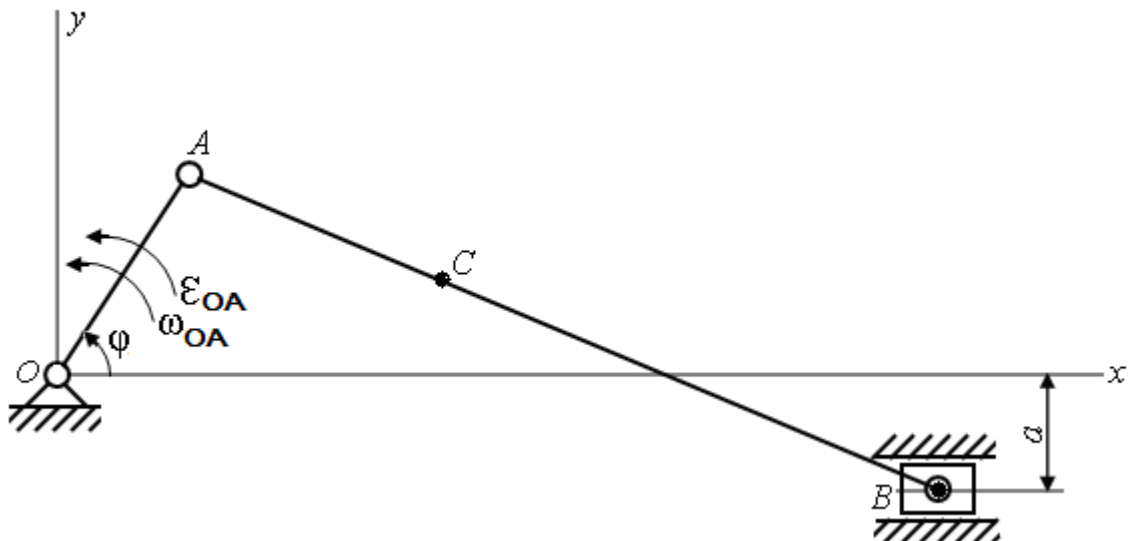


Рис. 19

Потрібно:

- 1) при заданому куті  $\varphi_1$  визначити швидкості та прискорення точок  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і кутову швидкість та кутове прискорення ланки  $AB$ ;
- 2) визначити кутову швидкість та кутове прискорення ланки  $AB$ ; побудувати графіки залежностей цих кінематичних характеристик від кута повороту  $\varphi$  кривошипу ( $\varphi = 0 \div 2 \cdot \pi$ );
- 3) визначити проекції та модулі швидкостей і прискорень точок  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ; побудувати графіки залежностей цих кінематичних характеристик від кута повороту  $\varphi$  кривошипу ( $\varphi = 0 \div 2 \cdot \pi$ );
- 4) всі розрахунки пунктів 2 і 3 виконати за допомогою ЕОМ.

## Виконання лабораторної роботи

Зображаємо плоский механізм у заданому положенні – коли кривошип  $OA$  утворює кут з віссю  $Ox$   $\varphi_1 = 60^\circ$  (рис. 20). У якості системи відліку візьмемо праву декартову систему координат. Початок координат розмістимо у центрі підшипника  $O$ .

У склад даного механізму входять:

- кривошип  $OA$ , що здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі, яка перпендикулярна площині  $xOy$  і проходить через центр шарніра  $O$ ;
- шатун  $AB$ , який здійснює плоский рух у площині  $xOy$ ;
- повзун  $B$ , який здійснює поступальний рух уздовж напрямних, які паралельні осі  $Ox$ .

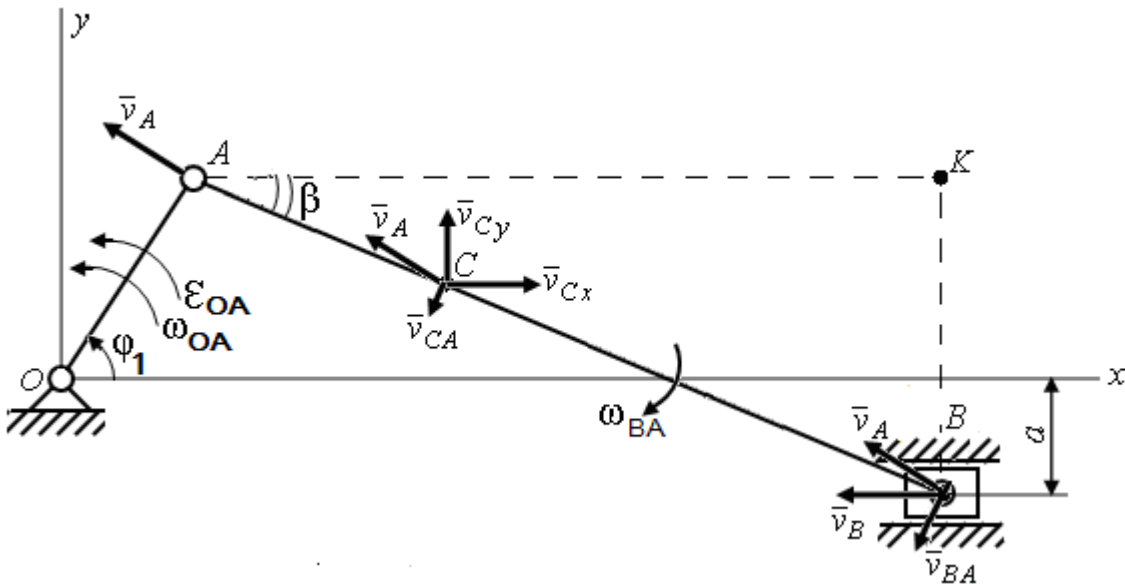


Рис. 20

### *Визначення швидкостей точок*

Оскільки ланка  $OA$  починає рухатися із стану спокою з постійним прискоренням  $\varepsilon_{OA}$ , то рівняння рівноприскореного обертання ланки  $OA$  має вигляд

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon_{OA} \cdot t^2}{2}. \tag{17}$$

За умови задачі  $\varphi_0 = 0, \omega_0 = 0$ .

Тоді рівняння (17) набуває вигляду

$$\varphi = \frac{\varepsilon_{OA} \cdot t^2}{2}. \tag{18}$$

Рівняння (18) дозволяє визначити час, за який кривошип  $OA$  досягає кута  $\varphi_1$ .

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot \varphi_1}{\varepsilon_{OA}}} \quad (19)$$

Із (19) знаходимо  $t_1$  при  $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$ .

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot \pi}{3 \cdot 2,6}} = 0,8975 \text{ с.}$$

При  $t_1$  кутова швидкість кривошипа  $OA$

$$\omega_{OA} = \omega_0 + \varepsilon_{OA} \cdot t_1 = 0 + 2,6 \cdot 0,8975 = 2,334 \text{ с}^{-1}.$$

Напрямок кутової швидкості  $\omega_{OA}$  співпадає з напрямом кута повороту  $\varphi$  ланки  $OA$ .

Модуль швидкості точки  $A$  у заданому положенні механізму

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2,334 \cdot 0,2 = 0,4668 \text{ м/с.}$$

Вектор  $\bar{v}_A$  перпендикулярний ланці  $OA$  і напрямляється за  $\omega_{OA}$ .

Ланка  $AB$  здійснює плоскопаралельний рух. Відомі модуль і напрямок швидкості точки  $A$ . Тому візьмемо точку  $A$  у якості полюса. Тоді швидкість точки  $B$  дорівнюватиме

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} \quad (20)$$

За умови задачі траєкторія точки  $B$  пряма, тому лінія дії вектора  $\bar{v}_B$  відома (рис. 20). Припускаємо, що напрям вектора  $\bar{v}_B$  протилежний додатному напрямку осі  $x$ .

Модуль обертальної швидкості точки  $B$   $\bar{v}_{BA}$  у обертальному русі ланки  $AB$  навколо полюса  $A$  невідомий тому, що невідомий модуль кутової швидкості  $\omega_{BA}$ .

Вектор  $\bar{v}_{BA}$  перпендикулярний до ланки  $BA$  і напрямляємо його у припущенні, що ланка  $BA$  обертається навколо полюса  $A$  за стрілкою годинника (рис. 20).

Отже у векторному рівнянні (20) невідомі модулі векторів  $\bar{v}_B$ ,  $\bar{v}_{BA}$ . Для їх визначення спроектуємо обидві частини векторної рівності на вісі  $Ox$  та  $Oy$ .

В проекціях на вісь  $Ox$  векторна рівність (20) набуває вигляду:

$$-v_B = -v_A \cdot \cos(90^\circ - \varphi_1) - v_{BA} \cdot \cos(90^\circ - \beta). \quad (21)$$

В проекціях на вісь  $Oy$

$$0 = v_A \cdot \cos(\varphi_1) - v_{BA} \cdot \cos(\beta). \quad (22)$$

Враховуємо, що  $v_{BA} = \omega_{BA} \cdot BA$ . Тоді із (22) знаходимо

$$\omega_{BA} = \frac{v_A \cdot \cos(\varphi_1)}{BA \cdot \cos(\beta)}. \quad (23)$$

Для визначення  $\omega_{BA}$  і  $v_B$  необхідно знайти  $\sin(\beta)$  та  $\cos(\beta)$ , які можна отримати із прямокутного трикутника  $ABK$  (рис. 20).

$$\sin(\beta) = \frac{BK}{AB}; \quad \cos(\beta) = \frac{AK}{AB} = \frac{\sqrt{(AB)^2 - (BK)^2}}{AB}.$$

Підставляємо значення і отримуємо

$$\sin(\beta) = \frac{OA \cdot \sin(\varphi_1) + a}{AB} = \frac{0,2 \cdot 0,866 + 0,12}{0,72} = 0,4072;$$

$$\cos(\beta) = \frac{\sqrt{(0,72)^2 - (0,2 \cdot 0,866 + 0,12)^2}}{0,72} = 0,9133.$$

Для заданого положення механізму

$$\omega_{BA} = \frac{0,4668 \cdot 0,5}{0,72 \cdot 0,9133} = 0,355 \text{ с}^{-1}.$$

Знак плюс у  $\omega_{BA}$  показує, що дійсний напрямок обертання ланки  $BA$  навколо полюса  $A$  співпадає з припущеним. Тому дійсний напрямок вектора  $\bar{v}_{BA}$  також співпадає з припущеним.

Із рівності (21) отримуємо

$$v_B = v_A \cdot \cos(90^\circ - \varphi_1) + \omega_{BA} \cdot BA \cdot \sin(\beta).$$

Підставляємо значення і знаходимо

$$v_B = 0,4668 \cdot 0,866 + 0,355 \cdot 0,72 \cdot 0,4072 = 0,508 \text{ м/с}.$$

Отриманий знак плюс показує, що вектор  $\bar{v}_B$  напрямлений у бік протилежний додатному напрямку осі  $Ox$  (рис. 20), як і передбачалося при складанні векторної рівності (20) і її проекції (21) на вісь  $Ox$ .

Точка  $C$  належить ланці  $BA$ . Швидкість точки  $C$

$$\bar{v}_C = \bar{v}_A + \bar{v}_{CA}. \quad (24)$$

Модуль вектора  $\bar{v}_{CA}$  дорівнює

$$v_{CA} = \omega_{BA} \cdot CA = 0,355 \cdot 0,24 = 0,0852 \text{ м/с.}$$

Вектор  $\bar{v}_{CA}$  напрямлений перпендикулярно до ланки  $BA$  у відповідності до напрямку  $\omega_{BA}$  (рис. 20).

Швидкість точки  $C$   $\bar{v}_C$  невідома за модулем і напрямком, тому її представимо у вигляді двох складових

$$\bar{v}_C = \bar{v}_{Cx} + \bar{v}_{Cy}. \quad (25)$$

Тоді з урахуванням (25) рівняння (24) набуває вигляду

$$\bar{v}_{Cx} + \bar{v}_{Cy} = \bar{v}_A + \bar{v}_{CA}. \quad (26)$$

Спроектуємо рівність (26) на вісі  $Ox$  та  $Oy$ .

$$\begin{aligned} v_{Cx} &= -v_A \cdot \sin(\varphi_1) - v_{CA} \cdot \cos(90^\circ - \beta); \\ v_{Cy} &= v_A \cdot \cos(\varphi_1) - v_{CA} \cdot \cos(\beta). \end{aligned}$$

Підставляємо значення всіх величин і знаходимо

$$\begin{aligned} v_{Cx} &= -0,4668 \cdot 0,866 - 0,0852 \cdot 0,4072 = -0,4389 \text{ м/с;} \\ v_{Cy} &= 0,4668 \cdot 0,5 - 0,0852 \cdot 0,9133 = 0,1556 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

Модуль швидкості точки  $C$

$$v_C = \sqrt{(v_{Cx})^2 + (v_{Cy})^2} = \sqrt{(-0,4389)^2 + (0,1556)^2} = 0,4657 \text{ м/с.}$$

Напрямок вектора  $\bar{v}_C$  знайдемо за допомогою напрямних косинусів.

Знайдемо чисельні значення кутів, які утворює вектор  $\bar{v}_C$  з додатними напрямками осей  $Ox$  та  $Oy$ .

$$\cos(\hat{v}_C, x) = \frac{v_{Cx}}{v_C} = \frac{-0,4389}{0,4657} = -0,94245; \quad (\hat{v}_C, x) = 160,48^\circ.$$

$$\cos(\hat{v}_C, y) = \frac{v_{Cy}}{v_C} = \frac{0,1556}{0,4657} = 0,3341; \quad (\hat{v}_C, y) = 70,48^\circ.$$

Визначення прискорень точок і кутового прискорення ланки AB

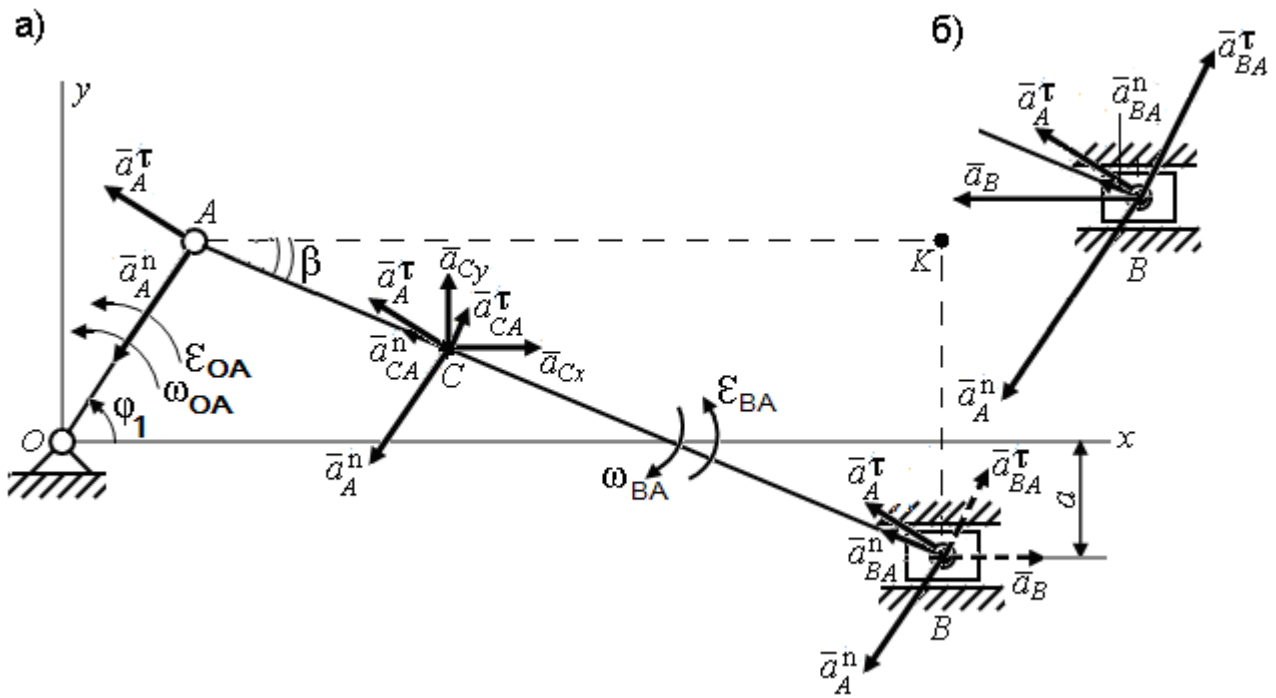


Рис. 21

Прискорення точки A

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau. \quad (27)$$

Для заданого положення механізму

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = (2,334)^2 \cdot 0,2 = 1,0895 \text{ м/с}^2;$$

$$a_A^\tau = \epsilon_{OA} \cdot OA = 2,6 \cdot 0,2 = 0,52 \text{ м/с}^2.$$

Вектор  $\bar{a}_A^n$  напрямлений від точки A до точки O. Вектор  $\bar{a}_A^\tau$  перпендикулярний до ланки OA і спрямований за напрямком  $\epsilon_{OA}$ .

Модуль прискорення точки A

$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2} = \sqrt{(1,0895)^2 + (0,52)^2} = 1,2072 \text{ м/с}^2.$$

Напрямок вектора  $\bar{a}_A$  прискорення точки  $A$  можна визначити за допомогою напрямних косинусів.

Для визначення прискорення точки  $B$   $\bar{a}_B$  візьмемо у якості полюса точку  $A$ . Тоді можна записати

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA},$$

або, враховуючи (27),

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau. \quad (28)$$

Визначимо модулі і напрями всіх складових рівняння (28).

Із рис. 21, а видно, що траєкторія точки  $B$  – пряма, тому прискорення  $\bar{a}_B$  буде напрямлене вздовж цієї прямої. Вважатимемо, що напрям вектора  $\bar{a}_B$  співпадає з додатним напрямом осі  $Ox$  (на рис. 21, а вектор  $\bar{a}_B$  показано штриховою лінією). Модуль вектора  $\bar{a}_B$  невідомий.

Модулі і напрями векторів  $\bar{a}_A^n$ ,  $\bar{a}_A^\tau$  визначені раніше.

Модуль нормального прискорення точки  $B$  при обертальному русі ланки  $AB$  навколо полюса  $A$  визначимо за формулою

$$a_{BA}^n = \varpi_{BA}^2 \cdot BA = (0,355)^2 \cdot 0,72 = 0,0907 \text{ м/с}^2.$$

Вектор  $\bar{a}_{BA}^n$  прикладений у точці  $B$  і напрямлений до точки  $A$  (рис. 21, а). На рис 21, а вказано дійсний напрямок  $\omega_{BA}$ .

Модуль дотичного прискорення точки  $B$  у обертальному русі ланки  $AB$  навколо полюса  $A$

$$a_{BA}^\tau = \varepsilon_{BA} \cdot BA \quad (29)$$

невідомий, тому що невідоме кутове прискорення  $\varepsilon_{BA}$ .

Вектор  $\bar{a}_{BA}^\tau$  перпендикулярний до вектора  $\bar{a}_{BA}^n$ . Напрямяємо  $\bar{a}_{BA}^\tau$  у припущенні, що обертальний рух ланки  $AB$  навколо полюса  $A$  уповільнений (на рис. 21, а вектор  $\bar{a}_{BA}^\tau$  показано штриховою лінією).

Отже у векторному рівнянні (28) невідомі тільки чисельні значення векторів  $\bar{a}_B$ ,  $\bar{a}_{BA}^\tau$ . Для визначення цих невідомих спроектуємо обидві частини рівняння (28) на вісі  $Ox$  та  $Oy$

$$a_B = -a_A^n \cdot \cos(\varphi_1) - a_A^\tau \cdot \sin(\varphi_1) - a_{BA}^n \cdot \cos(\beta) + a_{BA}^\tau \cdot \cos(90^\circ - \beta); \quad (30)$$

$$0 = -a_A^n \cdot \sin(\varphi_1) + a_A^\tau \cdot \cos(\varphi_1) + a_{BA}^n \cdot \sin(\beta) + a_{BA}^\tau \cdot \cos(\beta). \quad (31)$$

Із виразу (31) отримуємо

$$a_{BA}^{\tau} = \frac{a_A^n \cdot \sin(\varphi_1) - a_A^{\tau} \cdot \cos(\varphi_1) - a_{BA}^n \cdot \sin(\beta)}{\cos(\beta)}.$$

Підставляємо значення і знаходимо для даного положення механізму

$$a_{BA}^{\tau} = \frac{1,0895 \cdot 0,866 - 0,52 \cdot 0,5 - 0,0907 \cdot 0,4072}{0,9133} = 0,708 \text{ м/с}^2.$$

У відповідності з (29)

$$\varepsilon_{BA} = \frac{a_{BA}^{\tau}}{BA} = \frac{0,708}{0,72} = 0,983 \text{ с}^{-2}.$$

Знак плюс у  $a_{BA}^{\tau}$  і  $\varepsilon_{BA}$  показує, що обертальний рух ланки  $BA$  навколо полюса  $A$  уповільнений, а припущені напрямки  $\bar{a}_{BA}^{\tau}$  і  $\varepsilon_{BA}$  співпадають з дійсними (рис. 21, а).

Для визначення  $a_B$  застосуємо (30).

$$a_B = -1,0895 \cdot 0,5 - 0,52 \cdot 0,866 - 0,0907 \cdot 0,9133 + 0,708 \cdot 0,4072 = -0,7896 \text{ м/с}^2.$$

Знак мінус у  $a_B$  вказує на те, що дійсний напрям вектора  $\bar{a}_B$  протилежний вказаному на рис. 21, а.

Прискорення  $\bar{a}_B$  і всі його складові з урахуванням їх дійсних напрямків і масштабу показані на рис. 21, б.

Визначаємо прискорення точки  $C$ , яка належить шатуну  $AB$ .

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_{CA}^n + \bar{a}_{CA}^{\tau}. \quad (32)$$

В цьому рівнянні прискорення  $\bar{a}_A^n$ ,  $\bar{a}_A^{\tau}$  відомі за модулем і напрямком.

Визначимо модулі та напрями прискорень  $\bar{a}_{CA}^n$  і  $\bar{a}_{CA}^{\tau}$ .

$$a_{CA}^n = \omega_{BA}^2 \cdot CA = (0,355)^2 \cdot 0,24 = 0,0302 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{CA}^{\tau} = \varepsilon_{BA} \cdot CA = 0,983 \cdot 0,24 = 0,2359 \text{ м/с}^2.$$



Вектор  $\bar{a}_{CA}^n$  прикладений в точці  $C$  і напрямлений до точки  $A$ . Вектор  $\bar{a}_{CA}^\tau$  перпендикулярний до вектора  $\bar{a}_{CA}^n$  і напрямлений відповідно кутовому прискоренню  $\varepsilon_{BA}$ .

У векторному рівнянні (32) прискорення  $\bar{a}_C$  невідоме за модулем і напрямом. Доцільно замінити це прискорення складовими  $\bar{a}_{Cx}$  і  $\bar{a}_{Cy}$ , які спрямуємо у додатному напрямку осей  $Ox$  і  $Oy$ .

Тоді рівняння (32) набуває вигляду

$$\bar{a}_{Cx} + \bar{a}_{Cy} = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{CA}^n + \bar{a}_{CA}^\tau. \quad (33)$$

Спроектуємо (33) на вісі  $x$ ,  $y$  і отримаємо:

$$a_{Cx} = -a_A^n \cdot \cos(\varphi_1) - a_A^\tau \cdot \sin(\varphi_1) - a_{CA}^n \cdot \cos(\beta) + a_{CA}^\tau \cdot \sin(\beta);$$

$$a_{Cy} = -a_A^n \cdot \sin(\varphi_1) + a_A^\tau \cdot \cos(\varphi_1) + a_{CA}^n \cdot \sin(\beta) + a_{CA}^\tau \cdot \cos(\beta).$$

Підставляємо значення всіх величин і знаходимо проекції прискорення точки  $C$  на вісі  $Ox$ ,  $Oy$ .

$$a_{Cx} = -1,0895 \cdot 0,5 - 0,52 \cdot 0,866 - 0,0302 \cdot 0,9133 + 0,2359 \cdot 0,4072 = -0,9266 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{Cy} = -1,0895 \cdot 0,866 + 0,52 \cdot 0,5 + 0,0302 \cdot 0,4072 + 0,2359 \cdot 0,9133 = -0,4558 \text{ м/с}^2.$$

Модуль прискорення точки  $C$

$$a_C = \sqrt{(a_{Cx})^2 + (a_{Cy})^2} = \sqrt{(-0,9266)^2 + (-0,4558)^2} = 1,0326 \text{ м/с}^2.$$

Чисельні значення кутів, які утворює вектор  $\bar{a}_C$  з додатними напрямками осей  $Ox$  та  $Oy$ , знайдемо із напрямних косинусів.

$$\cos(\bar{a}_C, \hat{x}) = \frac{a_{Cx}}{a_C} = \frac{-0,9266}{1,0326} = -0,8973; (\bar{a}_C, \hat{x}) = 153,81^\circ;$$

$$\cos(\bar{a}_C, \hat{y}) = \frac{a_{Cy}}{a_C} = \frac{-0,4558}{1,0326} = -0,4414; (\bar{a}_C, \hat{y}) = 116,19^\circ.$$

З метою спрощення розв'язання і, як наслідок, спрощення алгоритму розв'язання задачі за допомогою ЕОМ, розглянемо рішення цієї задачі іншим, більш загальним методом.

## Аналітичний метод визначення кінематичних характеристик

Зображуємо схему механізму у деякому довільному положенні (рис. 22).

Проведемо вісі координат. Нехай положення точок  $B$  і  $C$  визначаються радіусами-векторами  $\vec{r}_B$  і  $\vec{r}_C$ , які проведені із центра  $O$ .

Запишемо рівняння геометричних в'язей для точки шатуна  $B$ , для якої відома тільки траєкторія руху. У векторній формі це рівняння матиме вигляд

$$\vec{r}_B = O\vec{A} + A\vec{B}. \quad (34)$$

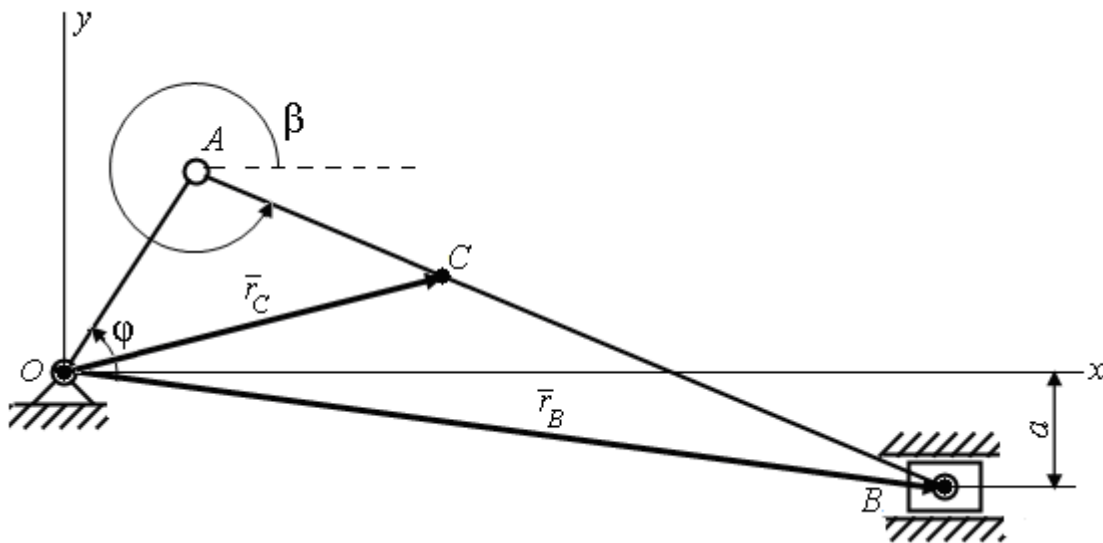


Рис. 22

В проекціях на вісі координат

$$x_B = OA \cdot \cos(\varphi) + AB \cdot \cos(\beta), \quad (35)$$

$$y_B = OA \cdot \sin(\varphi) + AB \cdot \sin(\beta). \quad (36)$$

Із рис. 19.37 видно, що  $y_B = -a$ . Тоді рівняння (36) матиме вигляд

$$-a = OA \cdot \sin(\varphi) + AB \cdot \sin(\beta). \quad (37)$$

Розв'язуємо рівняння (37) відносно невідомої  $\beta$  і знаходимо закон обертального руху шатуна відносно полюса  $A$

$$\beta = -\arcsin\left(\frac{OA \cdot \sin(\varphi) + a}{AB}\right). \quad (38)$$

Для визначення кутової швидкості ланки  $AB$  ( $\omega_{AB} = \dot{\beta}$ ) і кутового прискорення ( $\varepsilon_{AB} = \ddot{\beta}$ ) двічі продиференціюємо (37).

В результаті першого диференціювання (37) враховуючи, що  $\dot{\varphi} = \omega_{OA}$ , отримаємо

$$OA \cdot \cos(\varphi) \cdot \omega_{OA} + AB \cdot \cos(\beta) \cdot \omega_{AB} = 0. \quad (39)$$

Звідси

$$\omega_{AB} = -\omega_{OA} \cdot \frac{OA \cdot \cos(\varphi)}{AB \cdot \cos(\beta)}. \quad (40)$$

Диференціюємо (39) і, враховуючи, що  $\ddot{\varphi} = \varepsilon_{OA}$ , отримуємо

$$OA \cdot (-\sin(\varphi) \cdot \omega_{OA}^2 + \cos(\varphi) \cdot \varepsilon_{OA}) + AB \cdot (-\sin(\beta) \cdot \omega_{AB}^2 + \cos(\beta) \cdot \varepsilon_{AB}) = 0. \quad (41)$$

З останнього маємо

$$\varepsilon_{AB} = \omega_{AB}^2 \cdot \operatorname{tg}(\beta) - \frac{OA}{AB \cdot \cos(\beta)} \cdot (\cos(\varphi) \cdot \varepsilon_{OA} - \sin(\varphi) \cdot \omega_{OA}^2). \quad (42)$$

Вирази (40), (42) дозволяють обчислити  $\omega_{AB}$  і  $\varepsilon_{AB}$  для будь-якого положення механізму. Зауважимо, що  $\omega_{OA}$  і  $\varepsilon_{OA}$  входять в ці вирази зі знаком „+” або „-” у відповідності з прийнятим напрямом відліку кута  $\varphi$ . Сенс знаків  $\omega_{AB}$  і  $\varepsilon_{AB}$  визначається напрямом відліку кута  $\beta$ .

Проекцію швидкості точки  $B$  на вісь  $Ox$  отримуємо, якщо продиференціюємо по часу (35).

$$v_{Bx} = -OA \cdot \sin(\varphi) \cdot \omega_{OA} - AB \cdot \sin(\beta) \cdot \omega_{AB}. \quad (43)$$

Модуль швидкості точки  $B$   $v_B = |\dot{x}_B|$ , модуль прискорення  $a_B = |\ddot{x}_B|$ .

Продиференціюємо (43) по часу і знайдемо проекцію прискорення точки  $B$  на вісь  $Ox$ .

$$a_{Bx} = -OA \cdot [\cos(\varphi) \cdot \omega_{OA}^2 + \sin(\varphi) \cdot \varepsilon_{OA}] - AB \cdot [\cos(\beta) \cdot \omega_{AB}^2 + \sin(\beta) \cdot \varepsilon_{AB}]. \quad (44)$$

Для визначення швидкості та прискорення точки  $C$  запишемо векторне рівняння

$$\vec{r}_C = \vec{OA} + \vec{AC}. \quad (45)$$

Спроекуємо (45) на вісі  $Ox$ ,  $Oy$  і отримаємо рівняння руху точки  $C$  в координатній формі

$$x_C = OA \cdot \cos(\varphi) + AC \cdot \cos(\beta), \quad (46)$$

$$y_C = OA \cdot \sin(\varphi) + AC \cdot \sin(\beta). \quad (47)$$

Проекції швидкості та прискорення точки  $C$  визначимо диференціюванням по часу (46), (47)

$$v_{Cx} = -OA \cdot \sin(\varphi) \cdot \omega_{OA} - AC \cdot \sin(\beta) \cdot \omega_{AB}, \quad (48)$$

$$v_{Cy} = OA \cdot \cos(\varphi) \cdot \omega_{OA} + AC \cdot \cos(\beta) \cdot \omega_{AB}, \quad (49)$$

$$a_{Cx} = -OA \cdot [\cos(\varphi) \cdot \omega_{OA}^2 + \sin(\varphi) \cdot \varepsilon_{OA}] - AC \cdot [\cos(\beta) \cdot \omega_{AB}^2 + \sin(\beta) \cdot \varepsilon_{AB}], \quad (50)$$

$$a_{Cy} = OA \cdot [-\sin(\varphi) \cdot \omega_{OA}^2 + \cos(\varphi) \cdot \varepsilon_{OA}] + AC \cdot [-\sin(\beta) \cdot \omega_{AB}^2 + \cos(\beta) \cdot \varepsilon_{AB}]. \quad (51)$$

Модулі швидкості та прискорення точки  $C$  знайдемо за формулами

$$v_C = \sqrt{(v_{Cx})^2 + (v_{Cy})^2}, \quad (52)$$

$$a_C = \sqrt{(a_{Cx})^2 + (a_{Cy})^2}. \quad (53)$$

Напрявні косинуси

$$\cos(\bar{v}_C, x) = \frac{v_{Cx}}{v_C}, \quad \cos(\bar{v}_C, y) = \frac{v_{Cy}}{v_C}. \quad (54)$$

$$\cos(\bar{a}_C, x) = \frac{a_{Cx}}{a_C}, \quad \cos(\bar{a}_C, y) = \frac{a_{Cy}}{a_C}. \quad (55)$$

За даним алгоритмом складена програма у системі MATHCAD, яку застосуємо для визначення кінематичних характеристик ланок і точок кривошипно-шатунного механізму. Лістинг файлу (Mathcad document 2) надається на с. с. 37 – 40.

## Mathcad document 2

$$OA := 0.2 \quad AB := 0.72 \quad AC := 0.24 \quad a := 0.12 \quad \varepsilon_{OA} := 2.6 \quad \phi := 60 \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$\beta(\phi) := -\operatorname{asin}\left(\frac{OA \sin(\phi) + a}{AB}\right)$$

$$t(\phi) := \sqrt{\frac{2 \cdot \phi}{\varepsilon_{OA}}}$$

### Link OA

$$\omega_{OA}(\phi) := \varepsilon_{OA} \cdot t(\phi)$$

$$v_A(\phi) := \omega_{OA}(\phi) \cdot OA$$

$$v_{Ax}(\phi) := (v_A(\phi)) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)$$

$$v_{Ay}(\phi) := (v_A(\phi)) \cdot \sin(\phi)$$

$$\gamma_1(\phi) := \operatorname{acos}\left(\frac{v_{Ax}(\phi)}{v_A(\phi)}\right)$$

$$\gamma_2(\phi) := \operatorname{acos}\left(\frac{v_{Ay}(\phi)}{v_A(\phi)}\right)$$

$$a_{An}(\phi) := (\omega_{OA}(\phi))^2 \cdot OA$$

$$a_{A\tau}(\phi) := \varepsilon_{OA} \cdot OA$$

$$a_A(\phi) := \sqrt{(a_{An}(\phi))^2 + (a_{A\tau}(\phi))^2}$$

$$a_{Ax}(\phi) := a_{An}(\phi) \cdot \cos(\pi - \phi) + a_{A\tau}(\phi) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)$$

$$a_{Ay}(\phi) := a_{An}(\phi) \cdot \sin(\phi) + a_{A\tau}(\phi) \cdot \sin(\phi)$$

$$a_A(\phi) := \sqrt{(a_{Ax}(\phi))^2 + (a_{Ay}(\phi))^2}$$

$$\theta_1(\phi) := \operatorname{acos}\left(\frac{a_{Ax}(\phi)}{a_A(\phi)}\right)$$

$$\theta_2(\phi) := \operatorname{acos}\left(\frac{a_{Ay}(\phi)}{a_A(\phi)}\right)$$

### Link AB

$$v_{Bx}(\phi) := (-OA \cdot \sin(\phi) \cdot \omega_{OA}(\phi)) - AB \cdot \sin(\beta(\phi)) \cdot \omega_{AB}(\phi)$$

$$v_{By}(\phi) := 0$$

$$\omega_{AB}(\phi) := -\omega_{OA}(\phi) \cdot \frac{OA \cdot \cos(\phi)}{AB \cdot \cos(\beta(\phi))}$$

$$\varepsilon_{AB}(\phi) := (\omega_{AB}(\phi))^2 \cdot \tan(\beta(\phi)) - OA \cdot \frac{[(\cos(\phi) \cdot \varepsilon_{OA}) - \sin(\phi) \cdot (\omega_{OA}(\phi))^2]}{AB \cdot \cos(\beta(\phi))}$$

$$aBx(\phi) := -OA \cdot \left[ \cos(\phi) \cdot (\omega_{OA}(\phi))^2 + \sin(\phi) \cdot \varepsilon_{OA} \right] - AB \cdot \left[ \cos(\beta(\phi)) \cdot (\omega_{AB}(\phi))^2 + \sin(\beta(\phi)) \cdot \varepsilon_{AB}(\phi) \right]$$

$$aBy(\phi) := 0$$

$$vCx(\phi) := -OA \cdot \sin(\phi) \cdot \omega_{OA}(\phi) - AC \cdot \sin(\beta(\phi)) \cdot \omega_{AB}(\phi)$$

$$vCy(\phi) := OA \cdot \cos(\phi) \cdot \omega_{OA}(\phi) + AC \cdot \cos(\beta(\phi)) \cdot \omega_{AB}(\phi)$$

$$vC(\phi) := \sqrt{(vCx(\phi))^2 + (vCy(\phi))^2}$$

$$\gamma_1(\phi) := \arccos\left(\frac{vCx(\phi)}{vC(\phi)}\right)$$

$$\gamma_2(\phi) := \arccos\left(\frac{vCy(\phi)}{vC(\phi)}\right)$$

$$aCx(\phi) := -OA \cdot \left[ \cos(\phi) \cdot (\omega_{OA}(\phi))^2 + \sin(\phi) \cdot \varepsilon_{OA} \right] - AC \cdot \left[ \cos(\beta(\phi)) \cdot (\omega_{AB}(\phi))^2 + \sin(\beta(\phi)) \cdot \varepsilon_{AB}(\phi) \right]$$

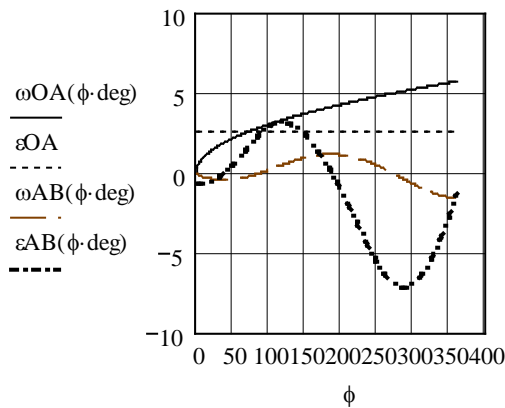
$$aCy(\phi) := OA \cdot \left[ -\sin(\phi) \cdot (\omega_{OA}(\phi))^2 + \cos(\phi) \cdot \varepsilon_{OA} \right] + AC \cdot \left[ -\sin(\beta(\phi)) \cdot (\omega_{AB}(\phi))^2 + \cos(\beta(\phi)) \cdot \varepsilon_{AB}(\phi) \right]$$

$$aC(\phi) := \sqrt{(aCx(\phi))^2 + (aCy(\phi))^2}$$

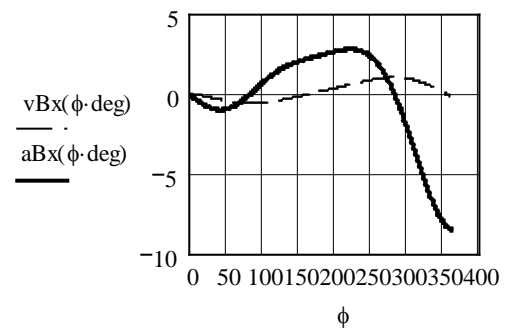
$$\theta_1(\phi) := \arccos\left(\frac{aCx(\phi)}{aC(\phi)}\right)$$

$$\theta_2(\phi) := \arccos\left(\frac{aCy(\phi)}{aC(\phi)}\right)$$

$\phi := 0, 1.. 360$



a)



б)

Рис. 23

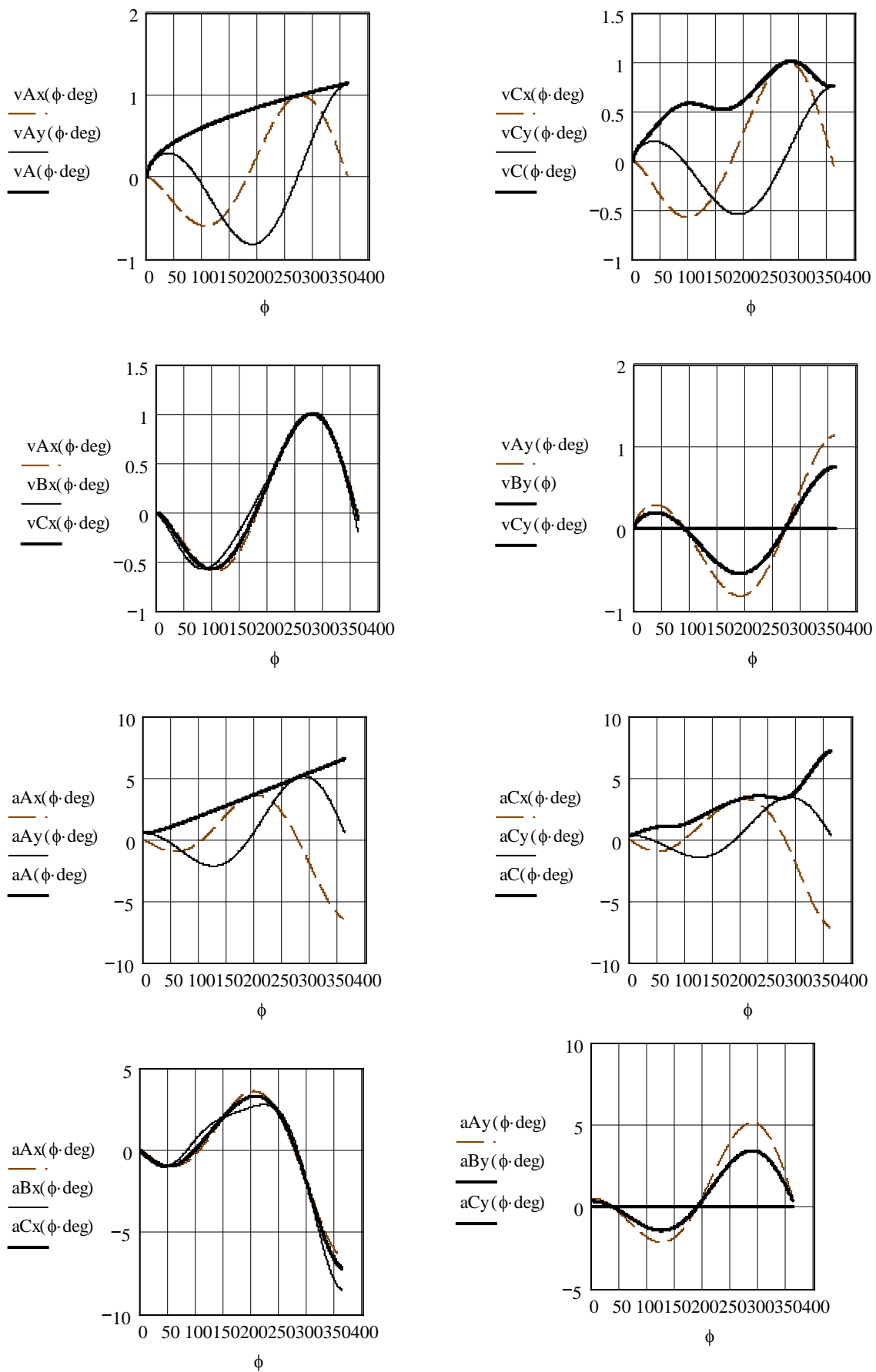


Рис.24

Test

$$OA := 0.2 \quad AB := 0.72 \quad AC := 0.24 \quad a := 0.12 \quad \varepsilon_{OA} := 2.6 \quad \phi := 60 \cdot \frac{\pi}{180}$$

**Link OA**

$$\omega_{OA}(\phi) = 2.334$$

$$v_{Ax}(\phi) = -0.404$$

$$\gamma_1(\phi) := \arccos\left(\frac{v_{Ax}(\phi)}{v_A(\phi)}\right)$$

$$\gamma_2(\phi) := \arccos\left(\frac{v_{Ay}(\phi)}{v_A(\phi)}\right)$$

$$a_{Ax}(\phi) = -0.995$$

$$\theta_1(\phi) := \arccos\left(\frac{a_{Ax}(\phi)}{a_A(\phi)}\right)$$

$$\theta_2(\phi) := \arccos\left(\frac{a_{Ay}(\phi)}{a_A(\phi)}\right)$$

$$v_{Ay}(\phi) = 0.233$$

$$a_{Ay}(\phi) = -0.683$$

$$v_A(\phi) = 0.467$$

$$\gamma_1(\phi) \cdot \frac{180}{\pi} = 150$$

$$\gamma_2(\phi) \cdot \frac{180}{\pi} = 60$$

$$a_A(\phi) = 1.207$$

$$\theta_1(\phi) \cdot \frac{180}{\pi} = 145.523$$

$$\theta_2(\phi) \cdot \frac{180}{\pi} = 145.523$$

**Link AB**

$$\omega_{AB}(\phi) = -0.355$$

$$v_{Bx}(\phi) = -0.508$$

$$v_{Cx}(\phi) = -0.439$$

$$\gamma_1(\phi) := \arccos\left(\frac{v_{Cx}(\phi)}{v_C(\phi)}\right)$$

$$\gamma_2(\phi) := \arccos\left(\frac{v_{Cy}(\phi)}{v_C(\phi)}\right)$$

$$a_{Cx}(\phi) = -0.926$$

$$\theta_1(\phi) := \arccos\left(\frac{a_{Cx}(\phi)}{a_C(\phi)}\right)$$

$$\theta_2(\phi) := \arccos\left(\frac{a_{Cy}(\phi)}{a_C(\phi)}\right)$$

$$\varepsilon_{AB}(\phi) = 0.983$$

$$a_{Bx}(\phi) = -0.79$$

$$v_C(\phi) = 0.466$$

$$\gamma_1(\phi) \cdot \frac{180}{\pi} = 160.481$$

$$\gamma_2(\phi) \cdot \frac{180}{\pi} = 70.481$$

$$a_C(\phi) = 1.032$$

$$\theta_1(\phi) \cdot \frac{180}{\pi} = 153.82$$

$$\theta_2(\phi) \cdot \frac{180}{\pi} = 116.18$$



## Питання до захисту лабораторних робіт

1. Який рух твердого тіла називається плоскопаралельним, або плоским?
2. Скільки степенів вільності має тіло, що рухається плоскопаралельно?
3. Записати рівняння руху плоскої фігури.
4. Які кінематичні характеристики є основними при плоскому русі?
5. Як визначається швидкість будь-якої точки плоскої фігури?
6. Сформулюйте теорему про проекції швидкостей двох точок тіла на пряму, яка з'єднує ці точки.
7. Яку точку плоскої фігури називають миттєвим центром швидкостей?
8. Побудуйте миттєвий центр швидкостей для ланки вказаного викладачем механізму.
9. Яку точку плоскої фігури називають миттєвим центром прискорень?
10. В яких випадках плоского руху збігаються миттєвий центр швидкостей та миттєвий центр прискорень?
11. Для вказаної викладачем точки ланки механізму вказати напрями її швидкості і складових прискорення з урахуванням заданих даних.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Павловський М.А. Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: Учебн. для машиностроит. и приборостроит. спец. вузов. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1990. – 607 с.
3. Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике – М.: Наука, 1980. – 446 с.
4. Теоретична механіка: Збірник задач / О.С. Апостолук, В.М. Воробйов, Д.І. Ільчишина та ін.; За ред. М.А. Павловського. – К.: Техніка, 2007. – 400 с.
5. Айзенберг Т.Б., Воронков И.М., Осецкий В.М. Руководство к решению задач по теоретической механике. – М., Высш. шк., 1968. – 436 с.
6. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: в 3 т. – М.: Наука, 1971-1973. – 3 т. – Т. 1. – 512 с.; Т. 2. – 624 с.; Т. 3. – 487 с.
7. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебн. пособие для техн. вузов / Яблонский А.А., Норейко С.С., Вольфсон С.А. и др.; Под ред. А.А. Яблонского. – 4-е изд. перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1985. – 367 с.
8. Бертяев В.Д. Теоретическая механика на базе МATHCAD. Практикум. – С.-Пб.: БХВ – Петербург, 2005. – 752 с.
9. Новожилов И.В., Зацепин М.Ф. Типовые расчеты по теоретической механике на базе ЭВМ: Учебн. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1986. – 136 с.
10. Методические указания к изучению раздела «Кинематика» по теоретической механике для студентов 2 курса химико-технологических специальностей заочного обучения/ Сост.: А.М. Ермолаев, М.С.Емельянов. – Днепропетровск: ДХТИ, 1984. – 24 с.
11. Расчетно-графические задания по кинематике и методические указания к их выполнению с применением ЭВМ/ Сост.: Б.А. Харлан, М.С. Емельянов, С.А. Чернецкий. – Днепропетровск: ДХТИ, 1989. – 47 с.
12. Методические указания к выполнению компьютерных лабораторных работ по дисциплине „Теоретическая механика” для студентов всех специальностей / Сост.: Ю.А. Мушенков, В.Т. Вышинский. – Днепропетровск: НМетАУ, 1999. – 26 с.



